فصل ۴ :

معادله پواسون و لاپلاس :

۱ معادله دیفرانسیل اصلی حاکم بر الکتریسیته ساکن :

$$\begin{cases} \nabla \cdot D = \rho \\ \nabla \times E = 0 \end{cases}$$ خاصیت غیرگردشی E

$$\nabla \cdot (\epsilon E) = \rho \quad \rightarrow \quad \nabla \cdot (\epsilon \nabla V) = -\rho$$

$$\Rightarrow \quad E = -\nabla V$$

محیط ساده (ϵ تابع مکان نیست)

$$\Rightarrow \quad \nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon}$$ پواسون

عملگر لاپلاسین : دیورژانس گرادیان

چون هر دو عملیات دیورژانس و گرادیان شامل مشتقات فضایی مرتبه اول است ،

معادله پواسون یک معادله دیفرانسیل جزئی مرتبه دوم است و در هر نقطه از فضا که مشتقات مرتبه دوم وجود دارد ، برقرار است .

$$\nabla^2 V = \nabla \cdot \nabla V = \left(a_x \frac{\partial}{\partial x} + a_y \frac{\partial}{\partial y} + a_z \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \left(a_x \frac{\partial V}{\partial x} + a_y \frac{\partial V}{\partial y} + a_z \frac{\partial V}{\partial z}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad \left(\frac{V}{m^2}\right)$$ کارتزین

استوانه‌ای $$\nabla^2 V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

کروی $$\nabla^2 V = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2 \frac{\partial V}{\partial R}\right) + \frac{1}{R^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{R^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}$$

در نقاطی از یک محیط ساده که بار آزاد وجود ندارد : $\rho = 0$ ، داریم :

$$\nabla^2 V = 0$$ معادله لاپلاس

هر دو کران u معلوم، دیریکله
(استاندارد) $\frac{\partial u}{\partial n}$ معلوم، نیومن
مخلوط، روبین

معادله لاپلاس و پواسن:

نیروهای جاذبه و دافعه بین بارهای الکتریکی که از قوانین کولن (نیوتن) پیروی می‌کنند (اجسام) دارای تابع پتانسیل می‌باشند.

تابع پتانسیل خود جواب معادله لاپلاس است.

چنانچه برای هر تابع برداری $\vec{A}$، تابع اسکالر v پیدا شود که $\nabla v = \vec{A}$.

گوییم تابع اسکالر v، تابع پتانسیل، تابع برداری A است.

برای مثال نیروی جاذبه بین دو بار e_1 و e_2 با فاصله r:
$$F = k\frac{e_1 e_2}{r^2}\hat{a}_r = -k e_1 e_2 \nabla\left(\frac{1}{r}\right)$$

بنابراین است که F دارای تابع پتانسیل است.

$$\nabla^2 u = f(x,y,z)$$

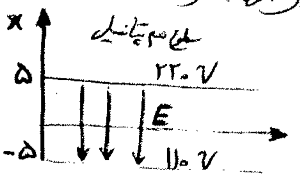
$$\nabla^2 u = \nabla\cdot\nabla v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$ حالت کلی، ۳ بعدی

$$\nabla\cdot E = \frac{\rho}{\epsilon}$$

اگر بار وجود نداشته باشد: پواسن ← لاپلاس

روش حل:
با حل معادله لاپلاس در یک میدان به پتانسیل موجود در آن میدان می‌رسیم. با گرادیان گیری از آن، مقدار نیروی موجود در میدان را بدست آوریم.

مثال:
تابع پتانسیل میدان بین دو صفحه هادی موازی عمود بر محور x در نقاط با طول ±۵ را بیابید که پتانسیل موجود در آنها به ترتیب ۱۱۰ و ۲۲۰ ولت باشد.



معادله لاپلاس $u_{xx}=0 \Rightarrow u(x)=ax+b$ (صفحات نامحدود: $\frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial z}=0$)

$$\begin{cases} u(5)=220 \\ u(-5)=110 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} a=11 \\ b=165 \end{array} \Rightarrow u(x)=11x+165$$

$$\Rightarrow E=-\nabla v = 11i$$

نیروی الکتریکی میدان برابر $F=11i$ است که بر صفحات هم پتانسیل عمود است.

معادله لاپلاس در این دستگاه مختصات؟ ↓

مثال: تکرار مثال فوق در مختصات استوانه‌ای و کروی:

$$u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\phi\phi}+u_{zz}=0$$ مختصات استوانه‌ای

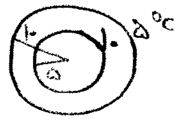
$\frac{\partial}{\partial\theta}=\frac{\partial}{\partial z}=0$

$$u_{rr}+\frac{1}{r}u_r=0 \Rightarrow \int\frac{u_{rr}}{u_r}=\int\frac{-1}{r}dr \Rightarrow \ln\frac{u_r}{a}=\ln\frac{1}{r} \Rightarrow \int u_r=\int\frac{a}{r}dr$$

$$\begin{cases} u(5)=110 \\ u(10)=220 \end{cases}$$

$$u=a\ln r+b \xrightarrow{\text{شرایط مرزی}} u=\frac{110}{\ln 2}\ln r+110\left(1-\frac{\ln 5}{\ln 2}\right)$$

مثال: حل روی کره‌های هادی (حرارت)



لاپلاس کروی: $\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)=0 \rightarrow r^2\frac{\partial u}{\partial r}=a \rightarrow \int\frac{\partial u}{\partial r}=\int\frac{a}{r^2} \rightarrow \boxed{u=-\frac{a}{r}+b}$$

$$\begin{cases} u(5)=10 \\ u(10)=5 \end{cases} \quad \begin{matrix} -\frac{a}{5}+b=10 \\ -\frac{a}{10}+b=5 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} a=-50 \\ b=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{u=\frac{50}{r}} \checkmark$$

معادلات لاپلاس توام با شرایط مرزی معین حل می‌شوند.

شرایط مرزی به طور معمول پتانسیل‌های معلوم روی سطوح هادی و پتانسیل صفر در بی‌نهایت است.

(یا میدان یا بار سطحی است)

قضیه یکتایی جواب:

اگر جوابی یافت شود که در معادله لاپلاس یا پواسون صدق کند و شرایط مرزی را نیز برآورده کند، آن تنها جواب ممکن مسأله است.

حل لاپلاس در مختصات کارتزین:

تفکیک متغیرها (مبحث ۳)

$$\nabla^2 V=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

$$V(x,y,z)=X(x)\,Y(y)\,Z(z) \longrightarrow \begin{cases} \frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}=k_1 \checkmark \\ \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}=k_2 \\ \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}=k_3 \end{cases}$$

$k_1+k_2+k_3=0$

مسئله اصلی ← ۳ معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم

معادلات مشابه: فقط یکی را حل می‌کنیم

$$X(x)=\begin{cases} Ax+B & k_1=0 \\ A_1\sin kx+B_1\cos kx & k_1=-k^2<0 \\ A\sinh kx+B\cosh kx & k_1=k^2>0 \\ \frac{1}{2}\left(Ae^{kx}+Be^{-kx}\right) & \end{cases}$$

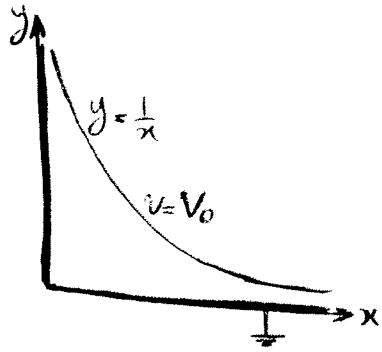
پتانسیل ۲ بعدی:

$K_1+K_2=0$

$$V(x,y)=\begin{cases} (Ax+B)(Cy+D) & k_1=-k_2=0 \\ (A'\sin kx+B'\cos kx)(C'e^{ky}+D'e^{-ky}) & k_1=-k_2=-k^2<0 \\ (A''e^{kx}+B''e^{-kx})(C''\sin ky+D''\cos ky) & k_1=-k_2=k^2>0 \end{cases}$$

جواب‌های عمومی:

جواب خصوصی؟



مثال: سطح مقطع محفظه‌ای شامل ۳ سطح مانند مطابق شکل

تمرین ۱۷ صفحه

تابع پتانسیل در فضای محصور بین سه مانع؟

$$\frac{\partial}{\partial z}=0$$

تابع پتانسیل مستقل از Z ← تابع پتانسیل ۲ بعدی است.

فرض تفکیک‌پذیری: $V(x,y)=X(x)Y(y)$

از ۳ فرم جواب معرفی شده، ساده‌ترین شکل را بررسی می‌کنیم

$$V(x,y)=(Ax+B)(Cy+D)$$

اگر این فرم جواب قادر به برآوردن کلیه شرایط مرزی مساله باشد، انتخاب ما صحیح بوده است.

در غیر اینصورت باید سایر فرم‌ها را به ترتیب انتخاب نمود.

در صورت نامناسب بودن هر ۳ فرم نتیجه می‌گیریم که حل مساله به روش تفکیک متغیرها میسر نیست.

شرایط مرزی:

$$\begin{cases} V=0 & y>0,\ x=0 \\ V=0 & x>0,\ y=0 \\ V=V_0 & x>0,\ y>0,\ y=\frac{1}{x} \end{cases}$$

$$V(0,y)=(A(0)+B)(Cy+D)=0 \Rightarrow B=0$$

$$V(x,0)=(Ax+B)(C(0)+D)=0 \Rightarrow D=0$$

در نتیجه تابع پتانسیل به فرم زیر تبدیل می‌شود:

$$V(x,y)=ACxy=kxy$$

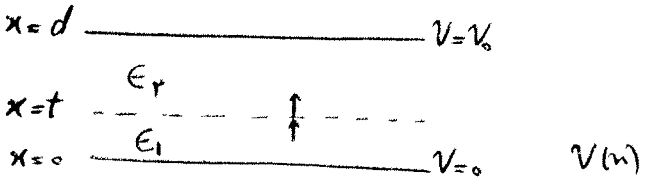
برای محاسبه ضریب k داریم:

$$V=V_0=kxy\Big|_{y=\frac{1}{x}} \rightarrow k=V_0$$

$$\Rightarrow \boxed{V(x,y)=V_0xy}$$

مثال: ناحیه محصور بین دو صفحه هادی $x=0$ و $x=d$ از دو ماده عایق با قابلیت گذردهی ϵ_1 ($0<x<t$) و ϵ_2 ($t<x<d$) پر شده است.

ص ۱۷۳ صفایی



پتانسیل صفحه $x=0$ برابر صفر و صفحه $x=d$ برابر V_0 است.

پتانسیل را در نواحی عایق بین دو صفحه بدست آورید.

پتانسیل در جهتهای y و z تغییری ندارد.

چون قابلیت گذردهی دو ناحیه متفاوت است ⇐ توابع پتانسیل در دو ناحیه متفاوت است.

$$\begin{cases} V_1 = A_1 x + B_1 & 0<x<t \\ V_2 = A_2 x + B_2 & t<x<d \end{cases}$$

شرایط مرزی
$$\begin{cases} V_1 = 0 & x=0 \\ V_2 = V_0 & x=d \end{cases}$$

برای تعیین چهار ضریب مجهول A_1، B_1، A_2 و B_2 ← دو شرط دیگر نیاز است.

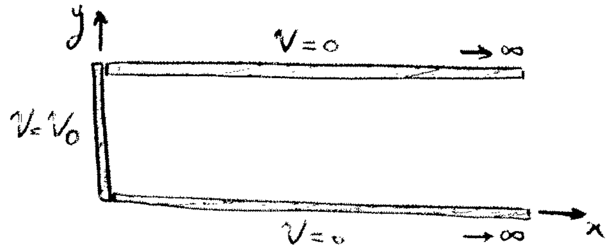
دو شرط دیگر از شرایط مرزی در $x=t$ یعنی پیوستگی پتانسیل و مولفه عمودی بردار $\vec{D}$ در مرز دو عایق بدست می‌آید.

پیوستگی در مرز
$$\begin{cases} V_1 = V_2 & x=t \\ D_{x_1} = D_{x_2} & x=t \end{cases} \longrightarrow \epsilon_1 \frac{dV_1}{dx} = \epsilon_2 \frac{dV_2}{dx}$$

جایگذاری ۴ شرط.

$$\begin{cases} 0 = 0 + B_1 \\ V_0 = A_2 d + B_2 \\ A_1 t + B_1 = A_2 t + B_2 \\ \epsilon_1 A_1 = \epsilon_2 A_2 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{حل دستگاه معادلات}} \begin{cases} V_1 = \dfrac{\epsilon_2 x}{\epsilon_2 t + \epsilon_1 (d-t)} V_0 & 0<x<t \\ V_2 = \dfrac{\epsilon_2 t + \epsilon_1 (x-t)}{\epsilon_2 t + \epsilon_1 (d-t)} V_0 & t<x<d \end{cases}$$



ص۱۷۶ اسلایدها

مثال: پتانسیل در ناحیه محصور بین سطوح هادی را محاسبه کنید.

$\frac{\partial}{\partial z}=0$ ⟸ تابع پتانسیل دو بعدی

حل: یکی از ۳ فرم بدست آمده.

اگر مثل مثال قبل با ساده‌ترین جواب شروع کنیم، جواب بدست آمده شرایط مرزی را برآورده نمی‌کند. ⟸ $k\neq 0$

چون پتانسیل در امتداد y دارای دو مقدار صفر است $y=0, d$ ⟸ پاسخ **باید** برحسب y سینوسی باشد.

توابع سینوسی دارای بیش از یک صفر.

$$\begin{cases} Y(y) = A_1 \sin ky + B_1 \cos ky \\ X(x) = A_2 e^{kx} + B_2 e^{-kx} \end{cases}$$

محاسبه A_1، A_2، B_1، B_2 و k با شرایط مرزی:

شرایط مرزی

$$\begin{cases} V=0 & y=0,\ x>0 \to V(x,0)=0 \to B_1=0 \\ V=0 & y=d,\ x>0 \to V(x,d)=0 \Rightarrow kd=n\pi \\ * \ V=V_0 & x=0,\ 0<y<d \qquad X = A_2 e^{\frac{n\pi x}{d}} + B_2 e^{-\frac{n\pi x}{d}} \\ V=0 & x\to\infty \to V(\infty,y)=0 \to A_2=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow Y = A_1 \sin\frac{n\pi y}{d}$, $n=1,2,\dots$

$V(x,y)=0$ ⟸ $n=0$

در نهایت داریم:

$$V(x,y) = A \sin\frac{n\pi y}{d}\, e^{-\frac{n\pi x}{d}} \qquad (A=A_1B_2)$$

جواب بدست آمده در سه شرط صدق می‌کند ولی شرط $V=V_0$ را برآورده نمی‌کند.

از آنجا که $V(x,y)$ بدست آمده به ازای هر یک از مقادیر $n=1,2,\dots$ جواب معادله لاپلاس است، ترکیب خطی آنها نیز جواب است.

بنابراین جواب را بصورت یک سری می‌نویسیم:

$$V(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi y}{d}\, e^{-\frac{n\pi x}{d}}$$

برای محاسبه ضرایب C_n از شرط مرزی سوم و خواص سری فوریه داریم:

$$V(0,y) = V_0 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi y}{d}$$

جایگذاری: $V(x,y) \to V(x)$ ؟

$V(x,y) \overset{?}{=} C e^{-\frac{n\pi x}{d}}$

سری فوق بیان سری فوریه تابع متناوب $f(y)$ است که دوره تناوب آن $2d$ است.

و مقداری برابر با V_0 در فاصله $0<y<d$ دارد.
$-V_0$ در فاصله $-d<y<0$

لذا برای محاسبه C_n می‌توان روش تعیین ضرایب سری فوریه را بکار برد. ←

با ضرب طرفین رابطه در $\sin\frac{m\pi y}{d}$ و انتگرال‌گیری از ۰ تا d داریم:

$$\underbrace{\int_0^d V_0 \sin\frac{m\pi y}{d}\,dy}_{\downarrow} = \underbrace{\int_0^d \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi y}{d}\sin\frac{m\pi y}{d}\,dy}_{\downarrow}$$

$$\frac{C_n}{2}\int_0^d\left[\cos\frac{(n-m)\pi}{d}y - \cos\frac{(n+m)\pi}{d}y\right]dy$$

$$\underbrace{\begin{cases}\frac{2dV_0}{m\pi} & m \text{ فرد} \\ 0 & m \text{ زوج}\end{cases} \qquad \begin{cases}0 & m\neq n \\ C_n\frac{d}{2} & m=n\end{cases}}$$

$$\rightarrow C_n = \begin{cases}\frac{4V_0}{n\pi} & n \text{ فرد} \\ 0 & n \text{ زوج}\end{cases}$$

$$\rightarrow \boxed{V(x,y,z) = \frac{4V_0}{\pi}\sum_{n=1,\ \text{فرد}}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi y}{d}\,e^{-\frac{n\pi x}{d}}}$$

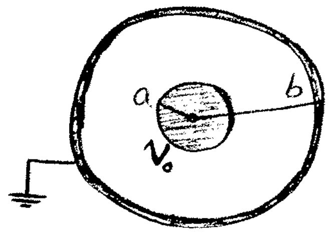
حل ۳ بعدی؟

معادله لاپلاس در مختصات استوانه‌ای:

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

حالت یک‌بعدی ($\frac{\partial}{\partial\varphi} = \frac{\partial}{\partial z} = 0$)

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) = 0 \xrightarrow{\text{۲ بار انتگرال‌گیری}} V = A\ln r + B$$



مثال: مطلوبست تغییرات پتانسیل در ناحیه بین دو هادی یک کابل هم‌محور ∞؟
پتانسیل هادی درونی V_0 و پتانسیل هادی بیرونی صفر است.

$\frac{\partial}{\partial\varphi} = 0$ تقارن نسبت به φ

$\frac{\partial}{\partial z} = 0$ طول کابل بی‌نهایت

$\Leftarrow$ پتانسیل فقط تابعی از r است. $\quad V = A\ln r + B$

$$\begin{cases}0 = A\ln b + B \\ V_0 = A\ln a + B\end{cases} \rightarrow \boxed{V = V_0\frac{\ln\left(\frac{r}{b}\right)}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)}}$$

اگر پتانسیل فقط تابعی از φ (Z) باشد جواب معادله لاپلاس:

$$V = A'\varphi + B'$$

$$V = A''Z + B''$$

لاپلاس چندبعدی :

در حالتهای ۲ بعدی و ۳ بعدی از روش جداسازی متغیرها برای حل معادله لاپلاس استفاده می‌کنیم.

در حالت ۲ بعدی بسته به اینکه پتانسیل تابعی از کدام ۲ متغیر باشد، جواب معادله شکلهای متفاوتی دارد.

برای مثال، V مستقل از z :

$$V(r,\varphi) = R(r)\,\Phi(\varphi)$$

$$\left[\frac{1}{R}\left(r\frac{\partial R}{\partial r}+r^2\frac{\partial^2 R}{\partial r^2}\right)\right]+\left[\frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}\right]=0$$

$$\begin{cases}\dfrac{1}{R}\left(r^2\dfrac{d^2R}{dr^2}+r\dfrac{dR}{dr}\right)=\lambda^2\\[2ex] \dfrac{1}{\Phi}\dfrac{d^2\Phi}{d\varphi^2}=-\lambda^2\end{cases}$$

(λ^2 ثابت جداسازی)

$$R(r)=\begin{cases}A\ln r+B & \lambda=0\\ A'r^{\lambda}+B'r^{-\lambda} & \lambda\neq 0\end{cases}$$

$$\Phi(\varphi)=\begin{cases}C\varphi+D & \lambda=0\\ C'\sin\lambda\varphi+D'\cos\lambda\varphi & \lambda\neq 0\end{cases}$$

ضرایب A، B، C و D (یا ضریبهای آنها) با اعمال شرایط مرزی محاسبه می‌شوند.

ثابت λ نیز که در حالت کلی عددی صحیح حقیقی یا موهومی است به کمک شرایط مرزی محاسبه می‌شود.

در دستگاه مختصات استوانه‌ای تابع پتانسیل بصورت حاصلضرب توابعی از r و φ (یا ترکیب خطی آنها) نوشته می‌شود:

$$V(r,\varphi)=\begin{cases}(A\ln r+B)(C\varphi+D) & \lambda=0\\ (A'r^{\lambda}+B'r^{-\lambda})(C'\sin\lambda\varphi+D'\cos\lambda\varphi) & \lambda\neq 0\end{cases}$$

در معادله لاپلاس سه بعدی $V(r,\varphi,z)$ با استفاده از سه معادله دیفرانسیل معمولی بدست می‌آید.

در جوابها، توابع بسل و هنکل نیز ظاهر می‌شوند:

$$V(r,\varphi,z)=\left[AJ_n(kr)+BY_n(kr)\right]\left[C\sin\lambda\varphi+D\cos\lambda\varphi\right]\left[Ee^{kz}+Fe^{-kz}\right]$$

$$\begin{cases}J_n & \text{بسل نوع اول}\\ Y_n & \text{بسل نوع دوم}\end{cases}\qquad \begin{cases}H_n^{(1)}=J_n+jY_n & \text{هنکل نوع اول}\\ H_n^{(2)}=J_n-jY_n & \text{هنکل نوع دوم}\end{cases}$$

تابع لژاندر $P_n(\cos\theta)=P_n^0(\cos\theta)$

$$\begin{cases}P_0(\cos\theta)=1\\ P_1(\cos\theta)=\cos\theta\\ P_2(\cos\theta)=\frac{1}{4}(1+3\cos 2\theta)\\ P_3(\cos\theta)=\frac{1}{8}(3\cos\theta+5\cos 3\theta)\end{cases}$$

معادله لاپلاس در مختصات کروی:

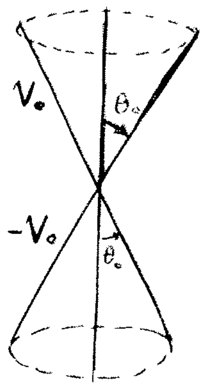
$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2} = 0$$

در حالت یک بعدی، V صرفاً تابعی از r، θ یا φ است

لذا معادله لاپلاس فقط از یکی از جملات فوق تشکیل شده است

جوابهای معادله در این حالت عبارتند از:

$$\begin{cases} V(r) = A + B/r \\ V(\theta) = C + D\ln\left(tg\frac{\theta}{2}\right) \\ V(\varphi) = E + F\varphi \end{cases}$$



مثال: دو سطح مخروطی شکل های نامحدود دارای پتانسیل $\pm V_0$ می‌باشند پتانسیل در اطراف مخروط؟ ۱۸۸ صفحه

بعلت وجود تقارن محوری و نیز ثابت بودن مخروطها در امتداد r، تابع پتانسیل مستقل از r و φ می‌باشد.

$$V(\theta) = A + B\ln\left(tg\frac{\theta}{2}\right)$$

شرایط مرزی
$$\begin{cases} V(\theta_0) = V_0 \longrightarrow V_0 = A + B\ln\left(tg\frac{\theta_0}{2}\right) \\ V(\pi-\theta_0) = -V_0 \longrightarrow -V_0 = A + B\ln\left(ctg\frac{\theta_0}{2}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = 0 \\ B = \dfrac{V_0}{\ln\left(tg\frac{\theta_0}{2}\right)} \end{cases} \longrightarrow \boxed{V(\theta) = V_0\,\frac{\ln\left(tg\frac{\theta}{2}\right)}{\ln\left(tg\frac{\theta_0}{2}\right)}}$$

حالتهای ۲ و ۳ بعدی معادله لاپلاس در مختصات کروی را می‌توان براساس روش جداسازی متغیرها بررسی نمود.

$$V(r,\theta,\varphi): \quad \begin{cases} R(r) = Ar^n + Br^{-(n+1)} \\ \Theta(\theta) = C P_n^m(\cos\theta) + D Q_n^m(\cos\theta) \\ \Phi(\varphi) = E\sin m\varphi + F\cos m\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_n^m(\cos\theta) & \text{لژاندر نوع اول} \\ Q_n^m(\cos\theta) & \text{لژاندر نوع دوم} \end{cases}$$

در جوابها m و n اعداد صحیح بوده و $m \le n$

بطور معمول توابع نوع دوم $Q_n^m(\cos\theta)$ بدلیل آنکه در $\theta=0$ و $\theta=\pi$ نامحدودند وارد محاسبات نمی‌شوند.

بعبارتی جهت اجتناب از نامحدود شدن پتانسیل در $\theta=0$ و π باید $D=0$ باشد.

در حالتی که تقارن محوری داریم، تابع پتانسیل مستقل از φ و در نتیجه مسئله ۲ بعدی است. در حالت $m=0$ ↓

$$V(r,\theta) = \begin{cases} \left[Ar^n + Br^{-(n+1)}\right] P_n(\cos\theta) & n \neq 0 \\ \left(A + \frac{B}{r}\right)\left[C + D\ln\left(tg\frac{\theta}{2}\right)\right] & n = 0 \end{cases}$$

روش تصاویر:

در برخی مسائل الکترواستاتیک با شرایط مرزی، با حل مستقیم معادله لاپلاس به برقراری شرایط مرزی دشوار می‌شود،

اما شرایط سطوح مرزی در این مسائل با استفاده از بارهای تصویر معادل قابل تشکیل است.

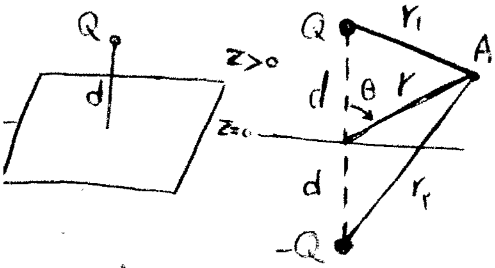
روش جایگزینی سطوح مرزی با بارهای مناسب بجای حل رسمی معادله لاپلاس را روش تصاویر گویند.

پتانسیل ناشی از توزیع‌های اصلی و تصویر عیناً با پتانسیل سیستم اول یکی باشد، یعنی در معادله لاپلاس صدق کرده و سطح

هم‌پتانسیلی در محل سطح جسم هادی با پتانسیلی برابر پتانسیل آن تشکیل دهد.

صدق هر دو جواب در معادله لاپلاس
برآورده شدن شرایط مرزی یکسان
$\Rightarrow$ طبق قضیه یکتایی، جوابها یکسان هستند.

* بار نقطه‌ای در مقابل صفحه هادی بینهایت:



بار نقطه‌ای Q به فاصله d از یک صفحه هادی بینهایت زمین شده قرار دارد.
مطلوبست پتانسیل و میدان الکتریکی در ناحیه $z>0$ و چگالی توزیع بار القائی روی صفحه هادی؟

اگر صفحه هادی را با بار $-Q$ و به فاصله d از پایین آن جایگزین کنیم،

هر نقطه از صفحه به یک فاصله از بارهای Q و $-Q$ بوده و پتانسیل آن برابر صفر است.

بنابراین پتانسیلی که بار Q و صفحه هادی در ناحیه $z>0$ بوجود می‌آورند با پتانسیل حاصل از Q و $-Q$ در این ناحیه برابر است.

بار $-Q$ تصویر بار Q در صفحه هادی نامیده می‌شود.

پتانسیل در نقطه دلخواه A. $V_A = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_1} + \dfrac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 r_2}$

$$\begin{cases} r_1 = \sqrt{r^2+d^2-2rd\cos\theta} \\ r_2 = \sqrt{r^2+d^2+2rd\cos\theta} \end{cases}$$

ص ۲۰۳ سعادتی

محاسبه میدان: با جمع میدانهای $+Q$ و $-Q$
یا استفاده از رابطه $E=-\nabla V$ ✓

$$E = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial r}\hat{a}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\hat{a}_\theta$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\left(\frac{r-d\cos\theta}{r_1^3} - \frac{r+d\cos\theta}{r_2^3}\right)\hat{a}_r + d\sin\theta\left(\frac{1}{r_1^3}+\frac{1}{r_2^3}\right)\hat{a}_\theta\right]$$

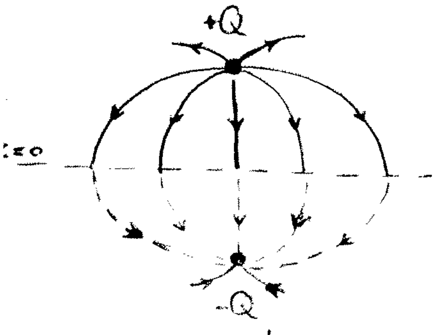
به ازای $\theta=\frac{\pi}{2}$ مولفه عمودی میدان الکتریکی بر صفحه هادی و

از آنجا چگالی توزیع بارهای القائی محاسبه می‌شوند.

$$E_n = -E\Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{-Qd}{2\pi\varepsilon_0(r^2+d^2)^{3/2}}$$

$$\rho_s = \varepsilon_0 E_n = \frac{-Qd}{2\pi(r^2+d^2)^{3/2}}$$

نکات: در ص ۱۹۳ چگونگی شرایط ۴ گانه برای $V(x,y,z)$ بیان شده است.



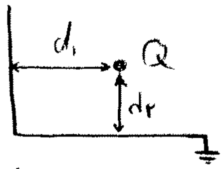
بار تصویر

بار تصویر در بیرون ناحیه‌ای قرار می‌گیرد که در آنجا میدان تعیین می‌شود.

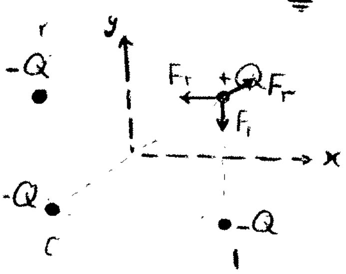
بعبارتی بارهای نقطه‌ای $+Q$ و $-Q$ برای محاسبه میدان در $z<0$ بکار نمی‌رود.

در واقع V و E هر دو در ناحیه $z<0$ صفر هستند.

با تعمیم بار نقطه‌ای به بار خطی، میدان الکتریکی بار خطی ρ_L در بالای صفحه هادی زمین شده با استفاده از ρ_L و تصویر آن $-\rho_L$ (پس از برداشتن صفحه هادی) قابل محاسبه است.



مثال: بار نقطه‌ای $+Q$ در فواصل d_1 و d_2 از دو نیم صفحه هادی متعامد زمین شده. مطلوبست، نیروی وارد بر Q در نتیجه بارهای القایی روی صفحات؟



حل رسمی معادله پواسن با شرایط مرزی پتانسیل صفر در نیم صفحه‌های هادی بسیار دشوار است.

بار تصویر $-Q$ در ربع چهارم پتانسیل نیم صفحه افقی را صفر می‌کند

〃 〃 دوم 〃 عمودی 〃

اگر بار تصویر سوم $+Q$ در ربع سوم اضافه گردد بعلت تقارن شکل شرایط مرزی پتانسیل صفر را روی هر دو نیم صفحه برقرار می‌کند.

بارهای سطحی منفی روی نیم صفحه‌ها القاء می‌شوند که تاثیر آنها بر روی Q را می‌توان از تاثیر سه بار تصویر تعیین نمود.

$$F = F_1 + F_2 + F_3$$

مطابق شکل:

$$\begin{cases} F_1 = -a_y \dfrac{Q^2}{4\pi\varepsilon(2d_2)^2} \\[2ex] F_2 = -a_x \dfrac{Q^2}{4\pi\varepsilon(2d_1)^2} \\[2ex] F_3 = \dfrac{Q^2}{4\pi\varepsilon\left[(2d_1)^2+(2d_2)^2\right]^{3/2}}\left(2d_1\hat{a}_x + 2d_2\hat{a}_y\right) \end{cases}$$

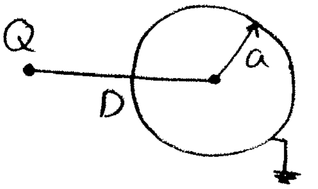
$$\rightarrow F = \frac{Q^2}{16\pi\varepsilon_0}\left\{ a_x\left[\frac{d_1}{(d_1^2+d_2^2)^{3/2}} - \frac{1}{d_1^2}\right] + a_y\left[\frac{d_2}{(d_1^2+d_2^2)^{3/2}} - \frac{1}{d_2^2}\right]\right\}$$

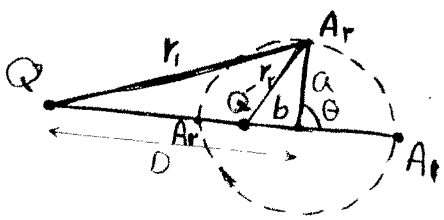
پتانسیل الکتریکی و شدت میدان در نقاط ربع اول و چگالی بار سطحی القاء شده روی دو نیم صفحه نیز بصورت مشابه قابل محاسبه است.

* بار نقطه‌ای در مقابل کره هادی:

کره هادی را با بار نقطه‌ای Q' (بعنوان تصویر Q) جایگزین نموده و مکان و اندازه Q' را به گونه‌ای پیدا می‌کنیم که سطح هم‌پتانسیل با پتانسیل صفر در محل سطح کره هادی پدید آید.

بر اساس تقارن مسئله، چنین تصویری در صورت وجود روی خطی که Q را به مرکز کره وصل می‌کند قرار دارد.





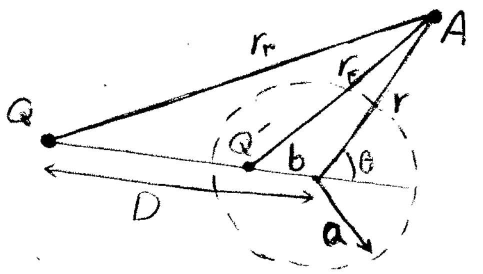
مطلوبست b ، Q'

روش: نوشتن پتانسیل در نقاط A_1 و A_2 (برابر صفر)

$$\begin{cases} V_{A_1} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{Q}{D+a} + \dfrac{Q'}{a+b}\right) = 0 \\ V_{A_2} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{Q}{D-a} + \dfrac{Q'}{a-b}\right) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Q' = -\dfrac{a}{D}Q \\ b = \dfrac{a^2}{D} \end{cases} \leftarrow \begin{cases} Q(a+b)+Q'(D+a)=0 \\ Q(a-b)+Q'(D-a)=0 \end{cases}$$

حال بررسی می‌کنیم آیا پتانسیل ناشی از Q و تصویر Q' در نقطه دلخواه A_3 روی سطح کره صفر می‌شود؟

$$V_{A_3} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_1} + \frac{Q'}{4\pi\varepsilon_0 r_2} \quad \text{و} \quad \begin{cases} r_1 = \sqrt{D^2+a^2+2Da\cos\theta} \\ r_2 = \sqrt{b^2+a^2+2ba\cos\theta} \end{cases}$$



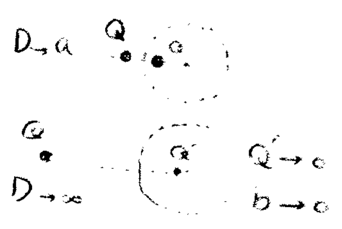
با جایگزینی مقادیر Q' ، b ، r_1 و r_2 ، پتانسیل V_{A_3} صفر می‌شود.

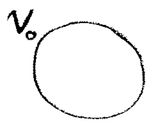
بعبارتی بارهای Q و Q' سطح هم‌پتانسیل به مقدار صفر در سطح کره ایجاد می‌کنند.

پتانسیل نقطه دلخواه A در فضای اطراف کره:

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_3} - \frac{(a/D)Q}{4\pi\varepsilon_0 r_4} \quad , \quad \begin{cases} r_3 = \sqrt{D^2+r^2+2Dr\cos\theta} \\ r_4 = \sqrt{\left(\dfrac{a^2}{D}\right)^2+r^2+2\dfrac{a^2}{D}r\cos\theta} \end{cases}$$

مشابه مثال قبل می‌توان میدان الکتریکی را از رابطه $\vec{E} = -\nabla V$ و چگالی توزیع بارهای القایی روی سطح کره را از رابطه $\rho_s = \varepsilon_0 E_n = \varepsilon_0 E_r$ به ازای $r=a$ بدست آورد.





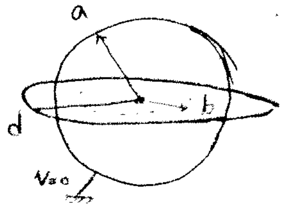
اگر کره از ابتدا زمین نشده باشد و پتانسیل برابر V_0 داشته باشد،

برای یافتن تابع پتانسیل کره را با بار تصویری Q' به روش فوق جایگزین می‌کنیم.

آنگاه تصویری دوم که بار آن برابر $Q''=4\pi\epsilon_0 a V_0$ باشد در مرکز کره قرار می‌دهیم تا پتانسیل سطح کره تا حد V_0 افزایش یابد.

روش تصویر را همچنین می‌توان در حل مسائلی نظیر بار نقطه‌ای مقابل یک نیم‌فضای اشغال شده از ماده عایق و بار نقطه‌ای در مقابل کره‌ای از جنس عایق بکار گرفت.

حلقه‌ای با چگالی بار خطی یکنواخت ρ_l به شعاع d، هم مرکز با کره هادی به شعاع a قرار دارد.



بار تصویر را بدست آورید.

تعمیم بار نقطه‌ای:

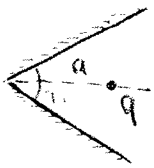
$$\begin{cases} q' = -q\dfrac{a}{d} \\ b = \dfrac{a^2}{d} \end{cases}$$

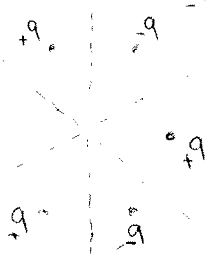
کل بار خطی $Q = \rho_l l = \rho_l 2\pi d$

$$\begin{cases} q' = -q\dfrac{a}{d} \\ b = \dfrac{a^2}{d} \end{cases}$$

چگالی بار $$\rho_l' = \frac{q'}{2\pi b} = \frac{-q\frac{a}{d}}{2\pi \times \frac{a^2}{d}} = \frac{-Q}{2\pi a} = \frac{-\rho_l 2\pi d}{2\pi a} = -\rho_l \frac{d}{a}$$

دو صفحه رسانا با یکدیگر زاویه $60°$ تشکیل می‌دهند. بار مثبت $+q$ را از نقاط به فاصله a از محل برخورد دو صفحه روی نیمساز آن قرار می‌دهیم. انرژی لازم را بدست آورید.





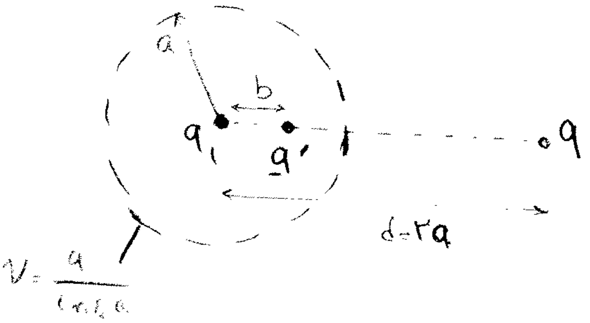
معادل اصل تصویر:

$$V = 2\left(\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 a}\right) + 2\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{3}a}\right) + \left(\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 (2a)}\right)$$

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}\left[-2 + \frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2}\right] = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(-2.5 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$W = \frac{1}{2} q V = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 a}(-1.3453)$$

کره‌ای هادی به شعاع a به پتانسیل $\frac{q}{4\pi\varepsilon a}$ متصل است. بار نقطه‌ای q به فاصله $2a$ از مرکز کره قرار دارد. نیروی وارده از کره بر بار نقطه‌ای را محاسبه کنید.

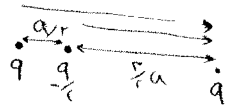


$$q' = -\frac{a}{d}q = \frac{-q}{2}$$

$$b = \frac{a^2}{d} = \frac{a^2}{2a} = \frac{a}{2}$$

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon a} \longrightarrow$$

پتانسیل کره را می‌توان با بار نقطه‌ای q در مرکز کره جایگزین کرد.



معادل:

$$F_1 = \frac{kqq_1}{(2a)^2} = \frac{kq^2}{4a^2}$$

$$F_2 = \frac{k(-\frac{q}{2})q}{(\frac{3}{2}a)^2} = \frac{-2kq^2}{9a^2}$$

$$F = F_1 + F_2 = \frac{kq^2}{36a^2}$$

ثابت دی الکتریک نسبی ماده‌ای را که چگالی فلوی الکتریکی آن ۵ برابر پلاریزاسیون است، را بدست آورید.

$$① \quad P = D - \varepsilon_0 E$$

$$② \quad D = \varepsilon_0 \varepsilon_r E$$

$$\underline{D = 5P}$$

$$② \Rightarrow E = \frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{5P}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

$$① \quad P = D - \varepsilon_0 E = 5P - \frac{5P}{\varepsilon_r} = 5P\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)$$

$$5\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right) = 1 \longrightarrow \varepsilon_r = \frac{5}{4}$$