تمرین ۵

جریان‌های الکتریکی دائم:

انواع جریان‌های الکتریکی ناشی از حرکت بارهای آزاد:

✓ ① جریان هدایتی: در هادی‌ها و نیمه‌هادی‌ها توسط حرکت رانش الکترون‌ها یا حفره‌ها

② جریان الکترولیتی: ناشی از جابجایی یون‌های مثبت و منفی

③ جریان انتقالی: ناشی از حرکت الکترون‌ها و یا یون‌ها در خلاء

جریان‌های هدایتی از قانون اهم و رابطه $V=IR$ در نظریه مدار پیروی می‌کند.

با اعمال میدان الکتریکی بیرونی، الکترون‌های لایه ظرفیت بطور منظم جریان پیدا می‌کند.

سرعت حرکت الکترون‌ها در هادی‌های بسیار خوب نیز بسیار کم در حدود $\frac{m}{s}$ 10^{-4} و 10^{-3} است زیرا در مسیر حرکت خود با اتم‌ها برخورد می‌کند و بخشی از انرژی جنبشی خود را بصورت حرارت از دست می‌دهند.

نیروهای الکتریکی مانع از انباشتگی الکترون‌های اضافی در یک نقطه هادی شده و هادی از نظر الکتریکی خنثی می‌ماند

در حالت تعادل چگالی بار به سرعت به سمت صفر میل می‌کند $\rho \to 0$

چگالی جریان:

جریان: نرخ زمانی تغییر بار $\Delta I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$

چگالی جریان: $J = \frac{\Delta I}{\Delta S}$ $\left(\frac{A}{m^2}\right)$

کل جریان عبوری I از سطح دلخواه S: $I = \int_S J \cdot ds$ (A)

$$J = N q u \longrightarrow J = \rho u \quad \begin{cases} Nq = \rho \\ -\mu_e E = u \end{cases}$$

N: تعداد حامل‌های بار

q: بار

u: سرعت حامل بار

در هادی‌ها $\Longrightarrow$ $u = -\mu_e E$ $\left(\frac{m}{s}\right)$ $\longrightarrow$ $J = \underbrace{-\rho_e \mu_e}_{} E$

u: سرعت رانش متوسط

μ_e: ضریب تحرک الکترونی

ρ_e: چگالی بار الکترون‌های رانشی

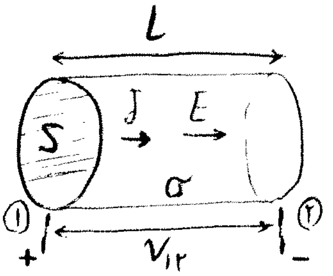
شکل نقطه‌ای قانون اهم $J = \sigma E$ $\longrightarrow$ (محیط اهمی ایزوتروپیک)

σ: رسانندگی (پارامتر ماکروسکوپی)

$\sigma = \rho_e \mu_e + \rho_h \mu_h$ ضریب هدایت نیمه‌هادی‌ها به تمرکز و تحرک الکترون‌ها و حفره‌ها بستگی دارد:

$\sigma : \left(\frac{A}{V.m} \equiv \frac{S}{m}\right)$

ضریب مقاومت $= \frac{1}{\sigma}$ یا سیگما $: \Omega.m$ (اهم‌متر)



$V_{۱۲} = E\,l \rightarrow E = \frac{V_{۱۲}}{l}$

$J = \frac{I}{S} \leftarrow$ جریان کل $I = \iint_s J\, ds = J\,S$ سطح مقطع ثابت.

$J = \sigma E \longrightarrow \frac{I}{S} = \sigma \frac{V_{۱۲}}{l} \Longrightarrow V_{۱۲} = \left(\frac{L}{\sigma S}\right) I \equiv RI$

مقاومت یک قطعه مستقیم از ماده‌ای همگن با سطح مقطع یکنواخت در جریان dc

$$\boxed{R = \frac{L}{\sigma S}\ \Omega}$$

$G = \frac{\sigma S}{L}\ s$

$\begin{cases} \sigma_{cu} = ۵,۸ \times ۱۰^{۷} \frac{S}{m} \\ \sigma_{Fe} = ۱۰^{۷} \frac{S}{m} \end{cases}$

مثال: مقاومت dc سیم به طول ۱۰۰ متر و به شعاع ۲ میلیمتر از مس و آهن؟

$l = ۱۰^{۲} m \qquad S = \pi \times (۲ \times ۱۰^{-۴})^{۲} = ۴ \times ۱۰^{-۸} \pi \ (m^{۲})$

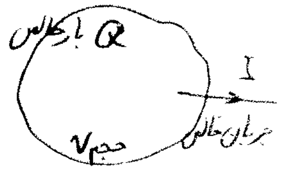
$R_{cu} = \frac{l}{\sigma_{cu} \times S} = \frac{۱۰۰}{۵,۸ \times ۱۰^{۷} \times ۴ \times ۱۰^{-۸} \pi} = ۲۱,۹۶\ \Omega$

$R_{Fe} = \frac{l}{\sigma_{Fe} \times S} = \frac{\sigma_{cu}}{\sigma_{Fe}} R_{cu} = ۵,۸ \times ۲۱,۹۶ \simeq ۱۲۷,۳۶۸\ \Omega$

۳-۵ قانون KVL : برای منابع و مقاومتهای متعدد در یک مسیر بسته:

$$V = RI \rightarrow \boxed{\sum_j V_j = \sum_k R_k I_k}$$

۴-۵ معادله پیوستگی و KCL



اصل بقای بار: بار الکتریکی نه تولید می‌شود، نه نابود.

$Q(t_1) > Q(t_2)$

جریان خالص به سمت بیرون، کاهش بار درون حجم

قضیه دیورژانس

$$I = \oint_s J\cdot ds = -\frac{dQ}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_v \rho\, dv$$

$$\int_v \nabla\cdot J\, dv = -\int_v \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dv$$

$$\boxed{\nabla\cdot J = -\frac{\partial \rho}{\partial t}}$$ معادله پیوستگی

ρ تابع { زمان ، مکان }

در جریان‌های دائم d.c. چگالی بار با زمان تغییر نمی‌کند $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \nabla\cdot J = 0$ (پایستار)

به عبارتی، جریان‌های الکتریکی دائم بدون دیورژانس یا سلونوئیدی است.

خطوط میدان جریان‌های دائم روی خود بسته می‌شوند
خطوط شدت میدان الکتریسیته ساکن از بارها شروع و به آنها ختم می‌شوند

$\nabla\cdot J = 0 \longrightarrow \oint_s J\cdot ds = 0$ فرم انتگرالی : $\sum_j I_j = 0$ قانون KCL

جمع جبری تمام جریان‌هایی که از یک گره یک مدار الکتریکی خارج می‌شوند صفر است.

زمان تعادل؟

یادآوری: در درون هادی بارهای موجود به سطح هادی حرکت کرده و در شرایط تعادل $\rho = 0$ و $E = 0$ زمان تعادل

$$\left.\begin{aligned} \nabla\cdot J &= \sigma \nabla\cdot E = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \\ \text{(در محیط ساده)}\quad \nabla\cdot E &= \frac{\rho}{\epsilon} \end{aligned}\right\} \rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\sigma}{\epsilon}\rho = 0 \rightarrow \rho = \rho_0 e^{-(\frac{\sigma}{\epsilon})t}$$

چگالی بار اولیه در $t=0$

کاهش بار بصورت نمایی با زمان

زمان سستی: زمانی که چگالی بار اولیه به $\frac{1}{e}$ (۳۶٫۸٪) خود کاهش یابد $\tau = \frac{\epsilon}{\sigma}$ (s) ثابت زمانی

مس $\begin{cases} \sigma = 5.8\times 10^{7}\ (\frac{S}{m}) \\ \epsilon \approx \epsilon_0 = 8.85\times 10^{-12}\ (\frac{F}{m}) \end{cases} \Rightarrow \tau = 1.52\times 10^{-19}\ s$

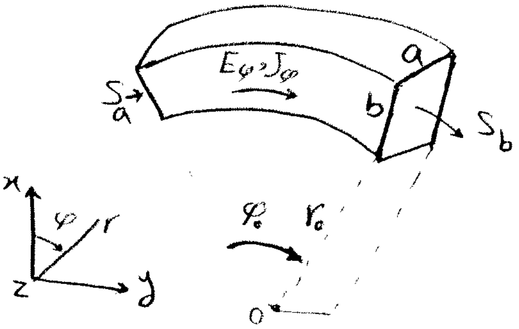
محاسبه مقاومت الکتریکی:

$\vec{J} = \sigma \vec{E}$

$$R = \frac{V_{ab}}{I} = \frac{\int_a^b \bar{E} \cdot d\bar{l}}{\int_s \sigma \bar{E} \cdot d\bar{s}}$$

مثال: مقاومت سیم هادی با سطح مقطع یکنواخت S و طول L ؟

$$R = \frac{V_{ab}}{I} = \frac{\int_a^b \bar{E} \cdot d\bar{l}}{\int_s \sigma \bar{E} \cdot d\bar{s}} = \frac{EL}{\sigma E S} = \boxed{\frac{L}{\sigma S}}$$



مثال: مقاومت میله خمیده شکل زیر ؟

(میله خمیده: شعاع درونی r_0، شعاع بیرونی $r_0 + b$ و ضخامت a و زاویه φ_0)

خطوط میدان الکتریکی قوس‌هایی به مرکز O در راستهٔ $\vec{a}_\varphi$ می‌باشد میدان الکتریکی فقط مولفه E_φ دارد.

زیرا خطوط میدان بر سطوح هم‌پتانسیل S_a و S_b عمود است $\Leftarrow$ میدان الکتریکی فقط مولفه E_φ دارد.

چگالی جریان در سطح مقطع مستطیل شکل یکنواخت نبوده و تابعی از r است.

اختلاف پتانسیل بین S_a و S_b: $V_{ab} = \int \bar{E} \cdot d\bar{l} = \int_0^{\varphi_0} E_\varphi \, r \, d\varphi = E_\varphi \, r \, \varphi_0$

$$E_\varphi = \frac{V_{ab}}{r\varphi_0} = \frac{k}{r} \qquad \left(k = \frac{V_{ab}}{\varphi_0} : \text{مقدار ثابت}\right)$$

تغییرات میدان نسبت به شعاع

$$\begin{cases} V_{ab} = k\varphi_0 \\ I = \int_s \sigma \bar{E} \cdot d\bar{s} = \sigma \int_{r_0}^{r_0+b} \int_0^a \frac{k}{r} \, dr \, dz = \sigma k a \ln \frac{r_0+b}{r_0} \end{cases}$$

$$R = \frac{V_{ab}}{I} = \boxed{\frac{\varphi_0}{\sigma a \ln \frac{r_0+b}{r_0}}}$$

نکته: میدان برداری بدون کرل ≡ گرادیان یک میدان پتانسیل اسکالر:

$$\nabla\times J = 0 \longrightarrow J = -\nabla\psi$$

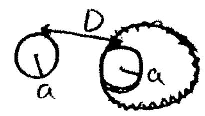
$$\nabla\cdot J = 0 \hookrightarrow \nabla^2\psi = 0 \qquad \boxed{\psi = \sigma V}$$

محاسبه مقاومت از روی ظرفیت خازنی:

$$\begin{cases} C = \dfrac{Q}{V} = \dfrac{\oint_s D\cdot ds}{-\int_L E\cdot dl} = \dfrac{\oint_s \epsilon E\cdot dl}{-\int_L E\cdot dl} \\ R = \dfrac{V}{I} = \dfrac{-\int_L E\cdot dl}{\oint_s J\cdot ds} = \dfrac{-\int_L E\cdot dl}{\oint_s \sigma E\cdot ds} \end{cases} \Longrightarrow \boxed{RC = \frac{C}{G} = \frac{\epsilon}{\sigma}}$$

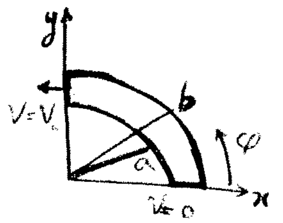
کابل کواکسیال

$$C = \frac{2\pi\epsilon}{\ln(\frac{b}{a})} \Rightarrow R = \frac{\epsilon}{\sigma}\times\frac{1}{C} = \frac{\ln(\frac{b}{a})}{2\pi\sigma}$$



$$C = \frac{\pi\epsilon}{\cosh^{-1}(\frac{D}{2a})} \Rightarrow R = \frac{1}{\pi\sigma}\cosh^{-1}\left(\frac{D}{2a}\right)$$

$$= \frac{1}{\pi\sigma}\ln\left[\frac{D}{2a} + \sqrt{\left(\frac{D}{2a}\right)^2 - 1}\right] \qquad \cosh^{-1}x = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$$



مثال: مادیس هادی با ضخامت یکنواخت h و رسانایی σ به فرم ربع واشر مسطح با شعاع‌های داخلی و بیرونی a و b است.
مقاومت بین دو وجه انتهایی؟

فرض: اختلاف پتانسیل V_0 بین دو وجه — شرایط مرزی:
$$\begin{cases} V = 0 & \varphi = 0 \\ V = V_0 & \varphi = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

پتانسیل V تنها تابعی از φ است: معادله لاپلاس در مختصات استوانه‌ای به فرم زیر ساده می‌شود

$$\frac{d^2V}{d\varphi^2} = 0$$

$$\hookrightarrow V = C_1\varphi + C_2 \xrightarrow{\text{شرایط مرزی}} V = \frac{2V_0}{\pi}\varphi$$

$$J = \sigma E = -\sigma\nabla V = -a_\varphi\sigma\frac{\partial V}{r\partial\varphi} = -a_\varphi\frac{2\sigma V_0}{\pi r}$$

جریان کل
$$I = \int_s J\cdot ds = \frac{2\sigma V_0}{\pi}h\int_a^b\frac{dr}{r} = \frac{2\sigma h V_0}{\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$ds = -a_\varphi h\,dr$ روی سطح $\varphi = \frac{\pi}{2}$

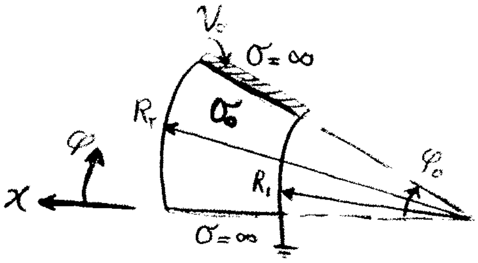
$$\boxed{R = \frac{V_0}{I} = \frac{\pi}{2\sigma h\ln(\frac{b}{a})}}$$

عرض ۱۸۰ صفحه‌ای

مثال: صفحه‌ای از جنس عایق با رسانایی σ_0 و ضخامت کم بریده شده،

و اختلاف پتانسیل V_0 به دو طرف آن اعمال می‌گردد.

تابع پتانسیل را در این صفحه نازک و مقاومت آن را تعیین کنید.



بدلیل تقارن کامل و ضخامت کم صفحه پتانسیل تغییراتی نسبت به r و z نداشته و فقط تابعی از φ است.

بنابراین داریم:

$$V = A\varphi + B$$

$$\begin{cases} V=0 & \varphi=0 \\ V=V_0 & \varphi=\varphi_0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} A=\dfrac{V_0}{\varphi_0} \\ B=0 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{V=\left(\frac{V_0}{\varphi_0}\right)\varphi}$$

برای محاسبه مقاومت این صفحه نازک (ضخامت Δ) کافی است جریان گذرنده از صفحه را بدست آوریم.

بدین منظور ابتدا $\vec{E}$، سپس $\vec{J}$ و آنگاه I را محاسبه می‌کنیم و در نهایت داریم $R=\frac{V_0}{I}$

$$\vec{E} = -\nabla V = \frac{-1}{r}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\hat{a}_\varphi = \frac{-V_0}{\varphi_0}\frac{1}{r}\hat{a}_\varphi$$

$$\vec{J} = \sigma_0 \vec{E} = \frac{-V_0\sigma_0}{\varphi_0}\frac{1}{r}\hat{a}_\varphi$$

$$I = \int \vec{J}\cdot d\vec{s} = -\frac{V_0\sigma_0}{\varphi_0}\int_{R_1}^{R_2}\int_0^{\Delta}\frac{a_\varphi}{r}\cdot(-dr\,dz\,\hat{a}_\varphi) = \boxed{\frac{V_0\sigma_0\Delta}{\varphi_0}\ln\frac{R_2}{R_1}}$$

$$\boxed{R = \frac{V_0}{I} = \frac{\varphi_0}{\sigma_0\,\Delta\,\ln\frac{R_2}{R_1}}}$$

شرایط مرزی چگالی جریان:

وقتی جریان بطور مایل از فصل مشترک بین دو محیط با رسانندگی های متفاوت می گذرد (مشابه D و E)،
بردار چگالی جریان هم جهت و هم اندازه تغییر می کند.

معادلات حاکم بر چگالی جریان دائم:

دیفرانسیلی	انتگرالی
$\nabla\cdot J=0$	$\oint_s J\cdot ds=0$
$\nabla\times\left(\frac{J}{\sigma}\right)=0$	$\oint_c \frac{J}{\sigma}\cdot dl=0$

$E=\frac{J}{\sigma}$

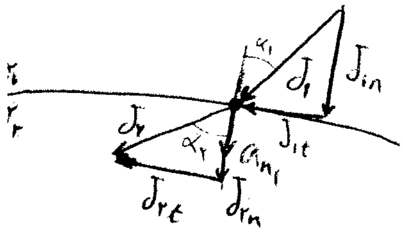
مشابه قبل:

مولفه عمودی یک میدان برداری بدون دیورژانس پیوسته است: $\nabla\cdot J=0 \Rightarrow J_{1n}=J_{2n}$

مولفه مماسی یک میدان برداری بدون کرل روی فصل مشترک پیوسته است: $\nabla\times\frac{J}{\sigma}=0 \Rightarrow \frac{J_{1t}}{J_{2t}}=\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$

نسبت مولفه های مماسی J در دو طرف فصل مشترک برابر نسبت رسانندگی ها است

مشابه: σ و J ؛ ϵ و D



مثال: دو محیط هادی با رسانندگی های σ_1 و σ_2 توسط فصل مشترکی از هم جدا شده اند.
چگالی جریان دائم در نقطه P_1 از محیط ①: اندازه برابر J_1 و زاویه α_1 با امتداد قائم.
اندازه و جهت چگالی جریان در نقطه P_2 از محیط ② ؟

$$\begin{cases} J_1\cos\alpha_1 = J_2\cos\alpha_2 & \text{(عمود } n) \\ \sigma_2 J_1\sin\alpha_1 = \sigma_1 J_2\sin\alpha_2 & \text{(مماس } t) \end{cases} \xrightarrow{\text{تقسیم}} \boxed{\frac{\tan\alpha_2}{\tan\alpha_1}=\frac{\sigma_2}{\sigma_1}}$$

$$J_2=\sqrt{J_{2t}^2+J_{2n}^2}=\sqrt{(J_2\sin\alpha_2)^2+(J_2\cos\alpha_2)^2}=\sqrt{\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}J_1\sin\alpha_1\right)^2+(J_1\cos\alpha_1)^2}$$

$$\boxed{J_2=J_1\sqrt{\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\sin\alpha_1\right)^2+\cos^2\alpha_1}}$$

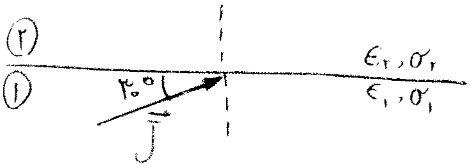
اگر محیط ① هادی خیلی بهتری از محیط ② باشد: $\sigma_1\gg\sigma_2$

$\alpha_2\rightarrow 0$ و J_2 تقریباً عمود بر فصل مشترک است.

بالعکس در حالت فوق: $\sigma_1<\sigma_2$

چگالی جریان J با زاویه °۳۰ نسبت به مرز بین دو محیط ۱ و ۲ ، از محیط ۱ به ۲ وارد می‌شود.

چگالی بار سطحی در مرز دو محیط را بدست آورید.



هدف $\rho_s = D_{2n} - D_{1n}$

پس به مولفه عمودی شدت میدان الکتریکی در دو محیط نیاز داریم:

$$J = \sigma E$$

$$\begin{cases} E_{1n} = \dfrac{J_{1n}}{\sigma_1} \\ E_{2n} = \dfrac{J_{2n}}{\sigma_2} \end{cases}$$

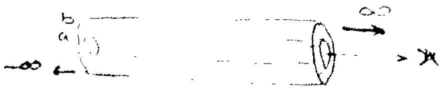
$$J_{1n} = J \sin 30^\circ = \frac{J}{2}$$

$J_{1n} = J_{2n} = \dfrac{J}{2}$ شرط مرزی چگالی جریان در فصل مشترک دو محیط داریم:

$$\begin{cases} E_{1n} = \dfrac{J}{2\sigma_1} \\ E_{2n} = \dfrac{J}{2\sigma_2} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} D_{1n} = \dfrac{\varepsilon_1}{2\sigma_1} J \\ D_{2n} = \dfrac{\varepsilon_2}{2\sigma_2} J \end{cases}$$

$$\rho_s = \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_2}{\sigma_2} - \frac{\varepsilon_1}{\sigma_1}\right) J$$

کابل هم محوری منطبق بر محور x است. شعاع هادی داخلی و خارجی a و b است. فضای بین دو رسانا از ... عایق ناهمگن با ضریب عایقی $\varepsilon = \varepsilon_0 e^{-|x|}$ پر شده است. ظرفیت خازنی چنین کابلی با طول بی‌نهایت را حساب کنید



$$\frac{1}{C} = \int \frac{dl}{\iint \varepsilon\, ds}$$

$$\iint \varepsilon\, ds = \int_{x=-\infty}^{\infty}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \varepsilon_0\, e^{-|x|}\, r\, d\varphi\, dz = 2\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} \varepsilon_0\, e^{-x}\, r\, d\varphi\, dz = 4\pi\varepsilon_0 r$$

$$\frac{1}{C} = \int_a^b \frac{dr}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\Big[\ln r\Big]_a^b = \frac{\ln(b/a)}{4\pi\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{C = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\ln(b/a)}}$$

$$E_\varphi(r = 0.2^{m}, \varphi = 36^\circ) = 240\ \text{V/m}$$

صفحات هادی کامل: $\begin{cases}\varphi = 30\\ \varphi = 45\end{cases}$ $0.02 < r < 0.5^{m}$

اگر صفحه $\varphi = 45^\circ$ زمین شده باشد، پتانسیل صفحه $\varphi = 30$ را بدست آورید.

لاپلاس $\nabla^2 V = 0$ $V(\varphi)$

$$V = A\varphi + B$$

$$V\left(\frac{\pi}{4}\right) = A\frac{\pi}{4} + B = 0 \quad (1)$$

$$E = -\nabla V = \frac{-1}{r}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\, a_\varphi = -\frac{A}{r}\,\hat{a}_\varphi$$

$$\Rightarrow 240 = \frac{-A}{0.2} \Rightarrow A = -48 \quad (2)$$

با جایگذاری (2) در (1)

$$B = +12\pi$$

$$\Rightarrow V = -48\varphi + 12\pi$$

$$V\left(\frac{\pi}{6}\right) = -48\frac{\pi}{6} + 12\pi = 4\pi$$

۵-۵ اتلاف توان :

حرکت رانشی الکترونهای هدایت درون یک فلز بر اثر یک میدان الکتریکی

در برخورد الکترونها با اتمهای موجود در شبکه کریستالی $\Rightarrow$ (حرارت)

کار انجام شده توسط میدان الکتریکی $\Delta W = q \cdot E \cdot \overset{\text{فاصله}}{\Delta l}$

توان $P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = q \cdot E \cdot u$ ← سرعت رانشی

کل توان تحویلی به تمام حاملهای بار موجود در حجم dv:

$$dP = \sum_i P_i = E \cdot \Big(\overbrace{\sum_i N_i q_i u_i}^{J} \Big) dv$$

$$dP = E \cdot J \, dv \longrightarrow \frac{dP}{dv} = \underbrace{E \cdot J}_{\text{چگالی توان تحت شرایط جریان دائمی}} \left(\frac{W}{m^3}\right)$$

کل توان الکتریکی تبدیل شده به حرارت در حجم v (قانون ژول):

$$\boxed{P = \int_v E \, J \, dv \quad (W)}$$

$dv = \underbrace{ds}_{\text{سطح مقطع ثابت}} \cdot \underbrace{dl}_{\text{جهت اندازه گیری } J}$

$$P = \int_L E \, dl \int_S J \, ds = V \underbrace{I}_{\text{جریان هدایتی}}$$

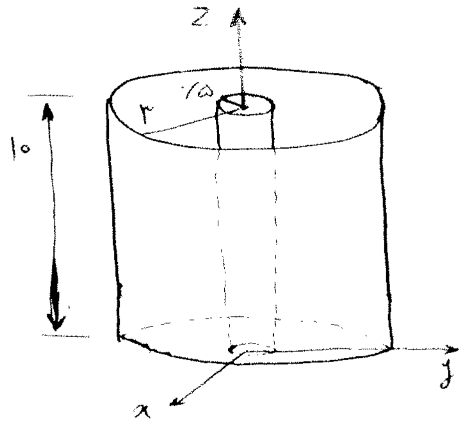
واحد SI:
- توان (وات)
- کار یا انرژی (ژول)

$V = RI$

توان اهمی (حرارت تلف شده در مقاومت R):

$$\boxed{P = R I^2}$$

در مختصات استوانه‌ای ناحیه $\begin{cases} 0.5 < r < 3^{m} \\ 0 < z < 10^{m} \\ 0 < \varphi < 2\pi \end{cases}$ از مایعی با ضریب رسانندگی $\sigma = 2\,\frac{S}{m}$ پر شده است.
سطوح $\begin{cases} r = 0.5 \\ r = 3 \end{cases}$ هادی کامل ـ با اختلاف پتانسیل V ولت.
اگر بخواهیم توان 10^{kW} در مایع بصورت حرارت تلف شود، مقدار V را محاسبه کنید.



$$P = \frac{V^2}{R}$$ توان تلف شده

$$R = \frac{V}{I} = \frac{\int E \cdot dl}{\iint \sigma E\, ds} \longrightarrow$$ محاسبه

یادآوری:

ظرفیت واحد طول $C = \dfrac{2\pi\varepsilon}{\ln(\frac{b}{a})} \xrightarrow{RC = \frac{\varepsilon}{\sigma}} R = \dfrac{\ln(b/a)}{2\pi\sigma}$ مقاومت واحد طول

واحد طول $R = \dfrac{\ln(\frac{3}{0.5})}{2\pi \times 2} = \dfrac{\overset{1.7917}{\ln 6}}{4\pi} \simeq 0.14258\ \Omega$

(طول ۱۰ متر) $R \simeq 0.01426\ \Omega$

نکته: $\begin{cases} \uparrow C = \varepsilon \frac{A\uparrow}{d} \\ \downarrow R = \rho \frac{L}{A\uparrow} \end{cases}$

$$V^2 = PR = 10{,}000 \times 0.01426 \simeq 142.58$$

$$\underline{V \simeq 11.94\ V}$$

$$R = \int \frac{dl}{\iint \sigma ds}$$

$$\iint \sigma ds = \int_{z=0}^{10} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \sigma \rho\, d\varphi\, dz = 20\pi\sigma\rho$$

$$R = \int_{\rho=0.5}^{3} \frac{d\rho}{20\pi\sigma\rho} = \frac{1}{40\pi} \left[\ln \rho\right]_{0.5}^{3} = 0.01426\ \Omega$$

مقاومت بین دو کره هم مرکز به شعاع R_1 و R_2 $(R_2 > R_1)$ را بدست آورید که ماده‌ای با ضریب رسانندگی $\left(\sigma = \sigma_0 \left(1 + \frac{k}{r}\right)\right)$ فضای بین آن دو را پر کرده است.

نکته: رابطه $RC = \frac{\epsilon}{\sigma}$ برای محیط همگن صادق است X

روش حل کلاسیک:
$$\begin{cases} I = \int J\,ds = \int \sigma E\,ds \\ V = -\int E \cdot dl \end{cases} \rightarrow R = \frac{V}{I}$$

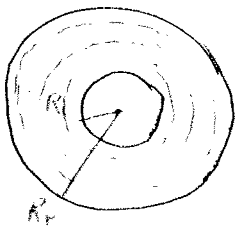
روش دیگر: تقسیم قطعه به قطعات کوچک دیفرانسیل به طول dl است.

سپس مقاومت دیفرانسیل dR را از رابطه زیر بدست می‌آوریم. ۴ ص ۲۴۵ راهنمای ارشد

$$dR = \frac{dl}{\iint_s \sigma\,ds}$$

در نهایت نیز از dR روی طول قطعه (یعنی L) انتگرال می‌گیریم.

ایده روش: مقاومت معادل چند مقاومت سری برابر مجموع مقاومتهای آنها است.



$$R = \int \frac{dl}{\iint \sigma\,ds}$$

$$\iint \sigma\,ds = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi} \sigma_0\left(1 + \frac{k}{r}\right) r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

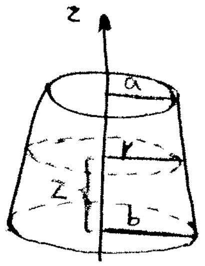
$$= 4\pi\sigma_0 (r^2 + kr)$$

$$R = \frac{1}{4\pi\sigma_0}\int_{r=R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2 + kr} = \frac{1}{4\pi\sigma_0}\,\frac{1}{k}\int\left(\frac{dr}{r} - \frac{dr}{r+k}\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi k\sigma_0}\left[\ln\left(\frac{r}{r+k}\right)\right]_{R_1}^{R_2}$$

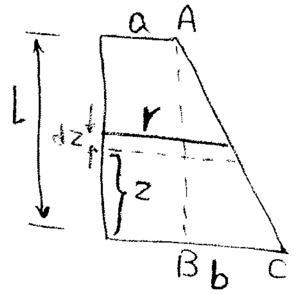
$$\Rightarrow \boxed{R = \frac{1}{4\pi k\sigma_0} \ln\left[\frac{R_2(R_1+k)}{R_1(R_2+k)}\right]}$$

طول مخروط ناقص L و قاعده‌ها دارای شعاع‌های a و b است. ضریب هدایت ویژه مخروط σ است.
مقاومت مخروط ناقص را بدست آورید.



در جایی از مخروط ناقص که دایره‌ای به شعاع r داریم : $J = \dfrac{I}{\pi r^2}$

$$J = \sigma E \longrightarrow E = \frac{J}{\sigma} = \frac{I}{\pi r^2 \sigma}$$



هدف : محاسبه اختلاف پتانسیل

در مثلث ABC :

$$\frac{r-a}{b-a} = \frac{L-z}{L}$$

$$z = L\left(1 - \frac{r-a}{b-a}\right)$$

$$dz = \frac{-L}{b-a}\, dr$$

$$V = -\int_L^0 E \cdot dl = -\int_L^0 \left(\frac{I}{\pi r^2 \sigma} a_z\right) \cdot \left(dz\, \hat{a}_z\right)$$

$$= -\int_L^0 \frac{I}{\pi r^2 \sigma}\, dz$$

$$= -\int_a^b \frac{I}{\pi \sigma r^2} \left(-\frac{L}{b-a} dr\right)$$

$$= \frac{IL}{\sigma \pi a b}$$

$$\Rightarrow \underline{R = \frac{V}{I} = \frac{L}{\pi \sigma a b}}$$