(آچیک) میدانهای مغناطیسی ساکن

مرور: دو معادله پایه مدل الکترستاتیک ساکن :

$$\nabla \cdot D = \rho$$
$$\nabla \times E = 0$$

E کمیت اساسی میدان برداری در فضای آزاد

D برای محاسبه تاثیر قطبی شدگی

رابطه بین D و E توسط خواص الکتریکی محیط تعیین می‌شود.

در محیط خطی و ایزوتروپیک ، $D = \epsilon E$

نیروی الکتریکی وارد بر بار آزمون q در میدان الکتریکی E (قانون کولن) : $F_e = qE \ (N)$

وقتی این بار آزمون در یک میدان مغناطیسی در حال حرکت باشد، نیروی دیگری (F_m) نیز بر آن اعمال می‌شود که ،

اندازه آن با مقدار بار q و مولفه سرعت در جهت عمود بر این امتداد متناسب است.

جهت آن در هر نقطه بر بردار سرعت بار آزمون و نیز بر جهت ثابتی در آن نقطه عمود است.

نیروی F_m یک نیروی مغناطیسی است و با تعریف کمیت جدید میدان برداری بنام چگالی شار مغناطیسی B توصیف می‌شود

که هم امتداد ثابت و هم ثابت تناسب را مشخص می‌کند.

$$\underset{N}{F_m} = q \, \underset{m/s}{v} \times \underset{\frac{Wb}{m^2} \equiv T \text{ تسلا}}{B}$$

نیروی الکترومغناطیسی کل وارد بر بار q : $F = F_e + F_m$

اصل موضوعی اساسی مدل الکترومغناطیس

$$\boxed{F = q\left(E + v \times B\right)}$$

* معادله نیروی لورنتس :

* $B\left(\frac{Wb}{m^2}\right)$ چگالی شار مغناطیسی

$\Phi = \int B \cdot ds$ شار مغناطیسی گذرنده از سطح

چون خطوط میدان مغناطیسی بسته هستند، اگر سطح بسته‌ای را در نظر بگیریم، هر خط شار وارد شده به آن از آن خارج هم می‌شود.

بعبارتی کل شار خارج شده از یک سطح بسته صفر است.

$$\oint B \cdot ds = 0$$

اصول موضوعی مغناطیس ساکن در فضای آزاد :

دو اصل موضوعی مغناطیس ساکن : دیورژانس و کرل B در فضای آزاد :

$$\nabla\cdot B = 0$$
$$\nabla\times B = \mu_0 J$$

μ_0 نفوذپذیری فضای آزاد $\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}$

J چگالی جریان

$$\nabla\cdot\nabla\times\vec{B} = 0 \rightarrow \nabla\cdot J = 0$$

$$\begin{cases}\nabla\cdot B = 0\\ \nabla\cdot D = \rho\end{cases} \qquad \begin{cases}\oint_s B\cdot ds = 0\\ \oint_s D\cdot ds = Q\end{cases}$$

مقایسه : برای چگالی بار الکتریکی ρ ، هیچ شبه بار مغناطیسی وجود ندارد.

یا هیچ منبع شار مغناطیسی وجود ندارد و خطوط شار همیشه بر خود بسته می‌شوند.

$\oint_s B\, ds = 0$: قانون بقای شار مغناطیسی = شار مغناطیسی خروجی کل از هر سطح بسته صفر است.

با تقسیم آهنربا به اجزای کوچکتر (تا اجزای اتمی)، هر کدام دارای یک قطب شمال و جنوب می‌باشد.

به عبارتی : قطب‌های مغناطیسی نمی‌توانند مجزا شوند.

شکل انتگرالی رابطه کرل را می‌توان با انتگرالگیری از دو طرف آن روی یک سطح باز و اعمال قضیه استوکس بدست آورد.

$$\nabla\times B = \mu_0 J \longrightarrow \int_s (\nabla\times B)\cdot ds = \mu_0 \int_s J\cdot ds \longrightarrow \oint_c B\cdot dl = \mu_0 I$$

قانون مداری آمپر :

خلاصه اصول موضوعی اساسی مغناطیس ساکن در فضای آزاد :

شکل دیفرانسیلی	شکل انتگرالی
$\nabla\cdot B = 0$	$\oint_s B\cdot ds = 0$
$\nabla\times B = \mu_0 J$	$\oint_c B\, dl = \mu_0 I$

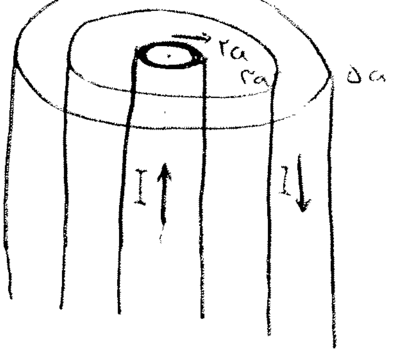
$$\oint_c H\cdot dl = I$$

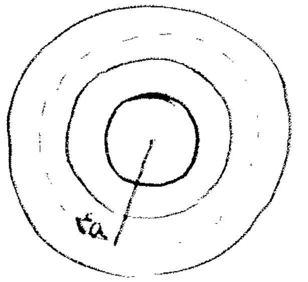
گردش شار مغناطیسی در فضای آزاد به دور هر مسیر بسته برابر جریان کل عبوری از سطح محصور شده توسط این مسیر است.

(کاربرد قانون آمپر : تعیین چگالی شار مغناطیسی B ناشی از جریان I ، هنگامی که در مسیر بسته C اندازه B ثابت باشد)

مثال ،

جریانی به شدت I ، از هادی داخلی کابل هم محوری به شعاع $2a$ می‌گذرد.
جریان دیگری به همان شدت و در جهت مخالف از پوسته خارجی کابل که شعاع داخلی آن $3a$ و شعاع خارجی آن $5a$ است عبور می‌کند.
شدت میدان مغناطیسی در فاصله $4a$ از محور کابل را محاسبه کنید.





$$\oint H \cdot dl = I'$$

I' : کل جریان عبوری از سطح مدوری به شعاع $4a$

$$J = \frac{I}{S} = \frac{I}{\pi(5a)^2 - \pi(3a)^2} = \frac{I}{16\pi a^2} \qquad 3a < r < 5a$$

$$I' = I - J S'$$

$$= I - J\left[\pi(4a)^2 - \pi(3a)^2\right]$$

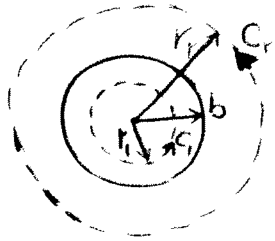
$$= I - \frac{I}{16\pi a^2}(7\pi a^2) = I\left(1 - \frac{7}{16}\right) = \frac{9}{16} I$$

$$\int H \cdot dl = I'$$

$$2\pi(4a) H = \frac{9}{16} I \longrightarrow \underline{H = \frac{9I}{128\pi a}}$$

زنجان ارشد ص ۳۴۳-۴۴۲ [illegible] ۷۹

مثال: یک هادی مستقیم بی‌نهایت طویل با سطح مقطع مدور به شعاع b، جریان دائم I را حمل می‌کند. چگالی شار مغناطیسی را درون و بیرون هادی تعیین کنید.



سطح مقطع عرضی هادی

(۱) مسئله دارای تقارن استوانه‌ای است. استفاده از قانون مداری آمپر مزیت دارد.

اگر هادی را در امتداد محور z قرار دهیم، چگالی شار مغناطیسی B در جهت φ بوده و در امتداد هر مسیر دایره‌ای به دور محور z ثابت خواهد بود

تعیین ۲ مسیر انتگرال‌گیری دایره‌ای C_1 و C_2 به ترتیب در درون و بیرون هادی حامل جریان

جهت‌های C_1 و C_2 در جهت I از قاعده دست راست پیروی می‌کند

الف) در درون هادی:

$$\begin{cases} B_1 = a_\varphi B_{\varphi_1} \\ dl = a_\varphi r_1 \, d\varphi \end{cases} \Rightarrow \oint_{C_1} B_1 \cdot dl = \int_0^{2\pi} B_{\varphi_1} r_1 \, d\varphi = 2\pi r_1 B_{\varphi_1} = \mu_0 I_1$$

جریان گذرنده از سطح محصور شده توسط C_1:

$$I_1 = \frac{\pi r_1^2}{\pi b^2} I = \left(\frac{r_1}{b}\right)^2 I$$

بنابراین از قانون مداری آمپر داریم:

$$B_1 = a_\varphi B_{\varphi_1} = a_\varphi \frac{\mu_0 r_1 I}{2\pi b^2} \qquad r_1 \leq b$$

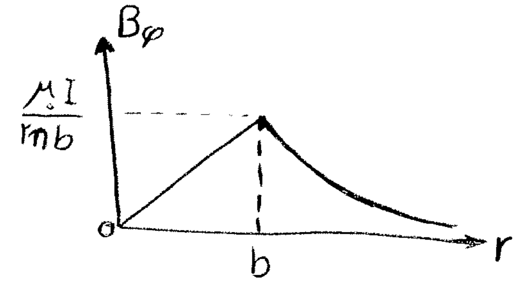
ب) در بیرون هادی:

$$\begin{cases} B_2 = a_\varphi B_{\varphi_2} \\ dl = a_\varphi r_2 \, d\varphi \end{cases} \Rightarrow \oint_{C_2} B_2 \cdot dl = 2\pi r_2 B_{\varphi_2}$$

مسیر C_2 در بیرون هادی کل جریان I را در بر می‌گیرد:

$$B_2 = a_\varphi B_{\varphi_2} = a_\varphi \frac{\mu_0 I}{2\pi r_2} \qquad r_2 \geq b$$

نتایج بیانگر آنست که:



اندازه B با تغییر r_1 از صفر تا b، بطور خطی با r_1 افزایش می‌یابد

پس از آن به صورت $\frac{1}{r_2}$ کاهش می‌یابد.

* اگر مسئله از هادی استوانه‌ای توپر حامل جریان کل I به لوله رسانای نازک حامل جریان سطحی تبدیل شود،

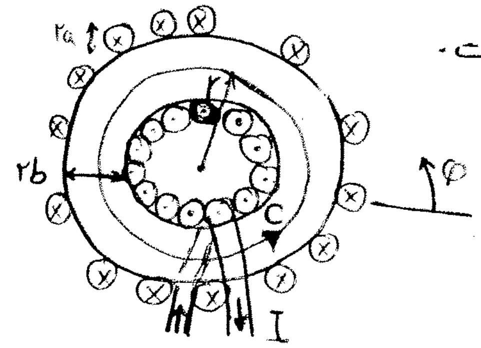
مطابق قانون آمپر در درون لوله $B=0$ است

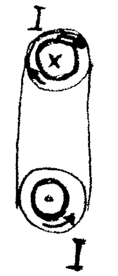
$$\begin{cases} \vec{J}_s = a_z J_s \\ I = 2\pi b J_s \end{cases} \rightarrow \quad B = \begin{cases} 0 & r<b \\ a_\phi \dfrac{\mu_0 b}{r} J_s & r>b \end{cases}$$

مثال: چگالی شار مغناطیسی در درون یک سیم‌پیچ چنبره‌ای با هسته هوایی و N دور سیم پیچ به هم فشرده حامل جریان I

را تعیین کنید. شعاع متوسط چنبره b و شعاع هر دور سیم پیچ a است.

ص ۲۷۸





تقارن استوانه‌ای:

- B فقط دارای مولفه ϕ است.
- B در امتداد هر مسیر دایره‌ای حول محور چنبره ثابت است.

مطابق شکل مسیر مدور C را به شعاع r تشکیل می‌دهیم.

به ازای $\underbrace{b-a<r<b+a}$ معادله $\oint_C B\cdot dl = \mu_0 I$ مستقیماً نتیجه می‌دهد:

$$\oint B\cdot dl = 2\pi r B_\phi = \mu_0 N I$$

که در آن فرض کرده‌ایم چنبره دارای هسته هوایی با نفوذپذیری μ_0 است.

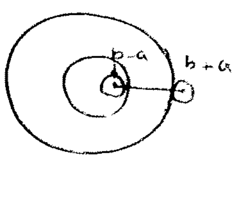
$$B = a_\phi B_\phi = a_\phi \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}$$

بنابراین:

$r<b-a$ ، $B=0$ است، زیرا کل جریان خالص در برگرفته شده توسط مسیر

بدیهی است که برای $r>b+a$

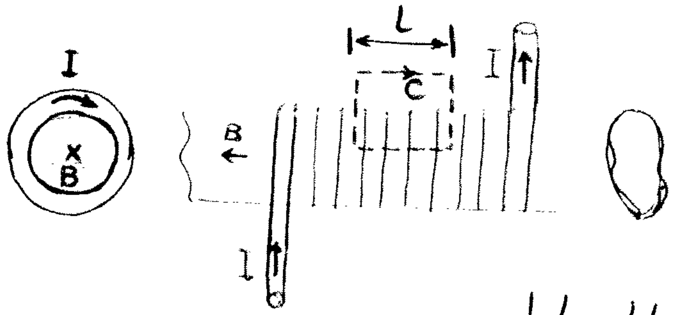
تشکیل یافته در این دو ناحیه صفر است.



مثال: چگالی شار مغناطیسی در درون یک سولونوئید بی‌نهایت طویل با هسته هوایی و

۲ روش حل

دارای n دور سیم پیچ فشرده در واحد طول، حامل جریان I را تعیین کنید.



الف) با کاربرد مستقیم قانون مداری آمپر:

بدیهی است میدان مغناطیسی در بیرون سولونوئید وجود ندارد.

برای تعیین میدان B در داخل، مسیر مستطیلی C، بطول L را

چنان تشکیل می‌دهیم که بخشی از آن در داخل و بخش دیگر در خارج سولونوئید قرار گیرد.

به دلیل تقارن، میدان B داخل باید به موازات محور باشد.

قانون آمپر $\oint B \cdot dl = \mu_0 I \Rightarrow BL = \mu_0 n L I \Rightarrow B = \mu_0 n I$

جهت B از راست به چپ است و نسبت به جهت جریان I در سولونوئید با قاعده دست راست مطابقت دارد.

ب) حالت خاص یک چنبره:

سولونوئید مستقیم را می‌توان بعنوان حالت خاص سیم پیچ چنبره‌ای با شعاع بی‌نهایت $(b \to \infty)$ در نظر گرفت

در چنین حالتی ابعاد مقطع عرضی هسته در مقایسه با b بسیار کوچک هستند و چگالی شار مغناطیسی

در داخل هسته بطور تقریبی ثابت است

$$B = \mu_0 \left(\frac{N}{2\pi b}\right) I = \mu_0 n I$$

(مثال قبل: $B = a_\varphi \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}$)

مشابه نتیجه قبل

مثال: اگر در داخل ماده‌ای مغناطیسی با $\mu_r = 3$ ، چگالی شار مغناطیسی $A_0 x \hat{a}_z$ باشد، چگالی جریان مغناطیسی آمپری (J) را بدست آورید:

$$B = A_0 x \, \hat{a}_z$$

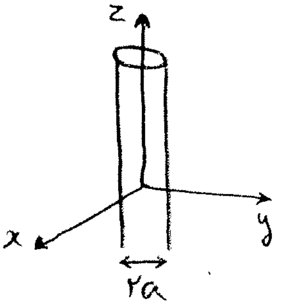
$$H = \frac{B}{\mu} = \frac{A_0 x}{3\mu_0} a_z$$

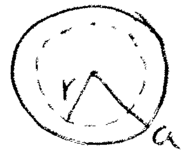
$$J = \nabla \times H = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 0 & 0 & \frac{A_0 x}{3\mu_0} \end{vmatrix} = \boxed{-\hat{a}_y \frac{A_0}{3\mu_0}}$$

مثال: توزیع جریان با چگالی $\vec{J}$ مفروض است.

$$\vec{J} = \begin{cases} \frac{k}{r} \hat{a}_z & 0<r<a \\ 0 & r>a \end{cases}$$

شدت میدان مغناطیسی ناشی از آن را در ناحیه $r<a$ بدست آورید.





$$I = \int_s J \cdot ds$$

$$I = \int_{r=0}^{r}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(\frac{k}{r}\hat{a}_z\right)\cdot(r\,d\varphi\,dr\,\hat{a}_z)$$

$$= \iint_{r\,\varphi} k\,dr\,d\varphi = \boxed{2\pi k r}$$

$$\oint_c H \cdot dl = I$$

$$\oint (H_\varphi \hat{a}_\varphi)\cdot(r\,d\varphi\,\hat{a}_\varphi) = 2\pi r H_\varphi = 2\pi k r$$

$$H_\varphi = k \longrightarrow \boxed{\vec{H} = k\,\hat{a}_\varphi}$$

پتانسیل مغناطیسی برداری:

(B سلونوئیدی) $\nabla\cdot B = 0 \xrightarrow[\text{دیورژانس کرل}]{\text{اتحاد صفر}} B = \nabla\times \underline{\underline{A}}$ پتانسیل مغناطیسی برداری $\left(\frac{Wb}{m}\right)$

تعریف مشابه پتانسیل الکتریکی اسکالر V در مورد E بدون کرل و بدست آوردن از رابطه $E=-\nabla V$

البته تعریف یک بردار به مشخص کردن کرل و دیورژانس آن نیاز دارد.
بنابراین رابطه $B=\nabla\times A$ به تنهایی برای تعریف A کافی نیست و لازم است دیورژانس آن نیز تعریف شود.

$$\nabla\times B = \nabla\times\nabla\times A = \mu_0 J$$

کرل کرل: $\nabla\times\nabla\times A = \nabla(\nabla\cdot A) - \nabla^2 A$ $\quad$ لاپلاسین $\left(\nabla^2 A = a_x\nabla^2 A_x + a_y\nabla^2 A_y + a_z\nabla^2 A_z\right)$

$$\nabla(\nabla\cdot A) - \nabla^2 A = \mu_0 J$$

به منظور ساده سازی $\rightarrow$ $\nabla\cdot A = 0$ شرط کولمب

$$\rightarrow \nabla^2 A = -\mu_0 J \implies \begin{cases} \nabla^2 A_x = -\mu_0 J_x \\ \nabla^2 A_y = -\mu_0 J_y \\ \nabla^2 A_z = -\mu_0 J_z \end{cases}$$

(معادله برداری پواسون) $\quad$ ۳ معادله پواسون عددی (کارتزین)

حل معادلات پواسون عددی مشابه حل معادله پواسون زیر است:

فضای خالی:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \rightarrow V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{v'} \frac{\rho}{R}\, dv'$$

بطور مشابه:

$$\nabla^2 A_x = -\mu_0 J_x \rightarrow A_x = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{v'} \frac{J_x}{R}\, dv'$$

ترکیب جوابهای مشابه برای A_y و A_z:

$$\boxed{A = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{v'} \frac{J}{R}\, dv'} \left(\frac{Wb}{m}\right)$$

$$J \not\longrightarrow B \qquad J \to A \to B$$

پس ترتیب ابتدا پتانسیل مغناطیسی برداری A را از روی حالات جریان حجمی J بدست می‌آوریم.
سپس حالات شار مغناطیسی B را با دیفرانسیل‌گیری از $\nabla\times A$ بدست می‌آوریم.

شار مغناطیسی گذرنده از سطح S که توسط مسیر C در برگرفته شده است: $\Phi = \int_S B \cdot ds = \int_S (\nabla \times A) \cdot ds \overset{\text{استوکس}}{=} \oint_C A \cdot dl$ $\quad \overset{\text{شار}}{T \cdot m^2}$ (Wb)

انتگرال خطی پتانسیل مغناطیسی برداری A به دور هر مسیر بسته برابر کل شار مغناطیسی گذرنده از سطح محصور شده توسط این مسیر است.

قانون بیوساوار:

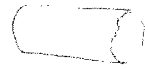
محاسبه میدان مغناطیسی ناشی از یک مدار حامل جریان

$J\,dv' = J S\,dl' = I\,dl'$

در یک سیم نازک با سطح مقطع S، داریم $dv' = S\,dl'$ و جریان گذرنده در امتداد سیم است.

$$A = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{v'} \frac{J}{R}\, dv' \rightarrow \boxed{A = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_{C'} \frac{dl'}{R}} \quad \frac{Wb}{m}$$

بنابراین:



جریان I در امتداد مسیر بسته C' عبور کند

$$B = \nabla \times A = \nabla \times \left[\frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_{C'} \frac{dl'}{R}\right] = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_{C'} \nabla \times \left(\frac{dl'}{R}\right)$$

اتحاد:

$$\nabla \times (\underset{\text{اسکالر}}{f}\vec{G}) = f\,\nabla \times G + (\nabla f) \times G$$

با فرض $f = \frac{1}{R}$, $G = dl'$ داریم:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_{C'} \left[\frac{1}{R}\nabla \times dl' + \left(\nabla \frac{1}{R}\right) \times dl'\right]$$

مختصات بدون پریم و پریم دار مستقلند $\nabla \times dl' = 0$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}}$$

فاصله R از dl' در نقطه (x', y', z') تا نقطه میدان (x, y, z):

$$\nabla\left(\frac{1}{R}\right) = a_x \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\right) + a_y \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{R}\right) + a_z \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{R}\right)$$

$$= -\frac{a_x(x-x') + a_y(y-y') + a_z(z-z')}{\left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right]^{3/2}} = -\frac{R}{R^3} = -a_R \frac{1}{R^2}$$

a_R بردار واحد و جهت آن از نقطه منبع به سوی نقطه میدان است.

جایگذاری:

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_{C'} \frac{dl' \times a_R}{R^2} \qquad (3)}$$

قانون بیوساوار:

* فرمولی برای تعیین B ناشی از جریان I در مسیر بسته C'

فرم مشابه:

$$B = \oint_{C'} dB \quad , \quad dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\frac{dl' \times a_R}{R^2}\right) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\frac{dl' \times R}{R^3}\right)$$

قانون آمپر $\oint_C B \cdot dl = \mu_0 I$

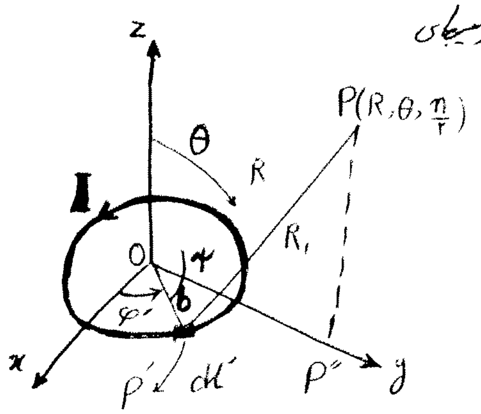
قانون بیوساوار $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_{C'} \frac{dl' \times a_R}{R^2}$

مقایسه دو قانون: قانون بیوساوار مشکل‌تر از قانون مدار آمپر است ولی

ولی اگر مسیر بسته‌ای پیدا نشود که بر روی آن مقدار B ثابت باشد، قانون آمپر برای تعیین میدان B از روی I مناسب نیست.

دو قطبی مغناطیسی، «حلقه کوچک حامل جریان»

مثال، چگالی شار مغناطیسی در فاصله دور از یک حلقه دایره‌ای کوچک به شعاع b و حامل جریان I (دو قطبی مغناطیسی) را پیدا کنید.



هدف، یافتن B در نقطه‌ای به فاصله R از مرکز حلقه $R \gg b$ با بهره‌گیری از تقارن‌های

مرکز حلقه در مبدأ مختصات کروی (منبع پریم دار)

روش، ابتدا یافتن پتانسیل مغناطیسی برداری A و سپس محاسبه B از $\nabla \times A$

$$A = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_{c'} \frac{dl'}{R_1}$$

بدلیل تقارن میدان مغناطیسی مستقل از زاویه φ نقطه میدان است.

برای سهولت نقطه میدان $P(R,\theta,\frac{\pi}{2})$ در صفحه yz انتخاب شده است.

که مهم آنکه $a_{\varphi'}$ در dl' (منبع) مشابه a_φ در نقطه P (میدان) نیست.

$$dl' = (-a_x \sin\varphi' + a_y \cos\varphi')\, b\, d\varphi'$$

a_φ در P برابر $-a_x$ است و

بعلاوه هر $I dl'$ جزء کوچک جریان دیفرانسیلی متقارن آن در طرف دیگر محور y وجود دارد که در جهت $-a_x$ اثر برابری روی A دارد

ولی سهم $I dl'$ را در جهت a_y خنثی می‌کند

$$A = -a_x \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{b \sin\varphi'}{R_1}\, d\varphi' = a_\varphi \frac{\mu_0 I b}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\varphi'}{R_1}\, d\varphi'$$

$$\overset{\triangle}{OPP'}: \; R_1^2 = R^2 + b^2 - 2bR\cos\psi = R^2 + b^2 - 2bR\sin\theta\sin\varphi'$$

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R\sqrt{1+\frac{b^2}{R^2} - \frac{2b}{R}\sin\theta\sin\varphi'}} \overset{R^2 \gg b^2}{\simeq} \frac{1}{R}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{2b}{R}\sin\theta\sin\varphi'}} \simeq \frac{1}{R}\left(1 + \frac{b}{R}\sin\theta\sin\varphi'\right)$$

جایگذاری $\rightarrow$

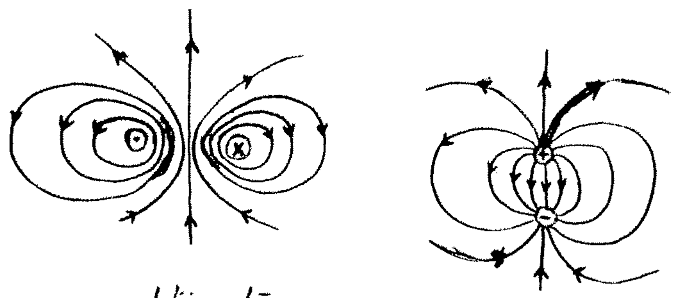
$$A = a_\varphi \frac{\mu_0 I b}{2\pi R}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{b}{R}\sin\theta\sin\varphi'\right)\sin\varphi'\, d\varphi' = a_\varphi \frac{\mu_0 I b^2}{4R^2}\sin\theta$$

$$B = \nabla \times A = \frac{1}{R^2\sin\theta}\begin{vmatrix} a_R & R a_\theta & R\sin\theta\, a_\varphi \\ \partial/\partial R & \partial/\partial\theta & \partial/\partial\varphi \\ A_R & R A_\theta & R\sin\theta\, A_\varphi \end{vmatrix} = \frac{\mu_0 I b^2}{4R^3}\left(a_R 2\cos\theta + a_\theta \sin\theta\right)$$

بررسی شباهت دوقطبی الکتریکی و مغناطیسی:

۵۴_۳ (۱۱۲)
$$E = \frac{P}{4\pi \varepsilon_0 R^3}\left(a_R\, 2\cos\theta + a_\theta \sin\theta\right)$$

۳۲_۶ (۲۸۹)
$$B = \frac{\mu_0 I b^2}{4R^3}\left(a_R\, 2\cos\theta + a_\theta \sin\theta\right)$$



دوقطبی مغناطیسی

دوقطبی الکتریکی

در شکل‌های دوقطبی خطوط شار مغناطیسی پیوسته هستند.

خطوط میدان دوقطبی الکتریکی در بارها ختم می‌شوند (از بار مثبت به منفی می‌رود)

بازنویسی پتانسیل مغناطیسی برداری:

$$A = a_\varphi \frac{\mu_0 (I\pi b^2)}{4\pi R^2}\sin\theta = \frac{\mu_0\, m \times a_R}{4\pi R^2}$$

که در آن $m = a_z I\pi b^2 = a_z I S = a_z m \; (A\cdot m^2)$ گشتاور دوقطبی مغناطیسی (تعریف)

* برداری است که اندازه آن برابر حاصلضرب جریان وارده در سطح حلقه بوده
و جهتی همسو با شست دست راست دارد اگر انگشتان جهت جریان را دنبال کند.

مقایسه روابط

مشابه:
$$A = \frac{\mu_0\, m \times a_R}{4\pi R^2}$$ پتانسیل مغناطیسی برداری

$$V = \frac{P \cdot a_R}{4\pi \varepsilon_0 R^2}$$ پتانسیل الکتریکی اسکالر

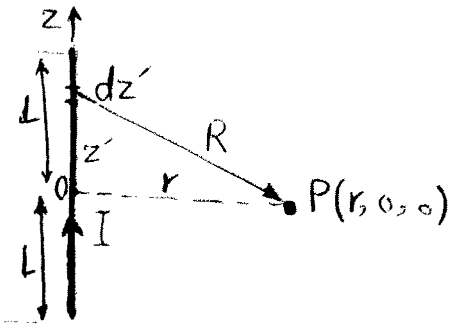
بازنویسی چگالی شار مغناطیسی:

$$B = \frac{\mu_0 I b^2}{4R^3}\left(a_R\, 2\cos\theta + a_\theta \sin\theta\right) = \frac{\mu_0 m}{4\pi R^3}\left(a_R\, 2\cos\theta + a_\theta \sin\theta\right)$$

با تغییر P به m و ε_0 به $\frac{1}{\mu_0}$ رابطه E و B در نقاط دور مشابه است.

۲۸۴ چنگ مثال: جریان مستقیم I از سیم مستقیمی بطول $2L$ می‌گذرد. مطلوب است تعیین شار مغناطیسی B در نقطه‌ای به فاصله r از سیم در صفحه عمود منصف آن: الف) با تعیین پتانسیل مغناطیسی برداری A به عنوان قدم اول

ب) با بکارگیری قانون بیوساوار



جریان فقط در مدارهای بسته وجود دارد.

بنابراین این سیم مستقیم باید بخشی از یک حلقه حامل جریان باشد.

بعلت ناشناخته بودن بقیه مدار، نمی‌توان از قانون آمپر استفاده کرد.

جزء کوچک المان طولی بر روی سیم حامل جریان در راستای محور z عبارتست از: $dl' = a_z dz'$

مختصات نقطه میدان P در مختصات استوانه‌ای: $(r, 0, 0)$

* الف)

$$A = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_{c'} \frac{dl'}{R} = a_z \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-L}^{L} \frac{dz'}{\sqrt{z'^2+r^2}} = a_z \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[\ln\left(z' + \sqrt{z'^2+r^2}\right)\right]\Bigg|_{-L}^{L}$$

$$= a_z \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \frac{\sqrt{L^2+r^2}+L}{\sqrt{L^2+r^2}-L}$$

$$B = \nabla \times A = \nabla \times (a_z A_z) = a_r \frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - a_\varphi \frac{\partial A_z}{\partial r}$$

تقارن استوانه‌ای حول سیم: $\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} = 0$

$$= -a_\varphi \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \frac{\sqrt{L^2+r^2}+L}{\sqrt{L^2+r^2}-L}\right] = a_\varphi \frac{\mu_0 I L}{2\pi r\sqrt{L^2+r^2}}$$

برای حالتی که $r \ll L$ داریم:

سیم بی‌نهایت طویل مستقیم حامل جریان I: $\boxed{B_\varphi = a_\varphi \frac{\mu_0 I}{2\pi r}}$

* ب) قانون بیوساوار:

بردار فاصله از جزء کوچک منبع dz' تا نقطه میدان P: $\vec{R} = a_r r - a_z z'$

$$dl' \times \vec{R} = a_z dz' \times (a_r r - a_z z') = a_\varphi r\, dz'$$

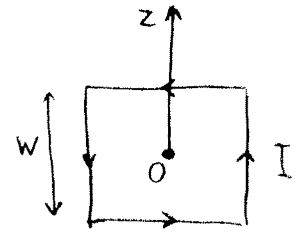
جایگذاری

$$B = \int dB = \int \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\frac{dl' \times \vec{R}}{R^3}\right) = a_\varphi \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-L}^{L} \frac{r\, dz'}{(z'^2+r^2)^{3/2}}$$

$$\boxed{= a_\varphi \frac{\mu_0 I L}{2\pi r \sqrt{L^2+r^2}}}$$

* جواب هر دو روش یکسان است.

مثال: چگالی شار مغناطیسی را در مرکز حلقه مربعی شکل به ضلع w، حامل جریان مستقیم I را بدست آورید. ص ۲۸۵ تعمیم



حلقه حامل جریان در صفحه xy است.

چگالی شار مغناطیسی در مرکز حلقه مربع، چهار برابر شار مغناطیسی ناشی از یک ضلع است.

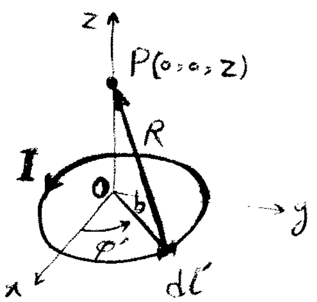
چگالی شار در رابطه مثال قبل، $L = r = \frac{w}{2}$

$$B = a_\varphi \frac{\mu_0 I L}{2\pi r\sqrt{L^2+r^2}}$$

$$B = a_z \frac{\mu_0 I L}{2\pi L\sqrt{2}L} \times 4 = \boxed{a_z \frac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi w}}$$

جهت B در جهت جریان حلقه تابع قاعده دست راست.

مثال: چگالی شار مغناطیسی را در نقطه‌ای روی محور یک حلقه دایره‌ای به شعاع b و حامل جریان مستقیم I را بدست آورید. ص ۲۸۶



قانون بیوساوار:

$$dl' = a_\varphi b\, d\varphi'$$

$$\vec{R} = \hat{a}_z z - \hat{a}_r b$$ (بردار از جزء کوچک منبع dl' به نقطه میدان P)

اندازه $R = \sqrt{z^2+b^2}$

$$dl' \times \vec{R} = a_\varphi b\, d\varphi' \times (a_z z - a_r b)$$
$$= a_r b z\, d\varphi' + \underline{\underline{a_z}} b^2 d\varphi'$$

حذف مولفه a_r بدلیل تقارن استوانه‌ای:

$$B = \oint_c \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\frac{dl' \times R}{R^3}\right)$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{2\pi} a_z \frac{b^2\, d\varphi'}{(z^2+b^2)^{3/2}}$$

$$\boxed{B = a_z \frac{\mu_0 I b^2}{2(z^2+b^2)^{3/2}}} \quad (T)$$

چگالی شار در مرکز حلقه:

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2b}$$

پتانسیل مغناطیسی اسکالر:

در یک ناحیه بدون جریان $J = 0$

$\nabla \times B = \mu_0 J \longrightarrow \nabla \times B = 0$

$\nabla \times \nabla V = 0$

قرارداد

اتفاق مهم $\rightarrow$ $B = -\mu_0 \nabla V_m$

آمپر (A) V_m: پتانسیل مغناطیسی اسکالر

در فضای آزاد

اختلاف پتانسیل مغناطیسی اسکالر بین دو نقطه P_1 و P_2: $V_{m_2} - V_{m_1} = -\int_{P_1}^{P_2} \frac{1}{\mu_0} B \cdot dl$

بصورت مشابه: $V_2 - V_1 = -\int_{P_1}^{P_2} E \cdot dl$

اگر بارهای مغناطیسی با چگالی حجمی $\rho_m \left(\frac{A}{m^2}\right)$ در حجم V' وجود داشت: $V_m = \frac{1}{4\pi}\int_{V'} \frac{\rho_m}{R}\, dV'$

و $\vec{B}$ با جایگذاری V_m در گرادیان بدست می‌آمد

اما بارهای مغناطیسی مجزا بصورت تجربی مشاهده نشده است.

با این وجود در نظر گرفتن بارهای مغناطیسی فرضی در مدل ریاضی برای بررسی روابط مغناطیسی مناسب است.

میدان مغناطیسی یک آهنربای میله‌ای کوچک مانند میدان دوقطبی مغناطیسی است.

این مطلب با مشاهده مسیر براده‌های آهن در اطراف یک آهنربا بطور تجربی معلوم است.

(مثال): دو انتهای یک آهنربای دائمی (قطب شمال و جنوب) به ترتیب محل استقرار بارهای مغناطیسی مثبت و منفی است.

در یک آهنربای میله‌ای بارهای فرضی $+q_m$ و $-q_m$ در فاصله d از یکدیگر قرار دارد و یک دوقطبی مغناطیسی با

گشتاور $m = q_m d = a_n I S$ را ایجاد می‌کند

سپس یافتن V_m و B از روابط فوق

یادآوری: این روابط تنها در نقاطی برقرار است که جریان نداریم.

مغناطیس شدگی و چگالی جریان معادل:

براساس مدل ساده اتمی، مواد از اتم‌هایی با هسته بار مثبت و تعدادی الکترون با بار منفی در حال گردش به دور آن تشکیل شده است.

الکترون‌های مداری باعث تولید جریان گردان شده و دوقطبی‌های مغناطیسی میکروسکوپی را ایجاد می‌کنند

هم الکترون‌ها و هم هسته اتم روی محور خود با گشتاور دوقطبی مغناطیسی معین می‌چرخند

گشتاور دوقطبی مغناطیسی هسته در برابر الکترون‌ها قابل صرفنظر است. (جرم بالای هسته)

در غیاب میدان مغناطیسی خارجی، دوقطبی‌های مغناطیسی اتم‌های مواد (به استثنای آهنربا) دارای جهت‌های تصادفی بوده و گشتاور مغناطیسی خالص ندارند.

اعمال یک میدان مغناطیسی خارجی هم باعث هم‌راستا شدن گشتاور مغناطیسی الکترون‌های چرخان و هم باعث یک گشتاور مغناطیسی القا شده ناشی از تغییر در حرکت مداری الکترون‌ها می‌شود.

تعیین تغییر کمی چگالی شار مغناطیسی ناشی از حضور یک ماده مغناطیسی:

$$\vec{M} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\sum_{k=1}^{n\Delta V} m_k}{\Delta V} \quad \left(\frac{A}{m}\right)$$

بردار مغناطیس شدگی (n اتم در واحد حجم):

چگالی حجمی گشتاور دوقطبی مغناطیسی

با ساده‌سازی پتانسیل مغناطیسی برداری A داریم:

چگالی جریان حجمی $J_m = \nabla \times M \quad \left(\frac{A}{m^2}\right)$

منبع $\left\{ \begin{array}{l} \nabla \\ a_n \end{array} \right.$

چگالی جریان سطحی $J_{ms} = M \times a_n \quad \left(\frac{A}{m}\right)$

$$B \leftarrow A \leftarrow J \leftarrow M$$

میدان مغناطیسی خارجی اعمال شد. باعث هم‌راستا شدن جریان‌های گردان اتمی و در نتیجه مغناطیسی شدن ماده می‌شود.

شدت این تاثیر مغناطیسی شدن توسط بردار مغناطیس شدگی M سنجیده می‌شود.

اگر M در داخل ماده یکنواخت باشد، جریان در حلقه‌های اتمی مجاور در جهت‌های متقابل، همدیگر را خنثی کرده و جریان خالص داخل را صفر می‌نمایند.

اگر M ثابت ← کرل آن و چگالی جریان حجمی آن صفر است.

M دارای تغییرات فضایی ← جریان‌های اتمی داخل یکدیگر را کاملاً خنثی نکرده و چگالی جریان حجمی خالص داریم.

چگالی‌های بار مغناطیسی معادل:

با انجام محاسبات ریاضی بر روی پتانسیل مغناطیسی اسکالر V_m در ناحیه بدون جریان داریم:

(جایگزینی دی‌الکتریک قطبی شده با چگالی‌های بار سطحی و حجمی قطبی شدگی معادل) مشابه

در جسم مغناطیسی شده:

فرضی
- چگالی بار سطحی مغناطیس شدگی $\rho_{ms} = M \cdot a_n \quad (A/m)$
- چگالی بار حجمی مغناطیس شدگی $\rho_m = -\nabla \cdot M \quad (A/m^2)$

شدت میدان مغناطیسی و نفوذپذیری نسبی:

اعمال میدان مغناطیسی خارجی باعث هم‌امتداد شدن گشتاورهای دوقطبی داخلی و القای گشتاور مغناطیسی در ماده مغناطیسی می‌شود.

← چگالی شار مغناطیسی در حضور ماده مغناطیسی با مقدار آن در فضای آزاد متفاوت است.

بررسی اثر ماکروسکوپی مغناطیس شدگی با داخل کردن چگالی جریان حجمی J_m:

$$\frac{1}{\mu_0}\nabla \times B = J + J_m = J + \nabla \times M$$

$$\text{یا} \quad \nabla \times \left(\frac{B}{\mu_0} - M\right) = J$$

تعریف کمیت جدید:

$$\text{شدت میدان مغناطیسی} \quad \boxed{H = \frac{B}{\mu_0} - M} \quad (A/m)$$

ترکیب دو رابطه فوق:

$$\boxed{\nabla \times H = J} \quad \left(\frac{A}{m^2}\right) \quad \text{چگالی حجمی جریان آزاد}$$

فرم انتگرالی معادله ↓

معادلات دیفرانسیل اصلی حاکم بر مغناطیس ساکن در هر محیط (μ_0 نفوذپذیری فضای آزاد) α

$$\begin{cases} \nabla \cdot B = 0 \\ \nabla \times H = J \end{cases}$$

استوکس

$$\int_S (\nabla \times H) \cdot ds = \int_S J \cdot ds$$

جهت‌های I و C دست راست

$$\boxed{\oint_C H \cdot dl = I} \quad (A)$$

بیان قانون مداری آمپر

C مسیر بسته در برگیرنده سطح S

I کل جریان آزاد گذرنده از S

آمپر: گردش شدت میدان مغناطیسی به دور هر مسیر بسته معادل جریان آزاد گذرنده از سطح محصور شده توسط این مسیر است.

یادآوری: قانون مداری آمپر در تعیین میدان مغناطیسی ناشی از جریان، هنگامی که تقارن استوانه‌ای وجود دارد سودمند است.

وقتی که مسیری بسته به دور جریان وجود دارد که روی آن میدان مغناطیسی ثابت است.

اگر خواص مغناطیسی محیط خطی و ایزوتروپیک باشد،

$M = \underline{\chi_m} H$ مغناطیس شدگی

Magnetic Susceptibility ضریب حساسیت مغناطیسی (کمیت بدون بعد)

جایگذاری:

$$\underline{B = \mu_0 (1+\chi_m) H = \mu_0 \mu_r H = \mu H} \quad \left(\frac{Wb}{m^2}\right)$$

یا $H = \frac{B}{\mu}$ که در آن: $\mu_r = 1 + \chi_m = \frac{\mu}{\mu_0}$

μ: نفوذپذیری مطلق

μ_0: نفوذپذیری فضای آزاد (H/m)

μ_r: نفوذپذیری نسبی محیط (بدون بعد)

χ_m و μ_r می‌توانند تابعی از مختصات فضایی باشند که با فرض محیط ساده خطی ایزوتروپیک همگن ثابت‌اند

نفوذپذیری بیشتر مواد نزدیک فضای آزاد برابر است

در مواد فرومغناطیس، μ_r می‌تواند بزرگ (۵۰–۵۰۰۰) باشد.

نفوذپذیری علاوه بر اندازه H به سابقه گذشته ماده نیز بستگی دارد.

کمیات مشابه الکتریسیته و مغناطیس ساکن:

الکتریسیته	E	D	ϵ	P	ρ	V	$\cdot$	$\times$
مغناطیس	B	H	$\frac{1}{\mu}$	$-M$	J	A	$\times$	$\cdot$

رفتار مواد مغناطیسی:

تفکیک مواد مغناطیسی بر اساس μ_r :

- دیامغناطیس $\mu_r \lesssim 1$ (χ_m عددی منفی بسیار کوچک)
- پارامغناطیس $\mu_r \gtrsim 1$ (χ_m عددی مثبت بسیار کوچک)
- فرومغناطیس $\mu_r \gg 1$ (χ_m عددی مثبت بزرگ)

دیامغناطیس: (مستقل از درجه حرارت)

طبق قانون لنز در القای الکترومغناطیسی، گشتاور مغناطیسی القا شده همواره با میدان اعمالی مخالفت می‌کند،
از این رو چگالی شار مغناطیسی را کاهش می‌دهد.
تاثیر ماکروسکوپی فرایند معادل تاثیر مغناطیس شدگی منفی است

$\chi_m \sim -10^{-5}$: بیسموت، مس، سرب، جیوه، ژرمانیوم، نقره، طلا و الماس

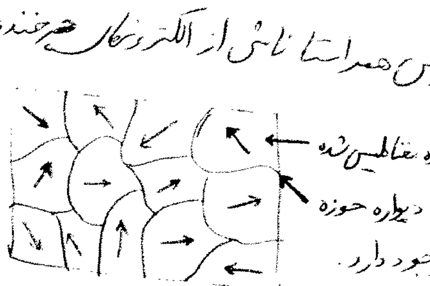
پارامغناطیس: (در درجه حرارت پایین قوی‌تر)

یک میدان مغناطیسی اعمال شده خارجی، علاوه بر ایجاد یک تاثیر دیامغناطیسی بسیار ضعیف، گشتاورهای مغناطیسی مولکولی را در جهت میدان اعمال شده همراستا می‌کند و چگالی شار مغناطیسی را افزایش می‌دهد.
اثر ماکروسکوپی معادل اثر مغناطیس شدگی مثبت است.

$\chi_m \sim 10^{-5}$: آلومینیوم، منیزیم، تیتانیم و تنگستن

فرومغناطیس:

مغناطیس شدگی مواد فرومغناطیس را می‌توان بر اساس حوزه‌های مغناطیسی شده توضیح داد.
این حوزه‌های کوچک با ابعاد قطر چند میکرون تا یک میلیمتر دارای $10^{15} \sim 10^{16}$ اتم می‌باشند
حتی در غیاب یک میدان مغناطیسی اعمالی، به علت برخورداری از دوقطبی‌های مغناطیسی همراستا ناشی از الکترون‌های چرخنده، کاملا مغناطیسی هستند.



ساختار حوزه‌ای چندبلوری

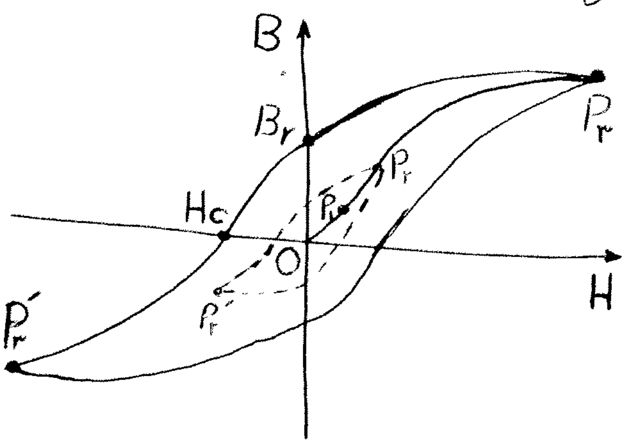
بین حوزه‌های مجاور ناحیه انتقالی به ضخامت حدود ۱۰۰ اتم بنام دیواره حوزه وجود دارد.

در حالت مغناطیس نشدگی گشتاورهای مغناطیسی حوزه‌های مجاور در یک ماده فرومغناطیس جهات گوناگون دارند. به سبب تمامی جهت‌های حوزه‌های مختلف است، هیچ مغناطیس شدگی خاصی خواهد شد.

با اعمال میدان خارجی، دیواره‌های حوزه‌های با گشتاور هم‌راستا با میدان به صورتی حرکت می‌کنند که حجم آن حوزه‌ها نسبت به سایر نواحی افزایش یابد. درنتیجه چگالی شار مغناطیسی افزایش می‌یابد.

برای میدان‌های اعمالی ضعیف، حرکات دیواره حوزه برگشت پذیر است.

برای میدان‌های قوی، حرکات دیواره حوزه برگشت ناپذیر است و گردش حوزه‌ها به سمت جهت میدان اعمال شده نیز ایجاد می‌شود.



اگر میدان اعمال شده در نقطه P_2 به صفر کاهش یابد، رابطه B-H از منحنی P_2P_1O پیروی نمی‌کند بلکه در امتداد منحنی خط‌چین از P_2 به P_2' منتقل می‌شود.

پدیده پس ماند مغناطیسی نسبت به میدان مولد آنرا هیسترزیس می‌نامند.

اگر میدان اعمال شده باز هم قوی‌تر شود $(P_2 \to P_3)$ حرکت دیواره حوزه و گردش حوزه، موجب هم‌راستا شدن کل گشتاورهای مغناطیسی مولکولی با میدان اعمالی می‌شود. (در این مرحله ماده مغناطیسی به حالت اشباع رسیده است)

اگر میدان مغناطیسی اعمالی از P_3 به صفر کاهش یابد، چگالی شار مغناطیسی صفر نشده بلکه مقداری برابر B_r دارد.

این مقدار را چگالی شار مانده یا پس ماند می‌نامند که به حداکثر شدت میدان اعمالی وابسته است.

چگالی شار پس ماند در یک ماده فرومغناطیس، آهنربای دائم را ایجاد می‌کند.

برای صفر کردن چگالی شار مغناطیسی، لازم است شدت میدان مغناطیسی H_c در جهت مخالف اعمال شود.

این H_c مورد نیاز را نیروی وادارنده یا شدت میدان وادارنده می‌نامند که به حداکثر مقدار شدت میدان مغناطیسی اعمالی بستگی دارد.

تابع حداکثر مقدار H
- $B_r\ (\frac{Wb}{m^2})$ چگالی شار پس ماند
- $H_c\ (\frac{A}{m})$ شدت میدان وادارنده

رابطه B-H در ماده فرومغناطیس غیرخطی است.

بنابراین در رابطه $B=\mu H$. نفوذپذیری μ خود تابعی از اندازه H می‌باشد.

نفوذپذیری μ به سابقه مغناطیس شدگی ماده بستگی دارد. (تعیین نقطه کار روی شاخه ذاتی حلقه هیسترزیس برای تعیین دقیق μ)

حلقه هیسترزیس {
- باریک و بلند: نرم برای مولد، موتور و ترانسفورماتورها (مغناطیس شدگی بالا توجه به اثر میدان اعمالی کوچک)
- پهن، سخت: آهنربای دائمی (مقاومت بالا در مقابل مغناطیس‌زدایی و شدت میدان وادارنده H_c بزرگ)

H {
- $10^5 \frac{A}{m}$ مواد فرومغناطیس سخت
- $50 \frac{A}{m}$ مواد فرومغناطیس نرم

اگر درجه حرارت ماده فرومغناطیس به اندازه‌ای بالا رود که انرژی حرارتی از انرژی ترجیح بیشتر شود، حوزه‌های مغناطیس شده نامرتب می‌شوند.

بالاتر از این دمای بحرانی که دمای کوری نامیده می‌شود، ماده فرومغناطیس مانند یک جسم پارامغناطیس رفتار می‌کند. (آهن: $770^\circ C$)

ضد فرومغناطیس: { کروم، منگنز

چرخش الکترونی از اتمی به اتم دیگر تغییر جهت داده و گشتاور مغناطیسی خالص نتیجه شده صفر است.

با افزایش دمای ماده ضدفرومغناطیس تا بالاتر از دمای کوری، جهات چرخش تصادفی شده و ماده پارامغناطیس می‌شود.

فری مغناطیس:

رفتاری بین فرومغناطیس و ضدفرومغناطیس

جهت گشتاورهای مغناطیسی در ساختار نظم یافته چرخش بطور متناوب تغییر کرده و اندازه‌ها نامساوی هستند.

گشتاور مغناطیسی خالص مخالف صفر

فریت:

زیرگروهی از مواد فری‌مغناطیس، غیرایزوتروپیک (μ تانسوری)، کاربرد مایکروویو

شرایط مرزی میدان‌های مغناطیسی ساکن :

شرایط مرزی بردارهای B و H در فصل مشترک محیط :

با اعمال معادلات اصلی : $\begin{cases} \nabla \cdot B = 0 \\ \nabla \times H = J \end{cases}$ در یک $\begin{cases} \text{جعبه کوچک} \\ \text{مسیر بسته کوچک} \end{cases}$ که فصل مشترک را در بر می‌گیرد شرایط مرزی را بدست آوریم.

از طبیعت بدون دیورژانس میدان B نتیجه می‌گیریم :

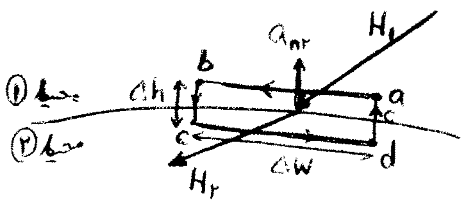
مولفهٔ عمودی B در عبور از فصل مشترک پیوسته است :

$$B_{1n} = B_{2n}$$

در محیط خطی $B_1 = \mu_1 H_1$ ، $B_2 = \mu_2 H_2$ داریم :

$$\mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n}$$

شرط مرزی مولفه‌های مماسی میدان مغناطیسی ساکن از شکل انتگرالی معادله کرل H بدست می‌آید . $\oint_C H \cdot dl = I$



با انتخاب مسیر بسته $abcda$ بعنوان مسیر C :

و بکارگیری معادله $\oint_C H \cdot dl = I$ با فرض $bc = da = \Delta h \to 0$:

$$\oint_{abcda} H \cdot dl = H_1 \cdot \Delta w + H_2 \cdot (-\Delta w) = J_{sn} \Delta w$$

$$H_{1t} - H_{2t} = J_{sn}$$

یا

چگالی جریان سطحی روی فصل مشترک عمود بر مسیر C

(فرم جامع) شرط مرزی مولفه‌های مماسی H (اندازه و جهت) :

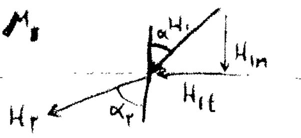
$$a_{n2} \times (H_1 - H_2) = J_s$$

مولفه مماسی میدان H در عبور از فصل مشترکی که یک جریان سطحی آزاد در آن وجود دارد ، ناپیوسته است .

اگر ضریب هدایت هر دو محیط معین باشد بر روی فصل مشترک جریان سطحی آزاد نداریم.

جریان سطحی زمانی وجود دارد که فصل مشترک با یک مادهٔ کاملاً ایده‌آل یا ابررسانا مسدود شده باشد

$\mu_2 > \mu_1$



مثال: دو محیط مغناطیسی با نفوذپذیری μ_1 و μ_2 دارای مرز مشترکی هستند. شدت میدان مغناطیسی در محیط (1)، دارای اندازه H_1 بوده با امتداد عمود زاویه α_1 می‌سازد. اندازه و جهت میدان مغناطیسی را در محیط (2) تعیین کنید

هدف یافتن H_2 و α_2 (مولفه‌های مماسی و نرمال)

(1) پیوستگی مولفه عمودی میدان B:

$$\mu_2 H_2 \cos\alpha_2 = \mu_1 H_1 \cos\alpha_1$$

(2) چون هیچکدام از محیط‌ها هادی کامل نیست، مولفه مماسی میدان H پیوسته است:

$$H_2 \sin\alpha_2 = H_1 \sin\alpha_1$$

با تقسیم دو رابطه فوق:

$$\boxed{\frac{tg\,\alpha_2}{tg\,\alpha_1} = \frac{\mu_2}{\mu_1}} \rightarrow \boxed{\alpha_2 = tg^{-1}\left(\frac{\mu_2}{\mu_1} tg\,\alpha_1\right)}$$

که خاصیت شکست (Refraction) میدان مغناطیسی را توصیف می‌کند.

اندازه H_2:

$$H_2 = \sqrt{H_{2t}^2 + H_{2n}^2} = \sqrt{(H_2 \sin\alpha_2)^2 + (H_2 \cos\alpha_2)^2}$$

و در نتیجه:

$$\boxed{H_2 = H_1 \sqrt{\sin^2\alpha_1 + \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} \cos\alpha_1\right)^2}}$$

مدارهای مغناطیسی:

همانطور که در مدار الکتریکی ولتاژهای دو سر و جریانهای گذرنده از شاخه‌ها و عناصر مختلف یک شبکه الکتریکی، تحریک شده توسط منابع ولتاژ و یا جریان را بدست می‌آوریم.

در مدارهای مغناطیسی نیز بطور مشابه عمل می‌کنیم. (ترانسفورماتور، مولد، موتور، رله و ...)

در یک مدار مغناطیسی شارهای مغناطیسی و شدت میدانهای مغناطیسی در بخشهای مختلف یک مدار، ناشی از سیم پیچهای حامل جریان حول هسته‌های فرومغناطیس تعیین می‌شود.

تحلیل مدارهای مغناطیسی براساس دو معادله اساسی مغناطیس ساکن $\nabla\cdot B=0$ و $\nabla\times H=J$ می‌باشد

که معادله $\nabla\times H=J$ به قانون مداری آمپر تبدیل می‌شود

اگر مسیر بسته C شامل N دور سیم پیچ حامل جریان I، که مدار مغناطیسی را تحریک کند، داریم:

$$\oint_C H\cdot dl = NI = \mathcal{V}_m$$

$\mathcal{V}_m$ نقش مشابه نیروی محرکه الکتریکی emf در یک مدار الکتریکی را بازی می‌کند و نیروی محرکه مغناطیسی mmf نامیده می‌شود.

واحد SI این نیرو آمپر است که برحسب آمپر دور A.t نیز سنجیده می‌شود (برحسب دور نیست)

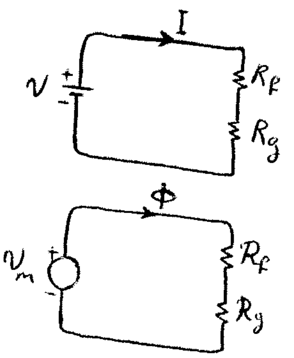
یکی از مباحث مورد توجه بکارگیری سیم پیچ بر روی هسته‌های فرومغناطیسی است که از مواد فرومغناطیس استفاده می‌شود.

همچنین مسئله وجود فاصله هوایی در سیم پیچ نیز از نکات قابل تامل است

شدت میدان مغناطیسی در شکاف هوایی بسیار قوی‌تر از هسته فرومغناطیسی است $\frac{H_g}{H_f}=\frac{\mu}{\mu_0}$

بررسی: شار نشتی، اثرات لبه

کمیات مشابه مدار الکتریکی و مغناطیسی:



مدار الکتریکی	مدار مغناطیسی
emf v	mmf $\mathcal{V}_m$
I جریان الکتریکی	Φ شار مغناطیسی
R مقاومت	$\mathcal{R}$ رلوکتانس (H^{-1})
σ رسانایی	μ نفوذپذیری

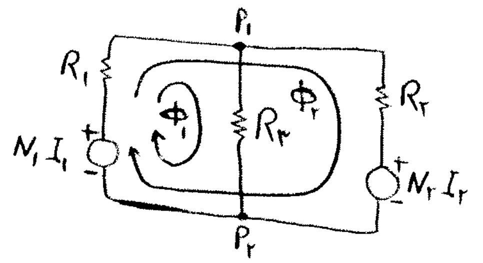
معادلات اساسی مدارهای مغناطیسی (kcl و kvl)

$$\begin{cases} \sum_j N_j I_j = \sum_k R_k \Phi_k \\ \sum_j \Phi_j = 0 \end{cases}$$

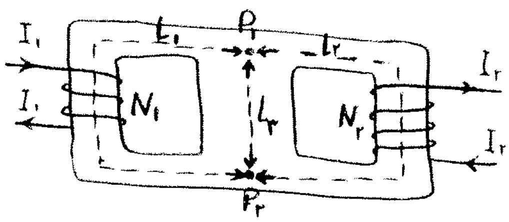
مشابه kvl در هر مسیر بسته

مشابه kcl جمع جبری جریانهای هر گره

مدل مدار مغناطیسی:



مدار مغناطیسی



هسته مغناطیسی با سیم پیچهای حامل جریان

اشکالات مساوی:

این اشکالها در القاگرهایی که از آنها جریانهای مستقیم بزرگی می‌گذرد عموماً ایجاد می‌شود.
در هسته شکافهای دار اجتناب ناپذیرند.

مدار مغناطیسی:

بررسی تشابه مدار الکتریکی و مغناطیسی:

پتانسیل: (نیروی محرکه مغناطیسی)

$$E = -\nabla V \ (emf) \longrightarrow H = -\nabla V_m \ \overset{\text{آمپر دور}}{(mmf)}$$

اختلاف پتانسیل:

$$V_{AB} = \int_A^B E \cdot dl \longrightarrow V_{m_{AB}} = \int_A^B H \cdot dl$$

چگالی شار:

چگالی جریان: (در شار مقطع/طول اسم) $J = \sigma E$ ➡ چگالی شار مغناطیسی مشابه چگالی جریان $B = \mu H$

شار کل:

جریان کل: $I = \int_S J \, ds$ $\Rightarrow$ شار مغناطیسی کلی که از سطح مدار مغناطیسی می‌گذرد $\Phi = \int_S B \cdot ds$

رلوکتانس:

$$R = \frac{V}{I} \Rightarrow V = RI \Longrightarrow R = \frac{\overset{\text{آمپر دور}}{V_m}}{\underset{\text{وبر}}{\Phi}} \Rightarrow V_m = R\Phi$$

$$R = \frac{\overset{\text{طول}}{d}}{\underset{\text{رسانش}}{\sigma}\underset{\text{سطح مقطع}}{S}} \Longrightarrow R = \frac{d}{\mu S}$$

μ: نفوذ مغناطیسی مثلاً (هوا)

منبع ولتاژ:

$$\underset{\text{مسیر بسته}}{\oint} E \, dl = 0 \Longrightarrow \oint H \, dl = I_{\text{کل}} = \overset{\text{دور سیم پیچ}}{N} I$$

در مدار الکتریکی منبع ولتاژ بخشی از مسیر بسته است.

ولی در مدار مغناطیسی سیم‌پیچ حامل جریان دور مسیر پیچیده می‌شود یعنی جریان از داخل مسیر نمی‌گذرد.

در مدار مغناطیسی می‌توان جورهایی را که به آن نیروی محرکه مغناطیسی اعمال شده، مشخص نمود.

از این نظر مدار مغناطیسی شبیه مداری است که در آن ولتاژ توسط مدار دیگری القا می‌شود.

مثال:

روی یک چنبره هوایی با سطح مقطع $6\,cm^2$ و شعاع متوسط $15\,cm$، ۵۰۰ دور سیم پیچیده شده و از سیم‌ها جریان $4A$ می‌گذرد. شدت میدان مغناطیسی را بدست آورید.

* میدان مغناطیسی در داخل چنبره محبوس است و اگر مسیر بسته را در امتداد شعاع متوسط در نظر بگیریم، این مسیر ۲۰۰۰ $A.t$ را در بر می‌گیرد.

$\rightarrow \quad V_m = 500 \times 4 = 2000\ At$

میدان داخل چنبره غیر یکنواخت است ولی آنرا یکنواخت فرض می‌کنیم،

$$R = \frac{d}{\mu S} = \frac{2\pi(0.15)}{4\pi\times10^{-7}\times6\times10^{-4}} = 1.25\times10^{9}\ \frac{A.t}{Wb}$$

$$\Phi = \frac{V_m}{R} = \frac{2000}{1.25\times10^{9}} = 1.6\times10^{-6}\ Wb$$

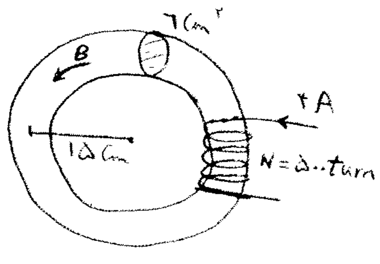
$$B = \frac{\Phi}{S} = \frac{1.6\times10^{-6}}{6\times10^{-4}} = 2.67\times10^{-3}\ T$$

این مقدار است به مقداری که با توجه به توزیع دقیق شار در سطح مقطع چنبره بدست می‌آید تنها ٪۲۵ خطا دارد.

$$H = \frac{B}{\mu} = \frac{2.67\times10^{-3}}{4\pi\times10^{-7}} = 2120\ \frac{A.t}{m}$$

روش قانون آمپر:
(با توجه به تقارن)

$$\oint H\, dl = I \ : \quad H_\varphi 2\pi r = NI \rightarrow H_\varphi = \frac{NI}{2\pi r} = \frac{500\times4}{2\times3.14\times0.15} = 2120\ \frac{A}{m}$$



این مدار تنها از یک منبع mmf ساخته شده است.

مدار الکتریکی متناظر: شامل یک منبع و یک مقاومت

مثال: در چنبره‌ای با هسته فولادی، یک شکاف هوایی به عرض 2mm داریم. (مشابه)

یک سیم پیچ 500 دوری دور چنبره وجود دارد. جریان لازم برای ایجاد 1 تسلا چگالی شار در تمام هسته را بدست آورید؟

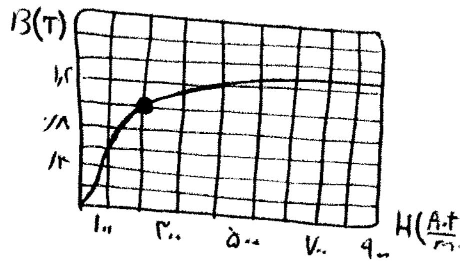
مدار مغناطیسی (معادل) شامل یک منبع ولتاژ و دو مقاومت (یکی غیرخطی است)

چون جریان معلوم است، می‌توانیم ولتاژ روی عناصر و سپس mmf کل را بیابیم.

$$R_{\text{هوا}} = \frac{d_{\text{هوا}}}{\mu S} = \frac{2\times10^{-3}}{4\pi\times10^{-7}\times 6\times10^{-4}} = 2.65\times10^{6}\ \frac{A.t}{Wb}$$ در شکاف هوایی

شار کل $\Phi = BS = 1\,(6\times10^{-4}) = 6\times10^{-4}\ Wb$ (در فولاد و هوا یکسان)

شکاف mmf: $V_{m_{\text{هوا}}} \overset{R\Phi}{=} (6\times10^{-4})(2.65\times10^{6}) = 1590\ A.t$



منحنی مغناطش ورقه فولاد سیلیس دار

* شکل: برای ایجاد چگالی شار 1 تسلا در فولاد، شدت میدان مغناطیسی باید $200\ \frac{A.t}{m}$ باشد.

$$H_{\text{فولاد}} = 200\ A.t$$

$$V_{m_{\text{فولاد}}} = H_{\text{فولاد}}\, d_{\text{فولاد}} = 200 \times 0.3\pi = 188\ A.t$$

(mmf کل) $V_m = 1590 + 188 = 1778\ A.t$

بنابراین

$$V_m = NI \Rightarrow I = \frac{1778}{500} \doteq 3.55\cancel{6}\ A$$ جریان سیم پیچ

تقریب‌های بکار رفته (عوامل خطا)

1) یکنواخت نبودن سطح مقطع

2) طول مسیر تمام خطوط شار یکسان نیست ⇐ مسیر متوسط

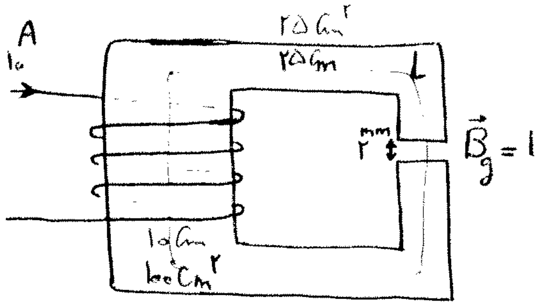
3) اثر لبه در فاصله هوایی ⇐ سطح مقطع موثر شکاف

4) شار نشتی بین سیم‌ها : یعنی خطوط شار مسیری خارج از هسته را طی می‌کنند

از آنجا که $R_{\text{فرومغناطیس}} \ll R_{\text{هوا}}$، لذا تقریب نه چندان خوب نیز برای فولاد قابل قبول است.

B متغیر — Φ شار ثابت

مثال: یک مدار مغناطیسی با فاصله هوایی مطابق شکل داریم. تعداد دور سیم پیچ چقدر باشد تا در فاصله هوایی، دانسیته شار مغناطیسی ۱ وبر بر متر مربع ایجاد شود؟ جریان I عبوری از سیم پیچ ۱۰ آمپر است. جنس هسته استیل سیلیکان دار است.



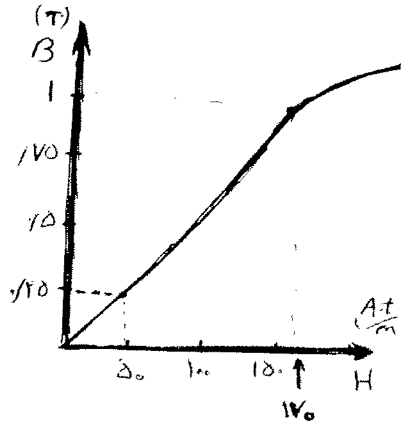
$$V_m = F = NI = V_{m_{\text{هوا}}} + V_{m_{\text{استیل}}}$$

هوا $V_m = R_a \, \Phi_{air}$

$$\Phi_a = \int B \cdot ds = B \cdot A = 1 \times 25 \times 10^{-4} = 25 \times 10^{-4}\ Wb$$

$$R_a = \frac{1}{\mu_0}\,\frac{d}{A} = \frac{1}{4\pi \times 10^{-7}}\;\frac{2 \times 10^{-3}}{25 \times 10^{-4}} = 6.36 \times 10^{5}$$

$$V_{m_a} = 25 \times 10^{-4} \times 6.36 \times 10^{5} = 1590\ A.t \quad \text{آمپردور}$$



استیل $V_m = V_{m_1} + V_{m_2}$

$$V_{m_1} = \int H \cdot dl = H \cdot L = H(25+25) \times 10^{-2} \xrightarrow[\text{منحنی } B\text{-}H]{B = 1\ \frac{Wb}{m^2},\ H = 170} 170 \times 50 \times 10^{-2} = 85\ At$$

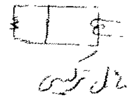
$$V_{m_2} = \int H \cdot dl = H \cdot L = H \times 10 \times 10^{-2} \xrightarrow[\text{منحنی } B\text{-}H]{H = 50} 50 \times 10 \times 10^{-2} = 5\ A.t$$

$$\Phi = \int B\, ds = BA \Rightarrow \underset{\text{ثابت}}{25 \times 10^{-4}} = B \times 100 \times 10^{-4} \Rightarrow \boxed{B = 0.25\ \frac{Wb}{m}}$$

$$V_m = 85 + 5 = 90\ A.t$$

$$V_m = V_{m_{\text{هوا}}} + V_{m_{\text{استیل}}} = 90 + 1590 = 1680\ A.t$$

$$V_m = NI \Rightarrow 1680 = N \times 10 \Rightarrow \boxed{N = 168\ turn}$$



مدار ترکیبی

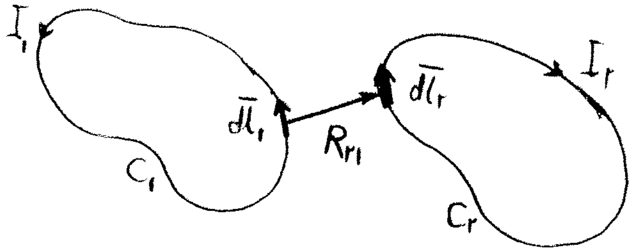
نیروی مغناطیسی بین دو مدار جریان

در درس میدانهای الکتریکی ساکن، بیان قانون تجربی کولمب به محاسبه نیروی بین دو بار الکتریکی نقطه‌ای منجر شد.

در میدان مغناطیسی نیز به صورت مشابه از قانون تجربی نیروی آمپر استفاده می‌کنیم.

از این قانون برای بیان نیروهای مغناطیسی که دو مدار حامل جریان بر یکدیگر وارد می‌کنند بکار می‌رود.

بر اساس مطالعات تجربی آمپر، اگر دو مدار بسته C_1 و C_2 حامل جریانهای I_1 و I_2 باشند، نیرویی که جریان I_1 بر مدار C_2 اعمال می‌کند عبارتست از:



$$\bar F_{21} = \oint_{C_1}\oint_{C_2} k \frac{I_2 d\bar l_2 \times (I_1 d\bar l_1 \times \hat a_{R_{21}})}{R_{21}^2}$$

$k = \frac{\mu_0}{4\pi}$ ضریب ثابت

$d\bar l_1$ و $d\bar l_2$ به ترتیب بردارهای عنصر طول در مدارهای C_1 و C_2

R_{21} فاصله بین دو عنصر طول ، $\hat a_{R_{21}}$ بردار واحد در جهت $d\bar l_1$ به $d\bar l_2$

$$d\bar F_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_2 d\bar l_2 \times (I_1 d\bar l_1 \times \hat a_{R_{21}})}{R_{21}^2}$$

F_{21} نیرویی که عنصر جریان $I_1 d\bar l_1$ بر عنصر جریان $I_2 d\bar l_2$ وارد می‌کند

اندازه نیرو متناسب است با:
- حاصلضرب جریانها
- عکس مجذور فاصله بین دو عنصر جریان

ترتیب ضرب خارجی مهم است و شرکت‌پذیری نداریم.

با تعویض $I_1 d\bar l_1$ با $I_2 d\bar l_2$ و $\hat a_{R_{21}}$ با $\hat a_{R_{12}}$ نیروی اعمال شده بر $I_1 d\bar l_1$ توسط $I_2 d\bar l_2$ عبارتست از:

$$d\bar F_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_1 d\bar l_1 \times (I_2 d\bar l_2 \times \hat a_{R_{12}})}{R_{12}^2}$$

$R_{12} = R_{21}$

الزاماً $d\bar F_{12}$ با $-d\bar F_{21}$ مساوی نیست.

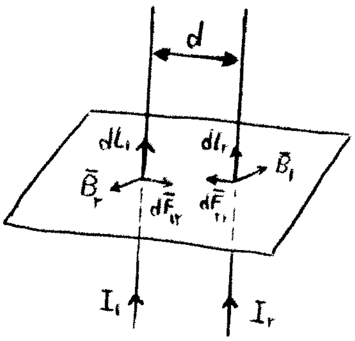
تناقض با قانون سوم نیوتن (برابری نیروهای عمل و عکس‌العمل) ندارد

مهم برابری اندازه‌های نیروهای اعمال شده به مدارهای کامل C_1 و C_2 است.

نیروی بین دو سیم حامل جریان :

میدان مغناطیسی ناشی از سیم بی‌نهایت طول مستقیم و حامل جریان I ، مشابه به میدان الکتریکی حاصل از یک خط بار بی‌نهایت با چگالی توزیع یکنواخت :

$$E = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon r}\hat{a}_r \quad , \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{a}_\varphi$$



نیروی وارد آمده بر عنصر طول $\bar{dl}_2$:

$$d\bar{F}_{21} = I_2\, d\bar{l}_2 \times \bar{B}_1$$

چون زاویه بین $\bar{dl}_2$ و $\bar{B}_1$ برابر ۹۰ درجه است داریم:

$$dF_{21} = I_2\, dl_2\, B_1 = I_2\, dl_2\, \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}$$

لذا مقدار نیرو در واحد طول برابر است با:

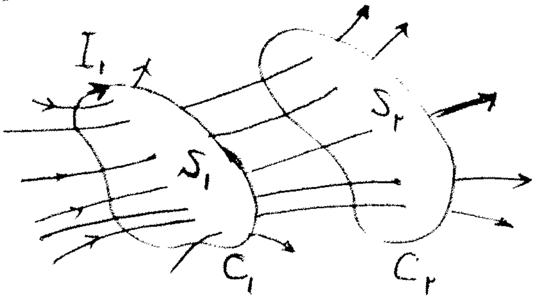
$$\frac{dF_{21}}{dl_2} = \mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi d}$$

به همین ترتیب می‌توان نشان داد که

$$\frac{dF_{12}}{dl_1} = \mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi d}$$

دو جریان $\begin{cases} \text{هم‌جهت : جاذبه} \\ \text{مخالف : دافعه} \end{cases}$

۸ → ۴



۶-۱۱ اندوکتانس‌ها و سلف‌ها

دو حلقه C_1 ، C_2 با سطوح S_1 و S_2

جریان I_1 در C_1 ، میدان مغناطیسی B_1 را تولید می‌کند

بخشی از شار ناشی از B_1 با حلقه C_2 پیوند داشته و از سطح S_2 (سطح محصور شده توسط C_2) عبور می‌کند

شار متقابل $\Phi_{12} = \int_{S_2} B_1 \cdot dS_2 \quad (Wb)$

اگر I_1 متغیر با زمان ← Φ_{12} متغیر با زمان $\xleftarrow[\text{در القای الکترومغناطیسی}]{\text{قانون فاراده}}$ تولید نیروی محرکه الکتریکی یا ولتاژ القایی در حلقه C_2

اگر I_1 جریان dc داشته باشد نیز Φ_{12} وجود دارد.

از قانون بیوساوار: $B_1 \propto I_1 \Leftarrow \Phi_{12} \propto I_1 \Leftarrow \Phi_{12} = L_{12} I_1$

L_{12} ↓ اندوکتانس متقابل بین حلقه‌های C_1 و C_2 (H) هانری

C_2 دارای N_2 حلقه: $\Lambda_{12} = N_2 \Phi_{12}$ پیوند شار ناشی از Φ_{12}

تعمیم

$$\Lambda_{12} = L_{12} I_1 \longrightarrow L_{12} = \frac{\Lambda_{12}}{I_1} \quad (H)$$

اندوکتانس متقابل بین دو مدار: پیوند شار مغناطیسی یک مدار بر واحد جریان مدار دیگر.

تعمیم رابطه برای محیط‌های غیرخطی: $L_{12} = \frac{d\Lambda_{12}}{dI_1}$

بخشی از شار مغناطیسی تولیدی توسط I_1 فقط با خود C_1 پیوند دارد.

کل پیوند شار با C_1 ناشی از I_1: $\Lambda_{11} = N_1 \Phi_{11} > N_1 \Phi_{12}$

Λ_{12}: شار کل گذرنده از مدار C_2 ناشی از جریان I_1

اندوکتانس خودی حلقه C_1: پیوندشار مغناطیسی در واحد جریان خود حلقه (در یک محیط خطی)

$$L_{11} = \frac{\Psi_{11}}{I_1} \xrightarrow{\text{کلی}} L_{11} = \frac{d\Psi_{11}}{dI_1}$$

اندوکتانس خودی حلقه به شکل هندسی و ترتیب فیزیکی هادی تشکیل دهنده آن حلقه و به نفوذپذیری محیط بستگی دارد.

این اندوکتانس به جریان حلقه وابسته نیست.

سلف: یک هادی که به شکلی مناسب برای فراهم کردن مقدار معین اندوکتانس خودی ایجاد شده است.

خازن: ذخیره انرژی الکتریکی
سلف: ذخیره انرژی مغناطیسی

* مراحل تعیین اندوکتانس خودی سلف:

۱) انتخاب دستگاه مختصات مناسب هندسه مسئله

۲) فرض جریان I در سیم هادی — $\oint_c B\cdot dl = \mu_0 I$

۳) محاسبه B از روی I:
- تقارن ← قانون آمپر
- وگرنه ← قانون بیوساوار — $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_{C'} \frac{dl' \times a_R}{R^2}$

۴) محاسبه پیوندشار با یک دور

$\Phi = \int_s B\cdot ds$ — S سطحی که بر روی آن B وجود داشته و با جریان مفروض پیوند دارد.

۵) محاسبه پیوندشار کل $\Psi = N\Phi$

۶) محاسبه اندوکتانس خودی $L = \frac{\Psi}{I}$

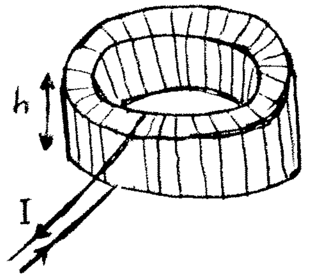
* مراحل تعیین اندوکتانس متقابل:

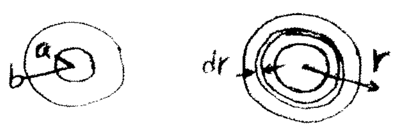
پس از انتخاب دستگاه: فرض I_1 ← محاسبه B_1 ← $\Phi_{12} = \int_{S_2} B\cdot ds_2$

$\Psi_{12} = N_2 \Phi_{12}$ ← $L_{12} = \frac{\Psi_{12}}{I_1}$

مثال ۶-۱۴: N دور سیم بطور فشرده روی قابی چنبره‌ای با مقطع عرضی مستطیلی به نحو زیر پیچیده شده است. ص ۳۲۴ چنگ

نفوذپذیری محیط μ_0 است. اندوکتانس خودی سیم پیچ؟





دستگاه مختصات استوانه‌ای مناسب است چراکه حول محور خود متقارن است.

با فرض جریان I در سیم هادی و بکارگیری رابطه در مسیر دایره‌ای به شعاع $a<r<b$ داریم:

$$\oint_c B\cdot dl = \mu_0 I$$

$$\begin{cases} B = a_\varphi B_\varphi \\ dl = a_\varphi r\, d\varphi \end{cases}$$

$$\oint_c B\cdot dl = \int_0^{2\pi} B_\varphi r\, d\varphi = 2\pi r B_\varphi$$

r , B_φ در روی مسیر دایره‌ای C ثابتند.

از آنجا که مسیر، جریان کل NI را احاطه کرده داریم:

$$2\pi r B_\varphi = \mu_0 N I \;\downarrow\; B_\varphi = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}$$

$$\Phi = \int_s B\cdot ds$$

$$= \int_s \left(a_\varphi \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}\right)\cdot\left(a_\varphi h\, dr\right)$$

$$= \frac{\mu_0 N I h}{2\pi}\int_a^b \frac{dr}{r}$$

$$= \frac{\mu_0 N I h}{2\pi} \ln\frac{b}{a}$$

پیوند شار λ برابر است با $N\Phi$:

$$\lambda = \frac{\mu_0 N^2 I h}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$$

$$\boxed{L = \frac{\lambda}{I} = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi}\ln\frac{b}{a}}$$ اندوکتانس خودی

اندوکتانس خودی تابع جریان I نیست.

* شرط پیچیدن فشرده سیم پیچ: شار پیوندی حول هر دور سیم حداقل شود.

مثال ۶-۱۵ اندوکتانس در واحد طول سلونوئید نامحدود (طویل)، با هسته هوایی و دارای n دور در واحد طول را محاسبه کنید.
ص ۲۲۵ چنگ

مثال ۶-۳: چگالی شار مغناطیسی داخل سلونوئید بی‌نهایت طویل: $B = \mu_0 n I$ (در داخل سلونوئید ثابت است)

$$\Phi = BS = \mu_0 n S I$$

S: سطح مقطع عرضی سلونوئید

پیوند شار در واحد طول $\Lambda' = n\Phi = \mu_0 n^2 S I$

اندوکتانس در واحد طول $L' = \mu_0 n^2 S \quad (\frac{H}{m})$

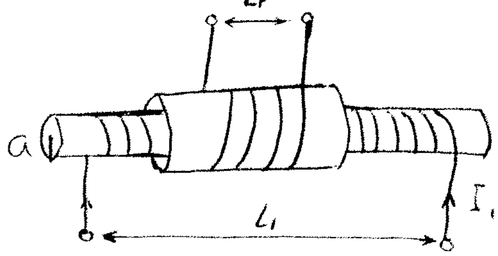
رابطه تقریبی شرط: (طول سلونوئید ≫ سطح مقطع عرضی سلونوئید)

اندوکتانس کل یک سلونوئید محدود قدری کمتر از L' است.

نکته: در مثال‌های فوق اندوکتانس [illegible]

$$L \propto n^2 l$$

مثال ۶-۱۸ دو سیم پیچ N_1 و N_2 دور بطور هم محور روی هسته استوانه‌ای مستقیمی به شعاع a و نفوذپذیری μ پیچیده شده است. طول دو سیم پیچ به ترتیب L_1 و L_2 است. اندوکتانس متقابل دو سیم پیچ؟



شعاع ثابت a ✓

فرض:

جریان I_1 در سیم پیچ داخلی

از رابطه $\Phi = BS = \mu_0 n S I$ درمی‌یابیم که

شار Φ_{12} در هسته سلونوئید که با سیم پیچ بیرونی پیوند است برابر است با:

$$\Phi_{12} = \mu \left(\frac{N_1}{L_1}\right)(\pi a^2)\, I_1$$

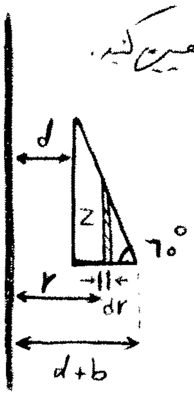
سیم پیچ بیرونی دارای N_2 دور است:

$$\Psi_{12} = N_2 \Phi_{12} = \frac{\mu}{L_1} N_1 N_2 \pi a^2 I_1$$

بنابراین:

$$\boxed{L_{12} = \frac{\Psi_{12}}{I_1} = \frac{\mu}{L_1} N_1 N_2 \pi a^2} \quad (H)$$ اندوکتانس متقابل

مثال ۱۹-۶ اندوکتانس متقابل بین یک حلقه هادی مثلثی و یک سیم مستقیم بسیار طویل شکل زیر را تعیین کنید.
ص ۳۳۱



حلقه مثلثی بعنوان مدار ①

سیم طویل بعنوان مدار ②

با فرض جریان I_1 در حلقه مثلثی، یافتن چگالی شار مغناطیسی B_1 در تمام نقاط دشوار است.

$L_{12} = \dfrac{\Lambda_{12}}{I_1}$ تعیین اندوکتانس متقابل مشکل می‌باشد.

اما بکارگیری قانون آمپر ساده است.

می‌توان B_2 را به سادگی از جریان I_2 در سیم مستقیم طویل محاسبه نمود:

$$B_2 = a_\phi \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r}$$

پیوند شار: $\Lambda_{21} = \Phi_{21}$

$$\Lambda_{21} = \int_{S_1} B_2 \cdot dS_1$$

$$dS_1 = a_\phi \, z \, dr$$

$$z = -[r-(d+b)] \, tg\, 60^\circ$$

$$= -\sqrt{3}\,[r-(d+b)]$$

جایگذاری

$$\Lambda_{21} = -\frac{\sqrt{3}\,\mu_0 I_2}{2\pi}\int_d^{d+b} \frac{1}{r}[r-(d+b)]\,dr$$

$$= \frac{\sqrt{3}\,\mu_0 I_2}{2\pi}\left[(d+b)\ln\left(1+\frac{b}{d}\right)-b\right]$$

$$L_{21} = \frac{\Lambda_{21}}{I_2} = \frac{\sqrt{3}\,\mu_0}{2\pi}\left[(d+b)\ln\left(1+\frac{b}{d}\right)-b\right] \quad (H)$$

۱۲-۶ انرژی مغناطیسی

یادآوری: اندوکتانس خودی و متقابل، به شکل هندسی و ترتیب فیزیکی مدارهای تشکیل دهنده مدار بستگی دارند و در یک محیط خطی مستقل از جریان است.

برای ایجاد آرایشی از بارها، به انجام کار نیاز داریم که این کار بصورت انرژی الکتریکی ذخیره می‌شود.
همچنین هنگام ارسال جریان در حلقه‌های مادی نیز لازم است کاری انجام شود که این کار بصورت انرژی مغناطیسی ذخیره می‌شود.

کار لازم برای افزایش جریان i_1 از مقدار اولیه صفر به I_1 در حلقه بسته منفردی با اندوکتانس خودی L_1:

$$W_1 = \int v_1 \, i_1 \, dt$$

ولتاژ دو سر اندوکتانس $V_1 = L_1 \dfrac{di_1}{dt}$

$$= L_1 \int_0^{I_1} i_1 \, di_1 = \frac{1}{2} L_1 I_1^2$$

* شرایط شبه ساکن: تغییرات زمانی جریان آهسته است؛ ابعاد مدار در مقایسه با λ بسیار کوچک

ذخیره بصورت انرژی مغناطیسی $W_1 = \dfrac{1}{2} I_1 \Phi_1 \; J$

در محیط خطی: $L_1 = \dfrac{\Phi_1}{I_1}$

$$W_{21} = \int V_{21} I_1 \, dt = L_{21} I_1 \int_0^{I_2} di_2 = L_{21} I_1 I_2$$

تعمیم: انرژی ذخیره شده در سیستم شامل N حلقه حامل جریانهای $I_1, I_2, \ldots, I_n$:

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} L_{jk} \, I_j \, I_k \; J$$

L_{ij}: $i = j$ اندوکتانس خودی؛ $i \neq j$ اندوکتانس متقابل

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} I_k \Phi_k \; J$$

در محیط خطی: $\Phi_k = \sum_{j=1}^{N} L_{jk} I_j$

انرژی مغناطیسی برحسب کمیتهای میدان:

$$W_m = \frac{1}{2} \int_{v'} A \cdot J \, dv'$$

$$W_m = \frac{1}{2} \int_{v'} H \cdot B \, dv' = \frac{1}{2} \int_{v'} \frac{B^2}{\mu} dv' = \frac{1}{2} \int_{v'} \mu H^2 \, dv' \; J$$

چگالی انرژی مغناطیسی:

$$w_m\left(\frac{J}{m^3}\right)$$

$$W_m = \int_{v} w_m \, dv$$

$$\boxed{w_m = \frac{1}{2} B\cdot H = \frac{B^2}{2\mu} = \frac{1}{2}\mu H^2} \quad \frac{J}{m^3}$$

اغلب تعیین اندوکتانس خودی از رابطه انرژی مغناطیسی ذخیره شده که برحسب B یا H محاسبه می‌شود، آسانتر از استفاده از پیوند شار است:

$$\boxed{L = \frac{2W_m}{I^2}} \quad H$$

۱۳-۶ نیروی مغناطیسی:

بر مدار حامل جریان I در میدان مغناطیسی B، نیرویی به طرز زیر وارد می‌شود:

$$\boxed{F_m = I\int dI \times B}$$

مثال: به سیم حامل جریان I، به طول L در میدان ثابت B (بردار یکه در جهت جریان سیم a_L):

نیروی F وارد می‌شود:

$$\boxed{F = I L a_l \times B}$$

گشتاور مغناطیسی:

گشتاور کل موثر وارد بر یک حلقه جریان:

$$T = m \times \vec{B}$$

گشتاور دو قطبی مغناطیسی $m = a_n I(\pi b^2) = \underbrace{\hat{a}_n}_{\text{بردار واحد}} I S$

نیرو و گشتاور برحسب انرژی مغناطیسی ذخیره شده :

$$\boxed{F_\Phi = -\nabla W_m} \quad (N)$$

مولفه‌های نیرو
$$\begin{cases} (F_\Phi)_x = -\dfrac{\partial W_m}{\partial x} \\ (F_\Phi)_y = -\dfrac{\partial W_m}{\partial y} \\ (F_\Phi)_z = -\dfrac{\partial W_m}{\partial z} \end{cases}$$

اگر مدار محدود به چرخش حول یک محور (مثلا Z) باشد، کار مکانیکی انجام شده توسط سیستم $(T_\Phi)_z d\Phi$ است.

$$\boxed{(T_\Phi)_z = -\frac{\partial W_m}{\partial \Phi}} \quad (N.m)$$

مولفه Z گشتاور موثر بر مدار، تحت شرایط پیوند شار ثابت است.

در سیستمی از مدارات با جریان ثابت:

$$F_I = +\nabla W_m$$

برای مدار محدود به چرخش حول محور Z :

$$(T_I)_z = \frac{\partial W_m}{\partial \Phi}$$

مولفه Z گشتاور موثر بر مدار

نیرو و گشتاور برحسب اندوکتانس متقابل:

در دو مدار با جریانهای I_1 ، I_2 و اندوکتانس خودی L_1 ، L_2 و اندوکتانس متقابل L_{12} ، انرژی مغناطیسی برابر است با :

$$W_m = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + L_{12} I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2$$

با جایگذاری رابطه فوق در رابطه $F_I = \nabla W_m$ داریم:

$$\boxed{(T_I)_z = I_1 I_2 \frac{\partial L_{12}}{\partial \Phi}} \quad (N.m)$$

میدان‌های متغیر با زمان و معادلات ماکسول (فصل ۷ چنگ)

مرور الکتریسیته و مغناطیس ساکن:

$$\begin{cases} \nabla \times E = 0 \\ \nabla \cdot D = \rho \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \nabla \cdot B = 0 \\ \nabla \times H = J \end{array}$$

$$D = \epsilon E \qquad H = \frac{1}{\mu} B$$

قانون القای الکترومغناطیسی فاراده:

کشف تجربی مایکل فاراده در ۱۸۳۱ یکی از پیشرفت‌های اصلی در نظریه الکترومغناطیس است.

* وقتی شار مغناطیسی در حال پیوند با یک حلقه‌های تغییر می‌کند، جریانی در این حلقه القا می‌شود.

قانون فاراده: رابطه کمی بین emf القایی و نرخ تغییر پیوند شار (براساس مشاهدات تجربی)

اصل موضوع اساسی القای الکترومغناطیسی:
$$\boxed{\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}}$$

این معادله در هر نقطه از فضا (فضای آزاد یا محیط مادی) قابل اعمال است.

با استفاده از قضیه استوکس:
$$\oint_C E \cdot dl = -\int_S \frac{\partial B}{\partial t} \cdot ds$$
در هر سطح S با مسیر محدود کننده C برقرار است.

در میدان بدون تغییرات زمانی: $\frac{\partial B}{\partial t} = 0$ ⇐ معادلات به معادلات الکتریسیته ساکن ساده می‌شود.

تعریف:

$V = \oint_C E \cdot dl$ emf القا شده در مداری با مسیر C (ولت V)

$\Phi = \int_S B \cdot ds$ شار مغناطیسی عبور کننده از سطح S (وبر Wb)

$$\oint_C E \cdot dl = -\frac{d}{dt}\int_S B \cdot ds \quad \rightarrow \quad \boxed{V = -\frac{d\Phi}{dt}}$$

مفهوم: نیروی محرکه الکتریکی القا شده در یک مدار بسته ساکن، برابر منفی نرخ افزایش شار مغناطیسی دارای پیوند با آن مدار است.

← (بیانی از قانون القای الکترومغناطیسی فاراده)

علامت منفی: emf القایی (عامل جریان در حلقه بسته) با تغییر شار مغناطیسی پیوندی مخالفت می‌کند. **قانون لنز**

← ادامه بحث در ترانسفورماتورها و حلقه‌های چرخنده در داخل میدان مغناطیسی

(۱)

EMC
کاربرد
Sat.
Mobile

معادلات ماکسول:

طبق اصل موضوعی القای الکترومغناطیسی: هر میدان مغناطیسی متغیر با زمان، یک میدان الکتریکی ایجاد می‌کند

$$\begin{cases} \nabla \times E = -\dfrac{\partial B}{\partial t} \\ \nabla \times H = J \\ \nabla \cdot D = \rho \\ \nabla \cdot B = 0 \end{cases}$$

E میدان الکتریکی
D بردار چگالی شار الکتریکی
H میدان مغناطیسی
B بردار چگالی شار مغناطیسی

ρ چگالی حجمی بارهای آزاد
J چگالی جریان‌های آزاد (انتقالی / هدایتی)

برای جریان: اصل بقای بار: $\nabla \cdot J = -\dfrac{\partial \rho}{\partial t}$

$\nabla \cdot J = \nabla \cdot \nabla \times H = 0 \neq -\dfrac{\partial \rho}{\partial t}$ تناقض

رفع تناقض با اصل بقای بار

$$\nabla \times H = J + \frac{\partial D}{\partial t}$$ اصلاح

$\dfrac{\partial D}{\partial t}$: چگالی جریان جابجایی $\left(\dfrac{A}{m^2}\right)$

فرم انتگرالی معادلات ماکسول:

$$\oint_c E \cdot dl = -\int_s \frac{\partial B}{\partial t} \cdot ds$$ قانون فاراده در القای الکترومغناطیسی

سطح باز و مسیر بسته

$$\oint_c H \cdot dl = \int_s \left(J + \frac{\partial D}{\partial t}\right) \cdot ds$$ تعمیم قانون مداری آمپر

$$\oint_s D \cdot ds = \int_v \rho \, dv = Q$$ قانون گوس (کلیه میدان‌های الکتریکی ساکن و متغیر با زمان)

حجم V و سطح بسته

$$\oint_s B \cdot ds = 0$$

عدم وجود بار مغناطیسی مجزا

J می‌تواند شامل چگالی جریان انتقالی ρu ناشی از حرکت توزیع بارهای آزاد
و همچنین چگالی جریان هدایتی σE ناشی از حضور میدان الکتریکی در محیط هادی باشد.

$\oint B \cdot ds = 0$: مفهوم: هیچ بار مغناطیسی مجزایی وجود ندارد و کل شار مغناطیسی خارج شونده از هر سطح بسته صفر است.

پتانسیل برداری:

پتانسیل مغناطیسی برداری A (به علت طبیعت سلونوئیدی B): $B = \nabla \times A \quad (T)$

جایگذاری در قانون فاراده:

$$\nabla \times E = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times A) \Rightarrow \nabla \times \left(E + \frac{\partial A}{\partial t}\right) = 0 \Rightarrow E + \frac{\partial A}{\partial t} = -\nabla V$$

(V: پتانسیل الکتریکی عددی)

$$\Rightarrow E = -\nabla V - \frac{\partial A}{\partial t} \quad \left(\frac{V}{m}\right)$$