میدانهای الکتریکی ساکن :

در این بخش ابتدا میدانهای الکتریکی و مغناطیسی ساکن (مستقل از زمان) بررسی شده و پس از طی سیر تکاملی این نظریه، معادلات ماکسول نتیجه میشود و پس میدانهای الکترومغناطیسی مطالعه میشود.

میدان الکتریکی ناشی از بارهای ساکن ناشی از توزیعهای نقطهای، خطی، سطحی و حجمی به چندین طریق محاسبه میشود :

- مستقیماً با استفاده از قانون کولمب
- با استفاده از قانون گاوس
- با محاسبه پتانسیل و بدست آوردن گرادیان آن

واحد اندازهگیری بار الکتریکی کولمب C است.

کوچکترین مقدار بار الکتریکی، بار یک الکترون و برابر -1.6×10^{-19} C میباشد.

قانون کولمب :

توسعه الکتریسیته ساکن با قانون تجربی کولمب در سال ۱۷۸۵ در مورد نیروی بین دو بار نقطهای آغاز شده است.

نتایج تجربی نشان داده که نیروی بین دو بار الکتریکی ساکن و نقطهای q_1, q_2 به فاصله R از یکدیگر به گونهای است که :

- بارهای هم علامت یکدیگر را دفع و بارهای غیر همعلامت یکدیگر را جذب میکنند
- نیروی بین دو بار در امتداد خطی عمل میکند که دو بار را به هم وصل میکند.
- اندازه نیرو متناسب با حاصلضرب بارهاست
- اندازه نیرو متناسب با عکس مربع فاصله دو بار است.

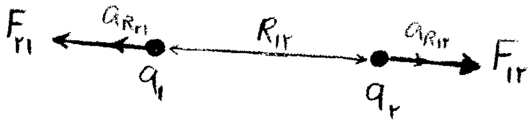
قانون کولمب به فرم ریاضی عبارتست از :

$$\overset{N}{F_{12}} = a_{R_{12}}\, k \frac{q_1 q_2}{R_{12}^2}$$

F_{12} : نیروی برداری وارد بر q_2 توسط q_1 — دافعه ⊕ : q_1, q_2 هم علامت ؛ جاذبه ⊖ : مختلف العلامه

$a_{R_{12}}$: بردار واحد در جهت q_1 به q_2

k : ثابت تناسب وابسته به محیط و دستگاه واحدهاست.



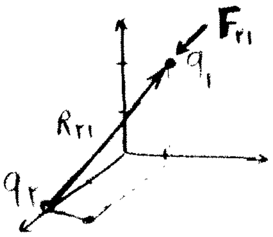
نیروی دافعه بین دو بار همعلامت

$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ سیستم M.K.S. : $\varepsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\pi} = 8.85\times10^{-12}$ ثابت گذردهی Permittivity

ثابت نفوذ الکتریکی خلاء

$$-F_{12} = F_{21}$$

تمرین ۱: بار q_1 در (۰،۱،۲) متر و بار q_2 در (۲،۰،۰) متر قرار دارد.



نیرویی که از طرف $q_2(-300\mu C)$ بر $q_1(20\mu C)$ وارد می‌شود را محاسبه کنید.

$$\underset{q_1}{(0,1,2)} - \underset{q_2}{(2,0,0)}$$

$$R_{21} = -2a_x + a_y + 2a_z$$

$$|R_{21}| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2} \rightarrow a_{R21} = \frac{1}{3}(-2a_x + a_y + 2a_z)$$

$$F_{21} = \frac{(20\times10^{-6})(-300\times10^{-6})}{4\pi\times(\frac{10^{-9}}{36\pi})\times3^2}\left(\frac{-2a_x + a_y + 2a_z}{3}\right) = 6\left(\frac{+2a_x - a_y - 2a_z}{3}\right) N$$

اندازه نیرو ۶ نیوتن (جاذبه)

تمرین ۲: چهار بار همنام $20\mu C$ بر روی محورهای x و y (در نقاط $\pm4m$) قرار گرفته است.

بار $100\mu C$ نیز در نقطه (۰،۰،۳) متر قرار دارد. نیروی وارد بر این بار را محاسبه کنید.

فاصله $R = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

از طرف بار q_2 نیروی زیر بر بار q وارد می‌شود:

$$\frac{(10^{-4})(20\times10^{-6})}{4\pi(10^{-9}/36\pi)5^2}\left(\frac{-4a_y + 3a_z}{5}\right)$$

مولفه y این نیرو توسط نیروی ناشی از بار q_4 خنثی می‌شود.

بطور مشابه مولفه x مربوط به دو بار q_1 و q_3 نیز با هم خنثی می‌شوند.

$$\Rightarrow \quad F = 4\times\frac{18}{25}\times\left(\frac{3}{5}a_z\right) \doteq 1.73\, a_z \; N \quad , \frac{216}{125}$$

۳ مثال: بار نقطه‌ای $Q = 0.5\mu C$ در مبداء مختصات قرار دارد. میدان الکتریکی ناشی از آن را در نقطه (۰،۳،۴) بدست آورید.

$$\vec{R} = 3a_y + 4a_z \quad , \quad |R| = 5 \quad , \quad a_R = 0.6a_y + 0.8a_z$$

$$E = \frac{0.5\times10^{-6}}{4\pi\times\frac{10^{-9}}{36\pi}\times5^2}(0.6a_y + 0.8a_z) = 180(0.6a_y + 0.8a_z)\ \frac{V}{m}$$

اندازه E برابر $180\ V/m$

F_{12}

مثال: بار الکتریکی $q_1 = 3\times 10^{-4}C$ در نقطه $P(1,2,3)$ و $q_2 = -10^{-4}C$ در نقطه $M(2,0,5)$ قرار دارد. مطلوب است نیروی q_1 بر q_2 ؟

(واحد: m)

$$R = \sqrt{(2-1)^2 + (0-2)^2 + (5-3)^2} = 3$$

$$\vec{a}_{R_{12}} = \frac{\vec{R}}{|R|} = \frac{(2-1)\hat{a}_x + (0-2)\hat{a}_y + (5-3)\hat{a}_z}{3} = \frac{\hat{a}_x - 2\hat{a}_y + 2\hat{a}_z}{3}$$

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\frac{10^{-9}}{36\pi}}\frac{(3\times10^{-4})(-10^{-4})}{3^2}\vec{a}_{R_{12}} = 9\times10^{9}\times\frac{-3\times10^{-8}}{9}\vec{a}_{R_{12}} = 10(-\hat{a}_x + 2\hat{a}_y - 2\hat{a}_z)\ N$$ نیوتن

شدت میدان الکتریکی:

مطابق قانون کولمب وقتی بار q_2 در مجاورت بار q_1 قرار می‌گیرد، نیروی (نشان) اعمال می‌شود.

بعبارتی بار q_1 در اطراف خود میدان ایجاد می‌کند که به هر باری که در آن میدان قرار گیرد، نیروی اعمال می‌شود.

تعریف: نیرویی را که بار q_1 بر واحد بار مثبت در نقطه‌ای از فضا وارد می‌کند، شدت میدان الکتریکی حاصل از بار q_1 در آن نقطه گویند

نیروی بار q_1 بر بار $q_2 = +1C$:
$$E = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R^2}\hat{a}_{R_{12}} \quad (\frac{N}{C}) \text{ یا } (\frac{V}{m})$$

شدت میدان الکتریکی یک بار نقطه‌ای مثبت: در جهت شعاعی و به سمت خارج

اندازه متناسب با بار و معکوس مربع فاصله

پرسش (۲) شکل

مثال: شدت میدان الکتریکی ناشی از بار نقطه‌ای $+5nC$ واقع در محل $Q(0.2, 0.1, -2.5)$ در هوا را در نقطه $P(-0.2, 0, -2.3)$ تعیین کنید. (ابعاد برحسب متر) (تمرین)

بردار مکان نقطه میدان P: $R = \vec{OP} = -a_x 0.2 - 2.3 a_z$

بردار مکان بار نقطه‌ای Q: $R' = \vec{OQ} = 0.2a_x + 0.1a_y - 2.5a_z$

تفاضل: $R - R' = -0.4a_x - 0.1a_y + 0.2a_z$

اندازه تفاضل: $|R - R'| = \sqrt{(-0.4)^2 + (-0.1)^2 + (0.2)^2} = 0.458\ m$

میدان در محل P:
$$E_P = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{R-R'}{|R-R'|^3} = 9\times10^{9}\times\frac{5\times10^{-9}}{0.458^3}(-0.4a_x - 0.1a_y + 0.2a_z)$$
$$= 214.5\,(-0.873a_x - 0.218a_y + 0.437a_z)\ \frac{V}{m}$$

اندازه میدان: $214.5\ \frac{V}{m}$

ما شدت میدان الکتریکی را بصورت نیرو بر واحد بار (بار آزمون ساکن بسیار کوچک) تعریف کردیم

$$E = \lim_{q \to 0} \frac{F}{q} \quad (V/m)$$

بار آزمون باید آنقدر کوچک باشد که توزیع بار منبع را تغییر ندهد.

البته حداقل یک الکترون می‌باشد. (غیرصفر)

$F_{12} = q_2 E_{12}$ $\qquad$ $F = qE \quad (N)$

اصول موضوعی الکترواستاتیک در فضای آزاد:

$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ (ρ → چگالی بار حجمی C/m^3، ϵ_0 → گذردهی فضای آزاد) : میدان الکتریکی ساکن غیرسلونوئیدی است (برای $\rho \neq 0$)

$\nabla \times E = 0$: میدان الکتریکی ساکن غیرگردشی است. (ذخیره شونده)

معادلات فوق روابط نقطه‌ای هستند و در هر نقطه فضا برقرار می‌باشند (فرم دیفرانسیلی)

در کاربردهای عملی برای محاسبه میدان کل ناشی از یک توده یا توزیع بار از فرم انتگرالی استفاده می‌کنیم.

$$\int_V \nabla \cdot E \, dv = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho \, dv$$

با استفاده از قضیه دیورژانس داریم:

$$\oint_S E \cdot ds = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

* Q کل بار موجود در حجم V که توسط سطح S احاطه شده.

معادله فوق شکلی از قانون گوس است که بیان می‌کند:

شار کل خروجی شدت میدان الکتریکی از هر سطح بسته در فضای آزاد برابر کل بار داخل سطح تقسیم بر ϵ_0 است.

$$\left\{ \oint_S D \cdot ds = Q \right.$$

یا { انتگرال چگالی شار الکتریکی بر روی یک سطح بسته برابر مقدار باری است که در داخل آن قرار دارد.

بطور مشابه برای رابطه $\nabla \times E = 0$، با انتگرال‌گیری و بکارگیری قضیه استوکس داریم:

$$\oint_C E \cdot dl = 0$$

یعنی: انتگرال خطی شدت میدان الکتریکی ساکن دور هر مسیر بسته صفر است.

انتگرال‌گیری از $E \cdot dl$ بر روی هر مسیر بیانگر ولتاژ در امتداد آن مسیر است

$\oint E \cdot dl = 0$ بیانی برای قانون ولتاژ کیرشف در نظریه مدار است

$$KVL: \sum_{\text{یک مسیر بسته}} V_i = 0$$

((خلاصه)): اصول موضوعی الکترواستاتیک در فضای آزاد

فرم دیفرانسیلی	فرم انتگرالی
$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\oint_S E \cdot ds = \frac{Q}{\epsilon_0}$
$\nabla \times E = 0$	$\oint_C E \cdot dl = 0$

مثال ۱۴: بار یک نانوکولنی در مبدأ مختصات قرار دارد. چه باری در نقطه (۲،۰،۰) قرار گیرد تا E_y در نقطه (۲،۳،۲) صفر شود؟

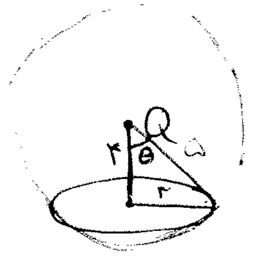
$$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}\hat{a}_r=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}$$

برآیند $E=E_1+E_2=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q(2a_x+3a_y+2a_z)}{(\sqrt{2^2+3^2+2^2})^3}+\frac{q_x(3a_y+2a_z)}{(\sqrt{3^2+2^2})^3}\right]$

برای حالت مورد نظر $E_y=0$ داریم:

$$\frac{\sqrt{13}^3}{\sqrt{17}^3}\qquad \frac{3q}{(\sqrt{2^2+3^2+2^2})^3}+\frac{3q_x}{(\sqrt{3^2+2^2})^3}=0\Rightarrow \boxed{q_x\simeq -0.3\,nC}$$

مثال ۱۵: بار نقطه‌ای Q در فاصله ۴ متری مرکز دایره‌ای به شعاع ۳ متر قرار دارد. شار الکتریکی عبوری از سطح دایره‌ای را بدست آورید.



بار Q را در مرکز کره‌ای به شعاع ۵ متر فرض می‌کنیم.

جواب: شار الکتریکی گذرنده از سطح عرقچین کروی که برابر سطح دایره‌ای است برابر است.

$$tg\,\theta=\frac{3}{4}\longrightarrow \theta=tg^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$$

در روی سطح کره داریم:

$$\vec{D}=\frac{Q}{4\pi r^2}\hat{a}_r=\frac{Q}{100\pi}\hat{a}_r$$

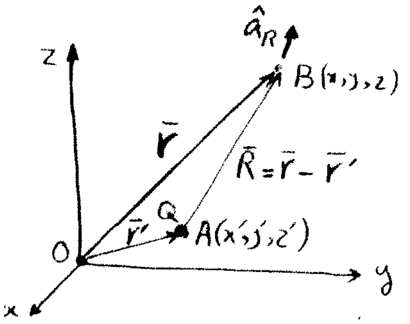
$$\int D\cdot ds=\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=\pi-tg^{-1}\frac{3}{4}}^{\pi}\left(\frac{Q}{100\pi}a_r\right)\cdot(r^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi)$$

$$=2\pi\,\frac{Q}{100\pi}\cdot 5^2\left[-\cos\theta\right]_{\pi-tg^{-1}(\frac{3}{4})}^{\pi}=\frac{Q}{2}\times 0.2=\boxed{\frac{Q}{10}}$$

اگر بار با اندازه Q کولمب در مبدأ مختصات باشد، شدت میدان الکتریکی در نقطه‌ای به مختصات (r, θ, φ) :

برداری است که فقط مولفه $\hat{a}_r$ خواهد داشت:

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\hat{a}_r$$



اگر بار Q در نقطه‌ای غیر از مبدأ مختصات باشد دیگر تقارن کروی نخواهیم داشت.

در این حالت شدت میدان ناشی از بار Q در نقطه A در نقطه B عبارت است از:

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\,\hat{a}_R$$

$$\left.\bar{R} = \bar{r} - \bar{r}' \quad , \quad \hat{a}_R = \frac{\bar{R}}{|\bar{R}|} = \frac{\bar{r} - \bar{r}'}{|\bar{r} - \bar{r}'|}\right\} \Rightarrow E(\bar{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\bar{r} - \bar{r}'}{|\bar{r} - \bar{r}'|^3} \quad \frac{N}{m}$$

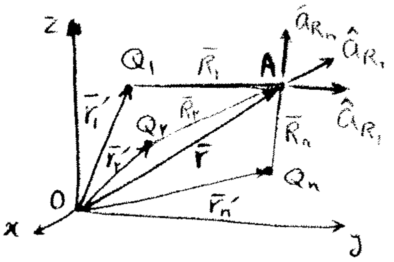
قاعده: مختصات
- (x, y, z) : نقاطی که در آن میدان محاسبه می‌شود.
- (x', y', z') : نقاطی که توزیع بار الکتریکی اشغال می‌شود.

تمرین میدان $\vec{E}$

۱۸ جزوه تمرین مثال ۲-۲ : محاسبه شدت میدان الکتریکی در داخل یک پوسته فلزی $(E = 0)$

میدان الکتریکی ناشی از مجموعه چندین بار نقطه‌ای گسسته : (جمع آثار)

میدان الکتریکی چندین بار نقطه‌ای را می‌توان از جمع برداری میدان‌هایی که از تک تک بارها حاصل می‌شود، بدست آورد.



$$\vec{E} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1^2}\hat{a}_{R_1} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2^2}\hat{a}_{R_2} + \dots + \frac{Q_n}{4\pi\epsilon_0 R_n^2}\hat{a}_{R_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0 R_i^2}\hat{a}_i$$

$$\hat{a}_{R_i} = \frac{\bar{R}_i}{|\bar{R}_i|} \quad , \quad R_i = |\bar{r} - \bar{r}_i| \quad \Rightarrow \quad E(\bar{r}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\bar{r} - \bar{r}_i'}{|\bar{r} - \bar{r}_i'|^3}$$

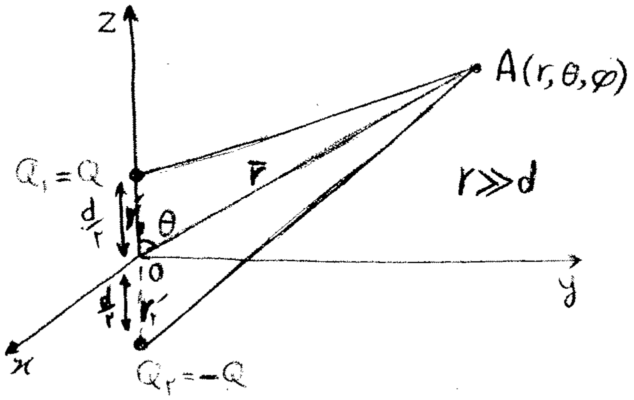
دوقطبی الکتریکی :

دوقطبی الکتریکی ، دو بار نقطه‌ای مساوی و مختلف العلامه به فاصله d

شدت میدان الکتریکی در فواصل دور : $(r \gg d)$

$$* \; \bar{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{Q\left[r\hat{a}_r - \frac{d}{2}\hat{a}_z\right]}{\left|r\hat{a}_r - \frac{d}{2}\hat{a}_z\right|^3} + \frac{-Q\left[r\hat{a}_r + \frac{d}{2}\hat{a}_z\right]}{\left|r\hat{a}_r + \frac{d}{2}\hat{a}_z\right|^3}\right]$$

$$\begin{cases} Q_1 = Q \quad , \quad Q_2 = -Q \\ \bar{r} = r\hat{a}_r \quad , \quad \bar{r}_1' = \frac{d}{2}\hat{a}_z \quad , \quad \bar{r}_2' = -\frac{d}{2}\hat{a}_z \end{cases}$$



$$\left|r\hat{a}_r \pm \frac{d}{2}\hat{a}_z\right|^{-3} = \left[\left(r\hat{a}_r \pm \frac{d}{2}\hat{a}_z\right)\cdot\left(r\hat{a}_r \pm \frac{d}{2}\hat{a}_z\right)\right]^{-\frac{3}{2}} = \left[r^2 + \frac{d^2}{4} \pm rd\cos\theta\right]^{-\frac{3}{2}}$$

فرض $d \ll r$
$$\simeq \left[r^2 \pm rd\cos\theta\right]^{-\frac{3}{2}} = r^{-3}\left[1 \pm \frac{d\cos\theta}{r}\right]^{-\frac{3}{2}}$$

بسط دوجمله‌ای
$$\simeq r^{-3}\left[1 \mp \frac{3}{2}\frac{d}{r}\cos\theta\right]$$

با جایگذاری در رابطه * داریم :

$$\bar{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left(3d\cos\theta\,\hat{a}_r - d\,\hat{a}_z\right)$$

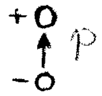
می‌دانیم : $\hat{a}_z = \cos\theta\,\hat{a}_r - \sin\theta\,\hat{a}_\theta$

$$\Rightarrow \quad \bar{E} = \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left(2\cos\theta\,\hat{a}_r + \sin\theta\,\hat{a}_\theta\right) \quad \frac{V}{m}$$

میدان هریک از بارها بتنهایی با r^2 متناسب است ولی میدان دوقطبی با r^3 متناسب است.

این نتیجه آنست که دو بار نقطه‌ای مختلف العلامه در فواصل دور میدان‌های یکدیگر را تضعیف می‌کنند.

درحالتی که d به سمت صفر میل می‌کند ولی اندازه Qd ثابت باقی بماند رابطه برقرار می‌ماند.



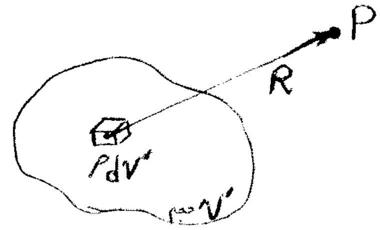
کمیت $p=Qd$ را گشتاور دوقطبی می‌نامند و جهت آن از بار منفی به سمت بار مثبت می‌باشد.

میدان الکتریکی دوقطبی دارای گشتاور p در امتداد محور z برابر است با:

$$E = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(2\cos\theta\,\hat{a}_r + \sin\theta\,\hat{a}_\theta)$$

میدان الکتریکی ناشی از توزیع پیوسته بار:

این میدان با انتگرال‌گیری سهم میدان یک جزء کوچک بار روی توزیع بار (به شیوه جمع آثار) بدست می‌آید



$\rho\ (C/m^3)$

در یک توزیع بار حجمی، چون یک جزء کوچک دیفرانسیلی بار مانند یک بار نقطه‌ای رفتار می‌کند، سهم بار $\rho dv'$ موجود در جزء کوچک حجم دیفرانسیلی dv' در شدت میدان الکتریکی نقطه P عبارتست از:

$$dE = a_R \frac{\rho\, dv'}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

برای کل حجم داریم

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{v'} a_R \frac{\rho}{R^2}\, dv' \quad V/m$$

انتگرال سه‌گانه:

$$a_R = \frac{R}{|R|} \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{v'} \rho \frac{R}{R^3}\, dv' \quad V/m$$

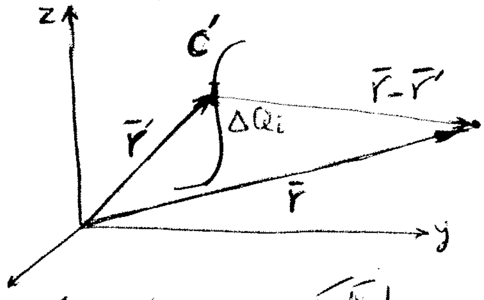
اگر بار روی یک سطح با چگالی بار سطحی $\rho_s\ (C/m^2)$ توزیع شده باشد، انتگرال باید روی سطح صورت گیرد.

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{s'} a_R \frac{\rho_s}{R^2}\, ds' \quad V/m$$

در مورد بار خطی نیز داریم،

$\rho_l\ (C/m)$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{l'} a_R \frac{\rho_l}{R^2}\, dl' \quad V/m$$



بار الکتریکی توزیع شده در امتداد منحنی C'

خط باردار لزوماً مستقیم و صفحه باردار لزوماً مسطح نمی‌باشد.

$$\Delta E_i = \frac{\Delta Q_i}{4\pi\varepsilon_0 R_i^2}\hat{a}_{R_i} \quad , \quad Q = \sum_i \Delta Q_i = \sum_i \rho_l \Delta l_i$$

در حالت حدی برای $\Delta l_i \to 0$

$$E = \sum_i \Delta \bar{E}_i = \int \frac{\rho_l\, dl'}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\hat{a}_R$$

ادامه کتاب صفحه ۶۴

میدان الکتریکی توزیع پیوسته خطی:

میدان ناشی از المان طولی $\Delta E_i = \dfrac{\Delta Q_i}{4\pi\varepsilon_0 R_i^2}\,\hat{a}_{R_i} = \dfrac{\rho_L\,\Delta l_i'}{4\pi\varepsilon_0 R_i^2}\,\hat{a}_{R_i}$

جمع آثار

$$E = \sum_i \Delta \bar{E}_i = \sum_i \frac{\rho_L \Delta l_i'}{4\pi\varepsilon_0 R_i^2}\,\hat{a}_{R_i} \xrightarrow[\Delta l_i' \to 0]{\text{حد}} E = \int_{c'} \frac{\rho_L\, dl'}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\,\hat{a}_R$$

$$\begin{cases} R = \bar{r} - \bar{r}' \\ \hat{a}_R = \dfrac{\bar{R}}{|\bar{R}|} = \dfrac{\bar{r}-\bar{r}'}{|\bar{r}-\bar{r}'|} \end{cases} \Rightarrow \bar{E}(\bar{r}) = \int_{c'} \frac{\rho_L(r')\cdot(\bar{r}-\bar{r}')}{4\pi\varepsilon_0 |\bar{r}-\bar{r}'|^3}\, dl'$$

مثال: شدت میدان الکتریکی ناشی از بار خطی در امتداد محور z از $z=-d$ تا $z=d$ با چگالی یکنواخت ρ_{L_0} در تمام نقاط فضا؟

۲۶ صفحه‌ای

$dl' = dz'$

$\bar{r}' = z'\hat{a}_z$

تقارن استوانه‌ای توزیع بار ← دستگاه مختصات استوانه‌ای

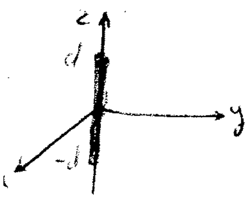
$\bar{r} = r\hat{a}_r + z\hat{a}_z \rightarrow \bar{r}-\bar{r}' = r\hat{a}_r + (z-z')\hat{a}_z$

جایگذاری $\Rightarrow$

$$E = \frac{\rho_{L_0}}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-d}^{d} \frac{r\hat{a}_r + (z-z')\hat{a}_z}{[r^2+(z-z')^2]^{3/2}}\,dz'$$

$$= \frac{\rho_{L_0}}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\left[\frac{-(z-z')\hat{a}_r}{r\sqrt{r^2+(z-z')^2}}\right]_{-d}^{d} + \left[\frac{\hat{a}_z}{\sqrt{r^2+(z-z')^2}}\right]_{-d}^{d}\right\}$$

$$\Rightarrow E = \frac{\rho_{L_0}}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\left[\frac{-(z-d)}{r\sqrt{r^2+(z-d)^2}} \overset{?}{+} \frac{(z+d)}{r\sqrt{r^2+(z+d)^2}}\right]\hat{a}_r + \left[\frac{1}{\sqrt{r^2+(z-d)^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2+(z+d)^2}}\right]\hat{a}_z\right\}$$



نکات:

۱) شدت میدان مولفه φ ندارد

۲) در صفحه xy $(z=0)$ با جایگذاری $z=0$ داریم:

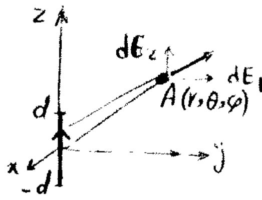
$$\bar{E} = \frac{\rho_{L_0}}{2\pi\varepsilon r}\,\frac{d}{\sqrt{r^2+d^2}}\,\hat{a}_r$$

تقارن نسبت به z ← میدان $\bar{E}$ فقط مولفه شعاعی E_r دارد.

۳) بار نامحدود $d\to\infty$ ← مولفه E_z صفر می‌شود.

$\underline{d \gg r}$

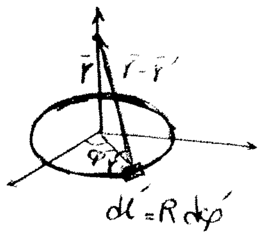
$$E = \frac{\rho_{L_0}}{2\pi\varepsilon_0 r}\,\hat{a}_r$$



مثال: میدان الکتریکی بار خطی در امتداد محور z از $z=-d$ تا $z=d$ با چگالی یکنواخت ρ_L

$$E = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 r}\frac{d}{\sqrt{r^2+d^2}}\cdot\hat{a}_r \xrightarrow[r \ll d]{\text{حالت نهایت}} E = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 r}\cdot\hat{a}_r$$

آ صفحاتی اجتک



مثال: بار الکتریکی یکنواخت بر روی حلقه‌ای به شعاع R، شدت میدان روی محور حلقه؟

صفحاتی

$$\bar{r} = z\hat{a}_z$$

$$\bar{r}' = R\hat{a}_r = R(\cos\varphi'\hat{a}_x + \sin\varphi'\hat{a}_y)$$

$$\bar{r}-\bar{r}' = -R\cos\varphi'\hat{a}_x - R\sin\varphi'\hat{a}_y + z\hat{a}_z$$

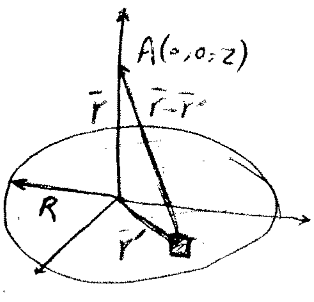
$$|\bar{r}-\bar{r}'|^3 = (z^2+R^2)^{3/2}$$

$$E = \frac{\rho_L R}{4\pi\epsilon_0(z^2+R^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi}(-R\cos\varphi'\hat{a}_x - R\sin\varphi'\hat{a}_y + z\hat{a}_z)\,d\varphi'$$

$$\int_0^{2\pi}(\bar{r}-\bar{r}')\,d\varphi' = -R\hat{a}_x\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos\varphi'\,d\varphi'}_{0} - R\hat{a}_y\underbrace{\int_0^{2\pi}\sin\varphi'\,d\varphi'}_{0} + z\hat{a}_z\int_0^{2\pi}d\varphi' = 2\pi z\hat{a}_z$$

Min
Max
صفر

$$\Rightarrow \quad E = \frac{\rho_L R z}{2\epsilon_0(z^2+R^2)^{3/2}}\hat{a}_z$$



مثال: بار الکتریکی سطحی یکنواخت با چگالی سطحی ρ_s روی یک دیسک به شعاع R توزیع شده است. شدت میدان الکتریکی در نقطه‌ای روی محور دیسک؟

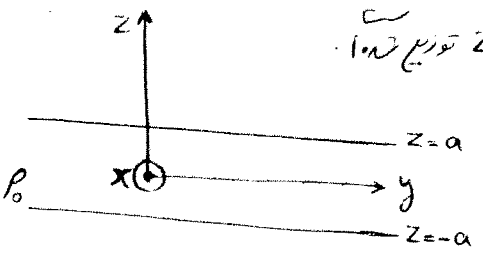
(صفحاتی)

$$\vec{E}(0,0,z) = \begin{cases} \dfrac{\rho_s}{2\epsilon_0}\left[+1 - \dfrac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right]\hat{a}_z & z>0 \\ \dfrac{\rho_s}{2\epsilon_0}\left[-1 - \dfrac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right]\hat{a}_z & z<0 \end{cases}$$

اگر $R \to \infty$: شدت میدان صفحه نامحدود :

$$\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{\rho_s}{2\epsilon_0}\hat{a}_z & z>0 \\ \dfrac{-\rho_s}{2\epsilon_0}\hat{a}_z & z<0 \end{cases} \qquad |\vec{E}| = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0}$$

مثال: بار الکتریکی یکنواخت حجمی با چگالی $\rho_v=\rho_0$ در بخشی از فضا بین دو صفحه $z=\pm a$ توزیع شده است.
شدت میدان الکتریکی بر روی محور z ؟



$$\begin{cases} \bar{r}=z\hat{a}_z \\ \bar{r}'=x'\hat{a}_x+y'\hat{a}_y+z'\hat{a}_z \end{cases}$$

$$E(0,0,z)=\frac{\rho_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_{x'=-\infty}^{\infty}\int_{y'=-\infty}^{\infty}\int_{z'}^{\infty}\frac{-x'\hat{a}_x-y'\hat{a}_y+(z-z')\hat{a}_z}{\left[x'^2+y'^2+(z-z')^2\right]^{3/2}}\,dx'\,dy'\,dz'$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x'\,dx}{\left[x'^2+y'^2+(z-z')^2\right]^{3/2}}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y'\,dy'}{\left[x'^2+y'^2+(z-z')^2\right]^{3/2}}=0$$

عبارات درون انتگرال به ترتیب توابع فرد از x' و y' است.

بنابراین میدان E فقط دارای مولفه $\hat{a}_z$ می‌باشد.

$$\bar{E}(0,0,z)=\frac{\rho_0}{4\pi\varepsilon_0}\hat{a}_z\int_{x'=-\infty}^{\infty}\int_{y'=-\infty}^{\infty}\int_{z'=-\infty}^{\infty}\frac{(z-z')}{\left[x'^2+y'^2+(z-z')^2\right]^{3/2}}\,dx'\,dy'\,dz'$$

اگر ابتدا نسبت به x' و سپس نسبت به y' انتگرال بگیریم، داریم:

$$\int_{x'=-\infty}^{\infty}\int_{y'=-\infty}^{\infty}\frac{dx'\,dy'}{\left[x'^2+y'^2+(z-z')^2\right]^{3/2}}=2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dy'}{y'^2+(z-z')^2}=\frac{2\pi}{|z-z'|}$$

$$\int_{-a}^{a}\frac{2\pi(z-z')}{|z-z'|}\,dz'=\begin{cases} 2\pi\int_{-a}^{a}dz'=4\pi a & z>a \\ -2\pi\int_{-a}^{a}dz'=-4\pi a & z<-a \\ 2\pi\int_{-a}^{z}dz'-2\pi\int_{z}^{a}dz'=4\pi z & -a<z<a \end{cases}$$

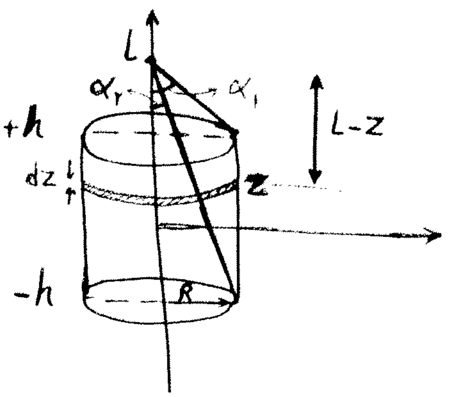
در نهایت داریم:

$$\vec{E}(0,0,z)=\begin{cases} \frac{a\rho_0}{\epsilon_0}\hat{a}_z & z>a \\ \frac{z\rho_0}{\epsilon_0}\hat{a}_z & -a<z<a \\ -\frac{a\rho_0}{\epsilon_0}\hat{a}_z & z<-a \end{cases}$$

توزیع بار در جهات x و y تا بی‌نهایت ادامه دارد و تغییراتی نسبت به x و y نداریم.

⇐ میدان الکتریکی مستقل از x و y و داریم: $E(x,y,z)=E(0,0,z)$

مسئله تکمیلی:



شدت میدان الکتریکی ناشی از بار سطحی توزیع شده بر روی سطح جانبی استوانه‌ای به شعاع R با ارتفاع $2h$ (از $-h$ تا $+h$) را در نقطه $P(0,0,L)$ را بدست آورید.

با یادآوری میدان ناشی از بار حلقه‌ای به شعاع R بر روی محور حلقه:

$$E = \frac{\rho_L R Z}{2\varepsilon_0 (Z^2+R^2)^{3/2}} \hat{a}_z$$

المان سطحی

شدت میدان الکتریکی حلقه‌ای به ارتفاع dz برابر است با:

$$dE_z = \frac{(\rho_s dz)\, R\, (L-z)}{2\varepsilon_0 \left[R^2+(L-z)^2\right]^{3/2}}$$

$$E_z = \int_{-h}^{h} dE_z$$

$$= \frac{R\rho_s}{2\varepsilon_0} \int \frac{(L-z)\, dz}{\left[R^2+(L-z)^2\right]^{3/2}}$$

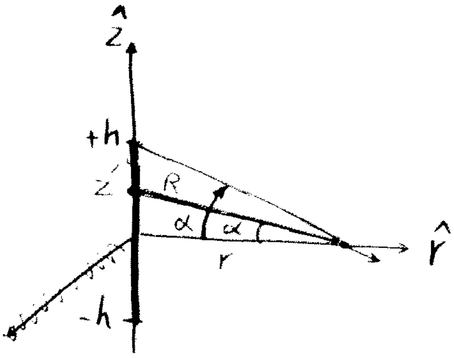
$$= \frac{R\rho_s}{2\varepsilon_0} \left\{ \frac{1}{\sqrt{R^2+(L-h)^2}} - \frac{1}{\sqrt{R^2+(L+h)^2}} \right\}$$

$$= \frac{\quad}{2\varepsilon_0} \left(\sin\alpha_1 - \sin\alpha_2 \right)$$

$$\int \frac{dz}{(r^2+z^2)^{3/2}} \Rightarrow \int \frac{dz}{\cancel{r}\left(1+\frac{z^2}{r^2}\right)^{3/2}} = \int \frac{r(1+tg^2\theta)\, d\theta}{(1+tg^2\theta)^{3/2}} = r\int \frac{d\theta}{\sqrt{1+tg^2\theta}} = r\int \frac{d\theta}{\sec\theta} = r\int_{\alpha}^{\beta} \cos\theta\, d\theta$$

$$\begin{cases} \frac{z}{r} = tg\,\theta \rightarrow z = r\, tg\,\theta \\ dz = r(1+tg^2\theta)\, d\theta \end{cases}$$

$$= r(\sin\beta - \sin\alpha)$$



محاسبه میدان ناشی از بار خطی به روش برداری:

$$E = \int_{-h}^{h} \frac{\rho_L\, dz}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\bar R}{R^3} = \frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon}\int_{-h}^{h} \frac{-z\hat a_z + r\hat a_r}{(z^2+r^2)^{3/2}}\,dz$$

$$= \frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon_0}\left\{-a_z \underbrace{\int_{-h}^{h}\frac{z\,dz}{(z^2+r^2)^{3/2}}}_{0} + \hat a_r r \int_{-h}^{h}\frac{dz}{(z^2+r^2)^{3/2}}\right\}$$

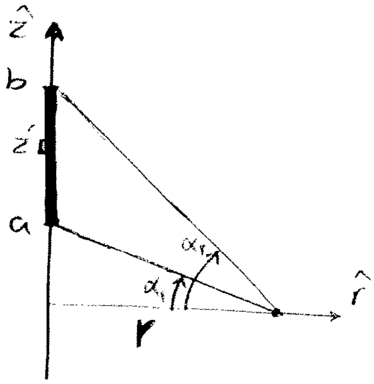
$$E = \frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{a_r}{r}\int_{-\alpha}^{+\alpha}\cos\alpha\, d\alpha\right\}$$ با فرض $z = r\tan\alpha$:

$$= \hat a_r \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0 r}\sin\alpha$$

برای خط نامحدود ($h\to\infty$):

$h \to \infty :\quad \alpha \to 90^\circ \ ,\ \sin\alpha = 1$

$$\Rightarrow\quad E = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat a_r$$



تعمیم مسئله: محاسبه میدان ناشی از بار خطی محدود از a تا b:

به علت عدم تقارن بار خطی داریم:

$$E = \hat a_z E_z + \hat a_r E_r$$

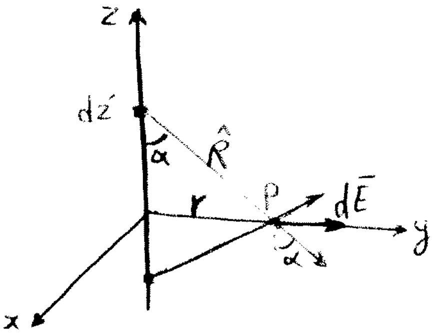
$$E_r = \frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon_0}\, r\int_a^b \frac{dz}{(r^2+z^2)^{3/2}} = \frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1\right)$$

$$E_z = \frac{-\rho_L}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{2}\int_a^b \frac{2z\,dz}{(z^2+r^2)^{3/2}} = \frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{b^2+r^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2+r^2}}\right)$$

$$= \frac{-\rho_L}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right)$$

مثال: محاسبه میدان برای

$$\begin{cases} r = 12 \\ b = 16 \\ a = 0,9 \end{cases}$$



مثال: میدان ناشی از بار خطی بی‌نهایت در امتداد محور z را .

هدف: محاسبه E در نقطه P به فاصله r از خط

E تابع Z نیست: خط بی‌نهایت
تابع φ نیست: تقارن

dz یا dl

$$dq = \rho_l dz \Rightarrow d\bar E = \frac{\rho_l dz}{4\pi\epsilon_0 R^2}\hat a_R$$

با توجه به تقارن موجود در مسئله، بردار E فقط بر روی محور $\hat r$ مولفه دارد.

$$\bar E = E_r \hat a_r$$

بنابراین کافی است اثر نقطه z' در نقطه P را بر روی محور $\hat a_r$ تصویر کنیم.

داریم:

$$dE_r = \frac{\rho_l \sin\alpha \, dz}{4\pi\epsilon_0 (r^2+z^2)}$$

با یک انتگرال‌گیری ساده داریم:

$$E_r = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho_l \sin\alpha \, dz}{4\pi\epsilon_0 (r^2+z^2)} = 2\int_0^{\infty} \frac{\rho_l \sin\alpha \, dz}{4\pi\epsilon_0 (r^2+z^2)}$$

با تغییر متغیر $z = r\cot\alpha$ داریم:

$$E = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon r}\hat a_r$$

کاربرد قانون گوس:

قانون گوس برای هر سطح بسته فرضی اختیاری برقرار است.

$$\oint_s E\cdot ds = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

قانون گوس محاسبات میدان E را برای توزیع بارهای متقارن، بر روی سطوحی که مولفه شدت میدان الکتریکی بر روی آنها ثابت باشد تسهیل می‌کند.

به عبارتی اساس بهره‌گیری از این قانون عبارت است از:

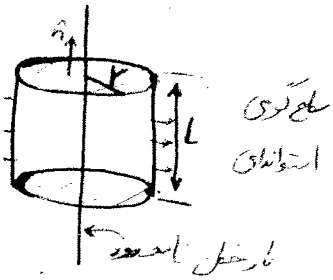
۱) تشخیص شرایط تقارن

۲) انتخاب مناسب سطحی که بر روی آن مولفه عمودی E، ناشی از یک توزیع بار مشخص ثابت است.

چنین سطحی سطح گوسی نامیده می‌شود.

این قانون برای میدان بار نقطه‌ای دارای تقارن کروی مناسب است ولی برای یک دوقطبی الکتریکی که فاقد چنین سطحی است، کاربرد ندارد.

مثال: با استفاده از قانون گاوس شدت میدان الکتریکی یک بار خطی مستقیم و بی‌نهایت طویل را با چگالی یکنواخت ρ_l در هوا تعیین کنید.



چون بار خطی نامحدود است $\Leftarrow$ میدان برآیند E باید شعاعی و عمود بر بار خطی باشد: $E=\hat{a}_r E_r$

و E مولفه‌ای در امتداد خط ندارد.

با توجه به تقارن استوانه‌ای، سطح گوسی استوانه‌ای به شعاع r و طول دلخواه L را حول بار خطی در نظر می‌گیریم.

بر روی این سطح E_r ثابت است و $ds = a_r\, r\, d\varphi\, dz$

بنابراین:

$$\oint_s E\cdot ds = \int_0^L\int_0^{2\pi} E_r\, r\, d\varphi\, dz = 2\pi r L E_r$$

بر روی سطح بالایی $ds=\hat{a}_z\, r\,dr\,d\varphi$، ولی E در آنجا مولفه z نداشته و لذا $E\cdot ds=0$

بدلیل مشابه (سطح پایینی): سطح بالا و پایین استوانه سهمی ندارند.

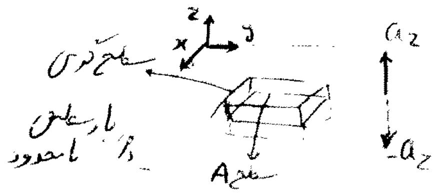
کل بار محصور در استوانه برابر است با: $Q=\rho_l L$

با جایگذاری در قانون گاوس داریم:

$$\oint_s E\cdot ds = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow 2\pi r L E_r = \frac{\rho_l L}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow E = a_r E_r = a_r \frac{\rho_l}{2\pi \ldots}$$

تمرین: مثال ۳-۶ ص ۱۰۸ چنگ را مرور کنید. شدت میدان الکتریکی بار سطح یکنواخت با چگالی بار سطحی ρ_s ؟



روشن است که میدان E عمود بر صفحه باشد.

سطح گوسی، جعبه مستطیلی با سطح بالایی و پایینی هم فاصله تا بار

سطح گوسی می‌تواند غیر مستطیلی نیز باشد.

$$E\cdot ds = (a_z E_z)\cdot(a_z ds) = E_z\, ds$$ در سطح بالایی

$$E\cdot ds = (-a_z E_z)\cdot(-a_z ds) = E_z\, ds$$ در سطح پایینی

وجوه جانبی جعبه نیز عمود بر صفحه باردار هستند $E\cdot ds = 0$ و اثری ندارند:

$$\oint_s E\cdot ds = 2E_z\int_A ds = 2E_z A$$

کل بار محصور شده در جعبه $Q = \rho_s A$

بنابراین:

$$2E_z A = \frac{\rho_s A}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \quad E_z = \begin{cases} a_z E_z = a_z \dfrac{\rho_s}{2\epsilon_0} & z>0 \\ -a_z E_z = -a_z \dfrac{\rho_s}{2\epsilon_0} & z<0 \end{cases}$$

مثال ۳-۷ ، میدان ناشی از یک ابر الکترونی با چگالی بار حجمی $\rho=-\rho_0$ در ناحیه $0\leq R\leq b$ (ρ_0 و b هر دو مثبت) چنگ ۱۱۰

و $\rho=0$ در ناحیه $R>b$ را تعیین کنید.

* شرایط منبع مفروض دارای تقارن کروی است. بنابراین سطح گوسی مناسب، سطح کروی هم مرکز می‌باشد.

میدان E در دو ناحیه تعیین می‌شود:

(۱) $0\leq R\leq b$

سطح گوسی کروی فرضی S_i با شعاع $R<b$ را در داخل ابر الکترونی در نظر می‌گیریم.

روی این سطح میدان E شعاعی و دارای اندازه ثابت است: $E=a_R E_R$, $ds=a_R ds$

کل شار روی E برابر است با:

$$\oint_{S_i} E\cdot ds = E_R\int_{S_i} ds = E_R\, 4\pi R^2$$

کل بار محصور در داخل سطح گوسی برابر است با:

$$Q=\int_V \rho\, dv = -\rho_0\int_V dv = -\rho_0\, \frac{4}{3}\pi R^3$$

با جایگذاری در قضیه دیورژانس داریم:

$$\oint_S E\cdot ds = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow \boxed{E=-a_R\frac{\rho_0}{3\epsilon_0}R} \quad 0<R\leq b$$

درون ابر الکترونی یکنواخت: میدان E به سمت مرکز جهت یافته و دارای اندازه‌ای متناسب با فاصله از مرکز است

(۲) $R\geq b$

سطح گوسی کروی S_0 با $R>b$ را خارج ابر الکترونی در نظر می‌گیریم.

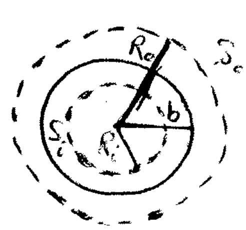
عبارت $\oint_{S_0} E\cdot ds$ همان حالت قبل است و کل بار محصور برابر است با: $Q=-\rho_0\frac{4\pi}{3}b^3$

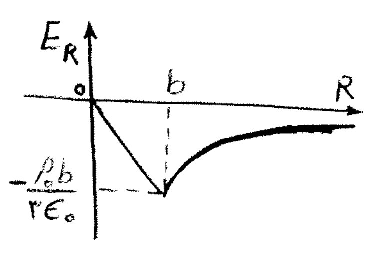
در نتیجه داریم:

$$\boxed{E=-a_R\frac{\rho_0 b^3}{3\epsilon_0 R^2}} \quad R\geq b$$

که از قانون عکس مربع فاصله کولمب بیرون می‌آید و می‌توان بطور مستقیم از رابطه کولمب نتیجه گرفت.

میدان E بیرون ابر باردار مشابه حالتی است که کل بار در یک بار نقطه‌ای در مرکز متمرکز باشد.





در این مثال اگر از قانون گوس استفاده نمی‌کردیم، می‌بایست:

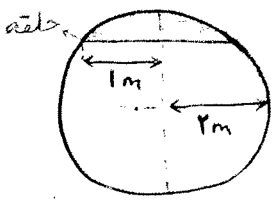
(۱) جزء کوچک حجمی دیفرانسیلی دلخواهی را در داخل ابر الکترونی انتخاب کنیم.

(۲) بردار فاصله R را از آن جزء کوچک تا یک نقطه میدان در دستگاه مختصات انتخاب شده بیان کنیم.

(۳) یک انتگرال‌گیری سه‌گانه به فرم $E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{v'} a_R \frac{\rho}{R^2}\, dv'$ انجام دهیم.

با توجه به دشواری مراحل فوق، درصورت وجود شرایط تقارن در توزیع بار از قانون گوس استفاده می‌کنیم.

تمرین:



حلقه‌ای به شعاع ۱ متر را روی کره‌ای به شعاع ۲ متر قرار می‌دهیم. زاویه فضایی که تحت آن از مرکز کره داخل حلقه محصور دیده می‌شود چقدر است و اگر بار ۱ کولن در مرکز کره قرار گیرد شار الکتریکی خارج شونده از این سطح محصور چقدر است؟

فرم نقطه‌ای قانون گوس (معادلات ماکسول)

برای بیان شکل نقطه‌ای قانون گوس ابتدا دیورژانس برداری مثل D را بدست می‌آوریم.

برحسب تعریف دیورژانس بردار در نقطه‌ای مثل (x_0, y_0, z_0) عبارتست از:

$$\nabla\cdot D = \left.\frac{\oint_s D\cdot ds}{\Delta v}\right|_{\Delta v\to 0}$$

بطور کلی سطح که حجم Δv را محصور شود، جهت بردار ds از داخل به خارج می‌باشد

در سازگان قائم حجم مکعبی به ابعاد Δx، Δy و Δz انتخاب می‌کنیم

این ابعاد آنقدر کوچک است که بردار $\vec{D}$ در هر سطح مکعب را بتوان یکنواخت انتخاب شود.

بنابراین انتگرال روی سطح ② برابر است با: $\int_{②} \bar{D}\cdot d\bar{s} = D_x(x_0+\Delta x)\,\Delta y\,\Delta z$

این انتگرال روی سطح ① برابر است با: $\int_{①} \bar{D}\cdot d\bar{s} = -D_x(x_0)\,\Delta y\,\Delta z$

علامت منفی بخاطر آنست که در این سطح بردار عمود بر سطح در جهت داخل به خارج مخالف جهت $\hat{x}$ است.

پس شار خارج شونده از سطوح ① و ② عبارتست از: $\int_{①+②} \bar{D}\cdot d\bar{s} = \left[D_x(x_0+\Delta x) - D_x(x_0)\right]\Delta y\,\Delta z$

با قرار دادن در رابطه اصلی دیورژانس داریم

$$\left.\frac{\int_{①+②} \bar{D}\cdot d\bar{s}}{\Delta v}\right|_{\Delta v\to 0} = \left.\frac{D_x(x+\Delta x) - D_x(x)}{\Delta x}\right|_{\Delta x\to 0} = \frac{\partial D_x}{\partial x} \qquad \Delta v = \Delta x\,\Delta y\,\Delta z$$

با توجه به تقارن شکل مکعب، شار خارج شونده از سطوح شش حجم برابر است با:

$$\nabla\cdot D = \left.\frac{\oint_s \bar{D}\cdot d\bar{s}}{\Delta v}\right|_{\Delta v\to 0} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

اگر بردار $\vec{D}$، بردار چگالی شار الکتریکی باشد، طبق قانون گوس $\Delta q = \oint_s D\cdot ds = \oint_v \rho\, dv$ بار محصور داخل این حجم است.

با توجه به تعریف چگالی بار ρ داریم:

$$\boxed{\nabla\cdot D = \rho}$$

خطوط میدان:

در نمایش ترسیمی میدان الکتریکی از یک دسته منحنی استفاده می‌شود که در هر نقطه از فضا بر بردار میدان مماس‌اند.

از آنجا که بردار المان طول در هر نقطه بر بردار میدان مماس است، بردار میدان و المان طول موازی هستند:

$$\bar{E}(\bar{r}) = E_x a_x + E_y a_y + E_z a_z$$

$$d\bar{l}(\bar{r}) = dx\, a_x + dy\, a_y + dz\, a_z$$

$$\bar{E}(\bar{r}) \parallel d\bar{l}(\bar{r})$$

شرط موازی بودن دو بردار متناسب بودن مولفه آنهاست.

[شامل یک دسته جواب] (معادلات خطوط میدان) $\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}$

معادلات خطوط میدان در دستگاه‌های استوانه‌ای و کروی:

$$\frac{dr}{E_r} = \frac{r\,d\varphi}{E_\varphi} = \frac{dz}{E_z} \quad , \quad \frac{dr}{E_r} = \frac{r\,d\theta}{E_\theta} = \frac{r\sin\theta\, d\varphi}{E_\varphi}$$

صفحه‌ی   مثال: خطوط میدان را (در صفحه $z=0$) برای یک بار نقطه‌ای در مبدا مختصات بدست آورید.

میدان بار نقطه‌ای:

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{a}_r$$

$$\bar{r} = x\hat{a}_x + y\hat{a}_y$$

$$\frac{\hat{a}_r}{r^2} = \frac{\bar{r}}{|\bar{r}|^3}$$

مولفه‌های x و y میدان:

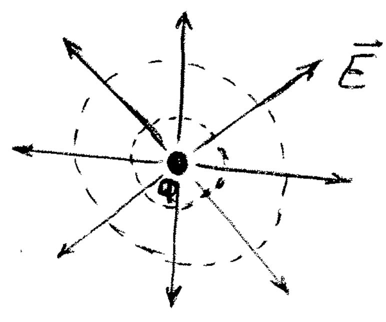
$$\Rightarrow \begin{cases} E_x = \dfrac{Qx}{4\pi\varepsilon(x^2+y^2)^{3/2}} \\[2ex] E_y = \dfrac{Qy}{4\pi\varepsilon(x^2+y^2)^{3/2}} \end{cases}$$

معادلات خطوط میدان: $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dy}{y}$$

$$\ln x = \ln y + k' = \ln ky$$

$$\Rightarrow \quad x = ky \quad (k \text{ مقدار ثابت})$$



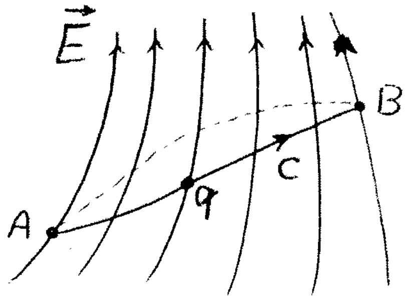
خطوط میدان بار نقطه‌ای Q

پتانسیل الکتریکی.

بار q را در میدان الکتریکی E درنظر بگیریم.

نیرویی که میدان E بر بار q وارد می‌کند در جهت خطوط میدان و اندازه آن برابر qE است.

مقدار کاری که میدان $\vec{E}$ برای حرکت دادن بار q از نقطه A به نقطه B در مسیر C انجام می‌دهد برابر است با:



$$W = q\int_A^B \bar{E}\cdot\bar{dl} = -q\int_B^A \bar{E}\cdot\bar{dl} \quad (J)$$

در انتقال بار در یک میدان الکتریکی، کار باید برعلیه میدان انجام شود.

اگر W مثبت باشد: کار توسط میدان انجام می‌شود
W منفی باشد: کار توسط عامل خارجی انجام شد.

مقدار کاری را که میدان الکتریکی برای حرکت دادن واحد بار مثبت از نقطه A به نقطه B انجام می‌دهد، اختلاف پتانسیل بین دو نقطه A و B نامیده می‌شود و بصورت V_{AB} نشان داده می‌شود.

$$V_{AB} = \frac{W}{q} = \int_A^B \bar{E}\cdot\bar{dl} = -\int_B^A \bar{E}\cdot\bar{dl}$$

کار لازم برای انتقال از A به B توسط میدان
B به A توسط عامل خارجی

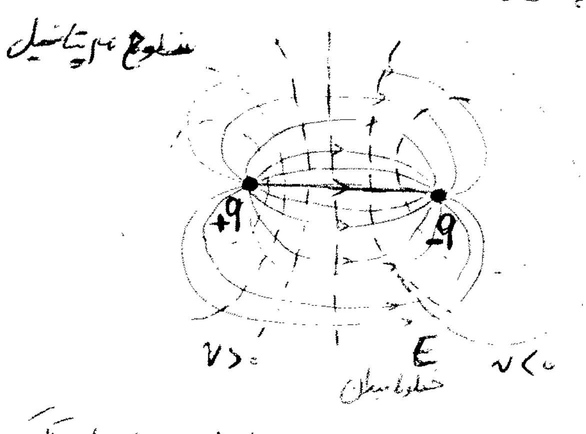
از آنجا که میدان E غیرگردشی است، انتگرال مستقل از مسیر است.

اگر مسیر C همواره بر خطوط میدان عمود باشد ($\bar{E}$ و $\bar{dl}$ متعامد) $\bar{E}\cdot\bar{dl}$ مساوی صفر در نتیجه کار لازم برای حرکت دادن بار q در امتداد مسیر C صفر خواهد بود.

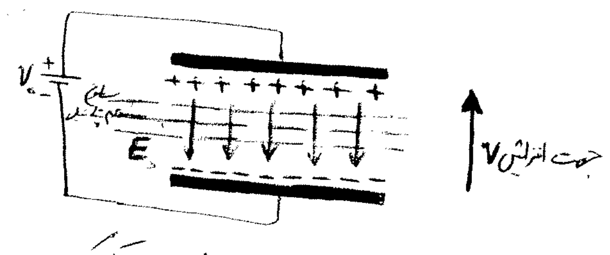
تحت چنین شرایطی اختلاف پتانسیل بین دو نقطه A و B (V_{AB}) برابر صفر بوده و دو نقطه A و B را هم پتانسیل گویند.

مجموعه نقاطی که هم پتانسیل هستند تشکیل سطحی بنام سطوح هم پتانسیل می‌دهند.

بنابراین سطوح هم پتانسیل همیشه بر خطوط میدان عمودند.



مثال ۲-۸ : ترسیم خطوط هم پتانسیل و خطوط میدان الکتریکی



حرکت درخلاف جهت میدان : افزایش پتانسیل الکتریکی

$R = C_V\sqrt{\cos\theta}$ دوقطبی الکتریکی

$R = C_? ?^2 ?$

(ادامه) پتانسیل الکتریکی

میدان الکتریکی غیر گردشی $\nabla \times E = 0$

اتحاد صفر کرل گرادیان اسکالر $\nabla \times \nabla V = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{E = -\nabla V}$

⊖ ، کار برعلیه میدان

در روابط فوق درباره اختلاف پتانسیل بین دو نقطه صحبت شده است.

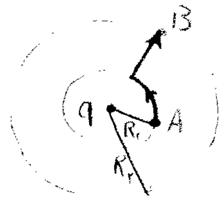
برای بررسی پتانسیل مطلق یک نقطه نخست باید یک نقطه مرجع با پتانسیل صفر تعریف کنیم

بطور معمول نقطه پتانسیل صفر در بی نهایت فرض می‌شود.

پتانسیل بار نقطه‌ای:

برای یک بار نقطه‌ای داریم:

$$V_{AB} = \int_A^B \bar{E}\cdot d\bar{l} = \int_A^B \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{a}_r\right)\cdot\left(dr\,\hat{a}_r + r\,d\theta\,\hat{a}_\theta + r\sin\theta\,d\varphi\,\hat{a}_\varphi\right)$$



$$= \int_{r_A}^{r_B} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,dr = \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 r}\Bigg|_{r_A}^{r_B} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_A} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_B} = V_A - V_B$$

به عبارتی در میدان یک بار نقطه‌ای، اختلاف پتانسیل بین دو نقطه فقط تابع فواصل آنها از محل بار است نه مسیر بین آنها

$$V_{AB} = V_A - V_B = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

با تعریف بی نهایت بعنوان مرجع پتانسیل صفر داریم:

$$V = -\int_\infty^R \left(a_R\,\frac{q}{4\pi\varepsilon R^2}\right)\cdot\left(a_R\,dr\right) \Rightarrow \boxed{V = \frac{q}{4\pi\varepsilon R}\ (V)}$$

بدین ترتیب پتانسیل یک نقطه از فضا در میدان الکتریکی E تعریف می‌شود:

پتانسیل نقطه‌ای در میدان الکتریکی E برابر مقدار کاری است که میدان $\bar{E}$ برای حرکت دادن واحد بار مثبت از آن نقطه به بی نهایت انجام می‌دهد.

$$V(r) = \int_r^\infty \bar{E}\cdot d\bar{l} = -\int_\infty^r \bar{E}\cdot d\bar{l}$$

پتانسیل چندین بار نقطه‌ای گسسته:

برای بارهای نقطه‌ای q_1، q_2، ... و q_n داریم:

میدان الکتریکی در نقطه از فضا $\bar{E} = \sum_{j=1}^{n} \bar{E}_j$ $\qquad$ ($\bar{E}_j$: میدان حاصل از بار q_j)

برای محاسبه پتانسیل نقطه دلخواه A داریم:

$$V_A = \int_r^{\infty} \bar{E}\cdot d\bar{l} = \int_r^{\infty} (\bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \dots + \bar{E}_n)\cdot d\bar{l}$$

$$= \int_r^{\infty} \bar{E}_1\cdot d\bar{l} + \int_r^{\infty} \bar{E}_2\cdot d\bar{l} + \dots + \int_r^{\infty} \bar{E}_n\cdot d\bar{l} = \sum_{j=1}^{n} \int_r^{\infty} \bar{E}_j\cdot d\bar{l}$$

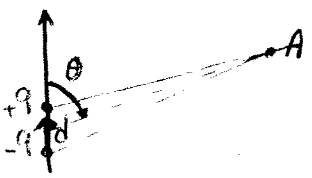
پتانسیل ناشی از بار q_j (تنها) در نقطه A: $\int_r^{\infty} \bar{E}_j\cdot d\bar{l} = \dfrac{q_j}{4\pi\epsilon R_j}$

بنابراین:

$$V_A = \sum_{j=1}^{n} \frac{q_j}{4\pi\epsilon R_j}$$

اگر نقطه A را با بردار مکان $\bar{r}$ مشخص کنیم و $R_j = \bar{r} - \bar{r}_j'$ داریم:

$$V(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{j=1}^{n} \frac{q_j}{|\bar{r} - \bar{r}_j'|}$$



مثال: دو قطبی الکتریکی:

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon}\left(\frac{1}{R_+} - \frac{1}{R_-}\right)$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{R_+} \simeq \left(R - \dfrac{d}{2}\cos\theta\right)^{-1} \simeq R^{-1}\left(1 + \dfrac{d}{2R}\cos\theta\right) \\ \dfrac{1}{R_-} \simeq \left(R + \dfrac{d}{2}\cos\theta\right)^{-1} \simeq R^{-1}\left(1 - \dfrac{d}{2R}\cos\theta\right) \end{cases}$$

جایگذاری

$\underline{P = qd}$

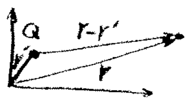
$$V = \frac{qd\cos\theta}{4\pi\epsilon R^2} \quad \text{یا} \quad V = \frac{P\cdot a_R}{4\pi\epsilon R^2} \quad (۷)$$

محاسبه میدان الکتریکی $E = -\nabla V = -\hat{a}_R \dfrac{\partial V}{\partial R} - \hat{a}_\theta \dfrac{\partial V}{R\partial\theta}$

$$= \frac{P}{4\pi\epsilon R^3}\left(a_R\, 2\cos\theta + a_\theta \sin\theta\right)$$

پتانسیل چند بار نقطه‌ای:

صفایی
مهر ۹۲
۲۹



$$V(\bar r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 |\bar r - \bar r'|}$$

$$|\bar r - \bar r'| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\alpha} = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2\bar r\cdot\bar r'} = r\sqrt{1 + \frac{r'^2}{r^2} - \frac{2\bar r\cdot\bar r'}{r^2}}$$

با جایگذاری در رابطه پتانسیل و فرض $\frac{r'}{r} \ll 1$، جملات درجات بالا به سرعت کاهش می‌یابد.

$$V(\bar r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r}\left\{1 + \frac{\bar r\cdot\bar r'}{r^2} + \frac{1}{2r^4}\left[3(\bar r\cdot\bar r')^2 - (rr')^2\right] + \cdots\right\}$$

$$V(\bar r) \simeq \frac{Q}{4\pi\varepsilon r} + \frac{Q\,\bar r\cdot\bar r'}{4\pi\varepsilon r^3} + \frac{Q}{8\pi\varepsilon r^5}\left[3(\bar r\cdot\bar r')^2 - (rr')^2\right]$$

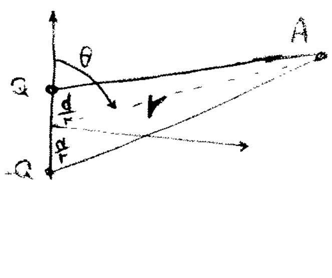
$$\simeq \frac{Q}{4\pi\varepsilon r} + \frac{Q r'\cos\alpha}{4\pi\varepsilon r^2} + \frac{Q r'^2}{4\pi\varepsilon r^3}\left(\frac{3\cos^2\alpha - 1}{2}\right)$$

برای چندین بار نقطه‌ای Q_1 و Q_2 و ... در نقاط $\bar r_1'$ و $\bar r_2'$ و ... پتانسیل میدان در بارها برابر جمع آثار:

$$V(\bar r) = \sum_{j=1}^{n}\left\{\frac{Q_j}{4\pi\varepsilon r} + \frac{Q_j\,\bar r\cdot\bar r_j}{4\pi\varepsilon r^3} + \frac{Q_j}{8\pi\varepsilon r^5}\left[3(\bar r\cdot\bar r_j')^2 - (rr_j')^2\right] + \cdots\right\}$$

$$= \frac{\sum_{j=1}^{n} Q_j}{4\pi\varepsilon r} + \frac{\sum_{j=1}^{n} Q_j\,\bar r\cdot\bar r_j'}{4\pi\varepsilon r^3} + \frac{\sum_{j=1}^{n} Q_j\left[3(\bar r\cdot\bar r_j')^2 - (rr_j')^2\right]}{8\pi\varepsilon r^5} + \cdots$$

دو قطبی الکتریکی:



$$V(\bar r) = \frac{Q - Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{Q\frac{d}{2}\,\bar r\cdot\hat a_z + (-Q)\frac{d}{2}(-\bar r\cdot\hat a_z)}{4\pi\varepsilon_0 r^3} + \cdots$$

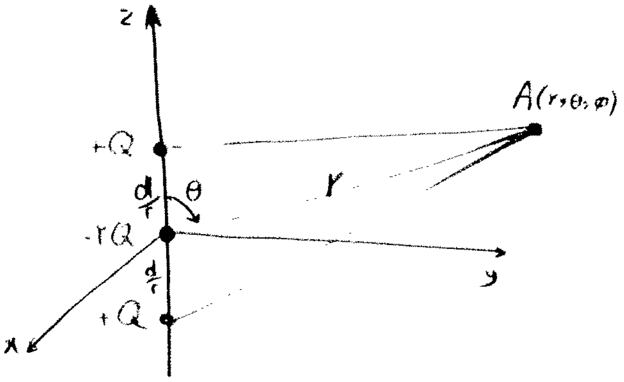
$$\simeq \frac{Qd\,\bar r\cdot\hat a_z}{4\pi\varepsilon r^3} = \frac{\bar p\cdot\bar r}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{Qd\cos\theta}{4\pi\varepsilon r^2}$$

$$E = -\nabla V = -\left(\frac{\partial V}{\partial r}\hat a_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}\hat a_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\varphi}\hat a_\varphi\right)$$

$$= \frac{-Qd}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\cos\theta}{r^2}\right)\hat a_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\cos\theta}{r^2}\right)\hat a_\theta + 0\right]$$

$$= \frac{Qd}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(2\cos\theta\,\hat a_r + \sin\theta\,\hat a_\theta\right)$$

مثال: محاسبه پتانسیل و میدان الکتریکی یک چهارقطبی:



$$Q_1 = Q \quad , \quad Q_2 = Q \quad , \quad Q_3 = -2Q$$

$$\bar{r}_1' = \frac{d}{2}\hat{a}_z \qquad \bar{r}_2' = -\frac{d}{2}\hat{a}_z \qquad \bar{r}_3' = 0$$

پتانسیل برای $r \gg d$ عبارتست از:

$$V(\bar{r}) = \frac{Q + Q - 2Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{Q\frac{d}{2}\hat{a}_z\cdot\bar{r} - Q\frac{d}{2}\hat{a}_z\cdot\bar{r} - 0}{4\pi\varepsilon r^3} + \ldots$$

$$+ \frac{1}{8\pi\varepsilon_0 r^5}\left\{Q\left[3\left(\frac{d}{2}\bar{r}\cdot\hat{a}_z\right)^2 - \left(r\frac{d}{2}\right)^2\right] + Q\left[3\left(-\frac{d}{2}\bar{r}\cdot\hat{a}_z\right)^2 - \left(r\frac{d}{2}\right)^2\right] - 2Q[0]\right\} + \ldots$$

$$\simeq \frac{2Q\left(\frac{d}{2}\right)^2}{8\pi\varepsilon r^5}\left[3(\bar{r}\cdot\hat{a}_z)^2 - r^2\right] = \frac{Q\left(\frac{d}{2}\right)^2}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(3\cos^2\theta - 1\right)$$

پتانسیل دوقطبی با r^{-2} و پتانسیل چهارقطبی با r^{-3} متناسب است (کاهش سریعتر)

$$E = \frac{-Q\left(\frac{d}{2}\right)^2}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{3\cos^2\theta - 1}{r^3}\right)\hat{a}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{3\cos^2\theta - 1}{r^3}\right)\hat{a}_\theta\right]$$

$$= \frac{Q d^2}{16\pi\varepsilon r^4}\left[3\left(3\cos^2\theta - 1\right)\hat{a}_r + 6\sin\theta\cos\theta\,\hat{a}_\theta\right]$$

پتانسیل الکتریکی توزیع پیوسته بار :

برای محاسبه پتانسیل ناشی از توزیع های خطی، سطحی و حجمی ابتدا بار را به تعداد زیادی از عناصر کوچک تقسیم نموده، و هر عنصر را بصورت یک بار نقطه‌ای در نظر می‌گیریم.

پتانسیل در نقطه دلخواه A که به فاصله R_j از عنصر بار Δq_j قرار دارد و فقط از همین عنصر ناشی می‌شود عبارتست از:

$$\Delta V_j = \frac{\Delta q_j}{4\pi\varepsilon R_j} \xrightarrow{\text{مجموعه عناصر}} V = \sum_{j=1}^{n} \frac{\Delta q_j}{4\pi\varepsilon R_j}$$

در حد وقتی $\Delta q_j \to 0$ ← Σ به $\int$ تبدیل می‌شود.

بار حجمی: $$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{v'} \frac{\rho}{R}\, dv'$$

بار سطحی: $$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{s'} \frac{\rho_s}{R}\, ds'$$

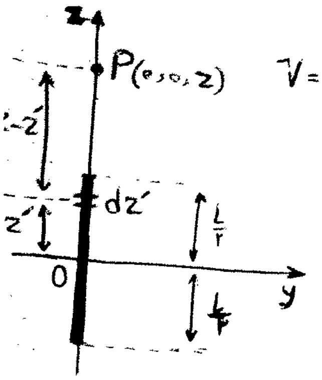
بار خطی: $$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{l'} \frac{\rho_L}{R}\, dl'$$

مثال ۳-۱ اچیک

شدت میدان الکتریکی یک بار خطی یکنواخت ρ_L بطول L، در امتداد محور آنرا بدست آورید.

برای یک بار نامحدود ∞ طویل، میدان E با استفاده از قانون گوس تعیین می‌شود.

اما در یک بار خطی بطول محدود، تشکیل سطح گوسی بطوری که بر روی آن $E.ds$ ثابت باشد ممکن نیست. قانون گوس X



$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{l'} \frac{\rho_L}{R}\, dl' \quad (V)$$

برای حل جزء کوچک بار dz' را در z' در نظر می‌گیریم. $dl = dz'$

فاصله R از جزء کوچک بار تا نقطه $P(0,0,z)$ در امتداد محور بار خطی برابر است با:

$$R = z - z' \qquad z > \frac{L}{2}$$

برای تفکیک نقاط میدان و منبع، از مختصات بدون پریم برای میدان و پریم دار برای منبع استفاده می‌کنیم.

با انتگرال گیری بر روی ناحیه منبع داریم:

$$V = \frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-L/2}^{L/2} \frac{dz'}{z - z'} = \frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon_0} \ln\left[\frac{z + L/2}{z - L/2}\right] \qquad z > \frac{L}{2}$$

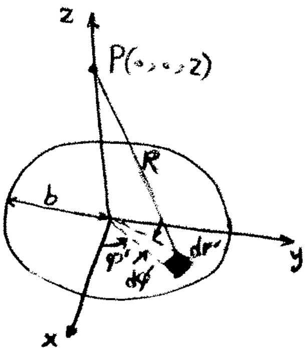
میدان E در P، گرادیان منفی V نسبت به مختصات بدون پریم میدان است. داریم:

$$E = -a_z \frac{dV}{dz} = a_z \frac{\rho_L L}{4\pi\varepsilon\left[z^2 - (L/2)^2\right]} \qquad z > \frac{L}{2}$$

درس: سایر ...

مثال: شدت میدان الکتریکی روی محور یک قرص مدور به شعاع b حامل چگالی بار سطحی یکنواخت ρ_s را بدست آورید.
۲-۹
چنگ

اگرچه قرص دارای تقارن دایروی است ولی نمی‌توانیم در پیرامون آن سطحی را تجسم کنیم که مولفه عمودی E روی آن ثابت باشد (اندازه).
از این رو قانون گوس برای حل مسئله مناسب نیست.



$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{S'}\frac{\rho_s}{R}\,ds' \quad (V)$$

از روابط داریم:

در مختصات استوانه‌ای داریم:

$$ds' = r'\,dr'\,d\varphi'$$

$$R = \sqrt{z^2 + r'^2}$$

پتانسیل الکتریکی در نقطه $P(0,0,z)$ نسبت به نقطه‌ای در بی‌نهایت برابر است با:

$$V = \frac{\rho_s}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{b}\frac{r'}{\sqrt{z^2+r'^2}}\,dr'\,d\varphi'$$

$$= \frac{\rho_s}{2\epsilon_0}\left[\sqrt{z^2+b^2} - |z|\right]$$

$$E = -\nabla V = -a_z\frac{\partial V}{\partial z} = \begin{cases} a_z\dfrac{\rho_s}{2\epsilon_0}\left[1 - \dfrac{z}{\sqrt{z^2+b^2}}\right] & z>0 \\ -a_z\dfrac{\rho_s}{2\epsilon_0}\left[1 + \dfrac{z}{\sqrt{z^2+b^2}}\right] & z<0 \end{cases}$$

$$z \to \infty$$

بسط سری دوجمله‌ای و صرف‌نظر کردن از توان‌های دوم و بالاتر کسر $\frac{b^2}{z^2}$

$$\frac{z}{\sqrt{z^2+b^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{b^2}{z^2}}}\,\frac{z}{|z|} \simeq \left(1 - \frac{b^2}{2z^2}\right)\frac{z}{|z|}$$

جایگذاری:

$$E = a_z\frac{(\pi b^2\rho_s)}{4\pi\varepsilon_0 z^2}\cdot\frac{z}{|z|} = \begin{cases} a_z\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 z^2} & z>0 \\ -a_z\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 z^2} & z<0 \end{cases}$$

Q کل بار روی قرص است.

هنگامی که محل مشاهده از قرص باردار خیلی دور است ⇐ میدان E تقریباً از قانون $\frac{1}{R^2}$ پیروی می‌کند (بار نقطه‌ای)

هادی‌ها در میدان الکتریکی ساکن:

تاکنون میدان الکتریکی توزیع بارهای ساکن را در فضای آزاد یا خلا بررسی کردیم

در ادامه رفتار میدان را در محیط‌های مادی بررسی می‌کنیم

مواد براساس خواص الکتریکی:
- هادی: وجود بارهای آزاد (الکترون‌های پوسته بیرونی اتم)
- نیمه هادی: حد وسط
- عایق: بار آزاد نداریم (شکاف انرژی یا حجم ممنوعه زیاد)

خواص ماکروسکوپی الکتریکی محیط مادی با پارامتر رسانندگی تعریف می‌شود. (فصل ۵)

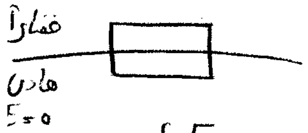
در این بخش میدان الکتریکی و توزیع بار را داخل توده هادی و روی سطح آن بررسی می‌کنیم.

در شرایط سکون، باری در درون هادی وجود ندارد و براساس قانون گوس میدان E نیز در درون هادی صفر است

$$\begin{cases} \rho = 0 \\ E = 0 \end{cases}$$

- میدان E روی سطح یک هادی همه جا عمود بر سطح است.
- سطح هادی یک سطح هم پتانسیل است.

زمان توزیع مجدد بارها برای رسیدن به حالت تعادل تابعی از رسانندگی ماده است و برای هادی خوب مثل مس از مرتبه $10^{-19}\,s$ است.



با نوشتن روابط بر روی سطح گوسی مکعبی در مرز مشترک هادی - فضای آزاد داریم:

مولفه مماسی میدان E روی سطح هادی صفر است.

مولفه عمودی میدان E در مرز هادی-فضای آزاد برابر چگالی بار سطحی روی هادی تقسیم بر گذردهی فضای آزاد است.

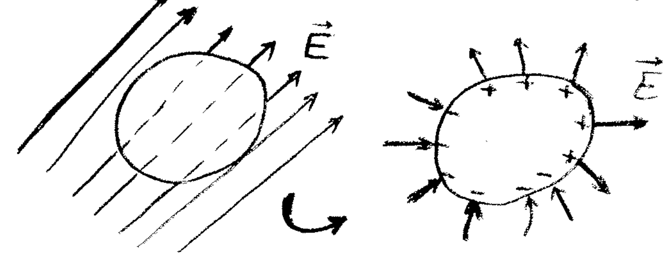
$$\begin{cases} E_t = 0 \\ E_n = \dfrac{\rho_s}{\epsilon_0} \end{cases}$$

الکترون‌های آزاد در یک جسم هادی تحت تاثیر یک میدان الکتریکی جابجا می‌شوند. مثال ص ۱۲۳

پس از قرار گرفتن جسم هادی در میدان الکتریکی، الکترون‌های آزاد در خلاف جهت میدان حرکت کرده و در سطح جسم متوقف می‌شوند.

بنابراین یک بار سطحی منفی روی آن بخش از جسم که خطوط میدان اولیه به آن وارد می‌شود، بوجود می‌آید.

از آنجا که جسم در مجموع از نظر بار الکتریکی خنثی است، باری مثبت که میزان آن دقیقاً برابر بار سطحی منفی است، باید در جاهایی از جسم بوجود آید.



بار مثبت ایجاد شده، جز در سطح هادی در جای دیگری نمی‌تواند ظاهر شود.

بار مثبت در بخش از سطح جسم که خطوط میدان از آن خارج می‌شوند بوجود می‌آید.

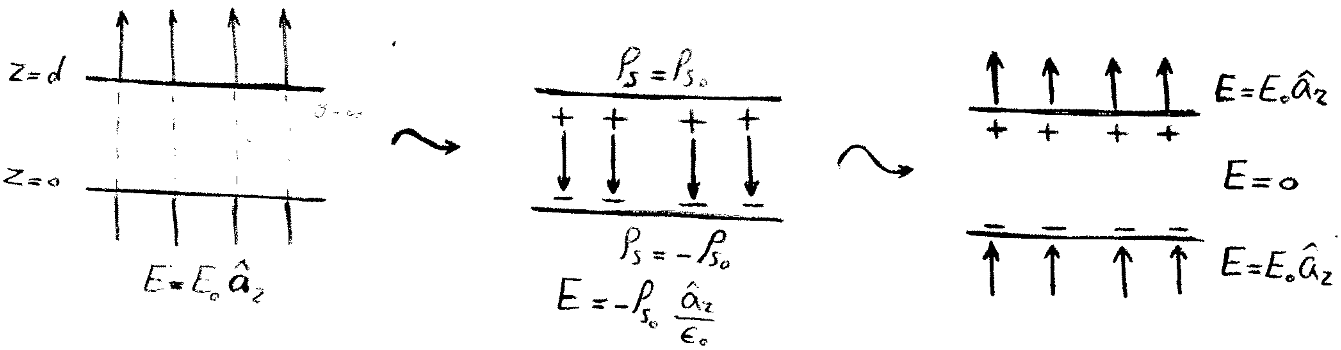
بار الکتریکی سطحی که بدین گونه ایجاد می‌شود، به نوبه خود تولید یک میدان الکتریکی ثانویه می‌کند که در خلاف جهت میدان اعمال شده اولیه است.

میدان ثانویه بایستی میدان اولیه در درون جسم هادی را بطور کامل خنثی کند، بطوریکه میدان درون هادی صفر گردد.

در غیر اینصورت حرکت الکترونها به سمت سطح ادامه می‌یابد تا چنان توزیعی حاصل شود که میدان داخلی هادی سرانجام صفر گردد.

تشکیل بار سطحی و کاهش یافتن میدان درون جسم هادی به صفر، تقریباً آنی صورت می‌گیرد $(10^{-19}s)$

مثال: ماده هادی در فضای ناحیه $0<z<d$ قرار گرفته و میدان الکتریکی یکنواخت $E=E_0\hat{a}_z$ به جسم اعمال می‌شود. چگالی بار القا شده روی سطوح جسم هادی در $z=0$ و $z=d$؟ صفحه‌ی ۱۲۶



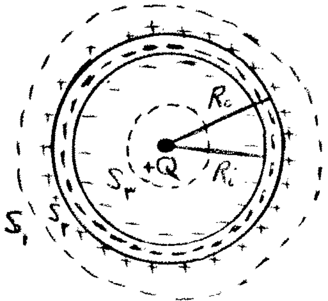
چون میدان الکتریکی کل درون هادی باید صفر باشد،
میدان ثانویه حاصل از توزیع بارهای القایی بایستی مساوی و در خلاف جهت میدان اولیه E باشد.

مثال: بار نقطه‌ای مثبت Q در مرکز یک پوسته هادی کروی با شعاع داخلی R_i و شعاع خارجی R_o قرار دارد. ۱۱-۲ جلسه ۱۵

میدان E و پتانسیل V را بصورت تابعی از فاصله شعاعی R تعیین کنید.

با توجه به تقارن کروی، به سادگی از قانون گوس برای تعیین میدان E استفاده می‌کنیم.

سه ناحیه متمایز $R>R_o$ ، $R_i<R<R_o$ ، $R<R_i$ داریم. سطح گوسی مناسب برای این ۳ ناحیه رسم می‌کنیم. در هر ۳ ناحیه $E=a_R E_R$



الف) $R>R_o$ (سطح گوسی S_1):

$$\oint_S E\cdot ds = E_{R_1}\, 4\pi R^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E_{R_1}=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

میدان E مشابه بار نقطه‌ای Q بدون حضور پوسته است.

پتانسیل نسبت به نقطه‌ای در بینهایت برابر است با:

$$V_1=-\int_\infty^R E_{R_1}\, dR = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

ب) $R_i<R<R_o$ (سطح گوسی S_2):

شرط درون هادی $E_{R_2}=0$

چون در پوسته هادی $\rho=0$ و از آنجاکه کل بار محصور در سطح S_2 باید صفر باشد، بار منفی به مقدار $-Q$ باید روی سطح داخلی پوسته در $R=R_i$ القا شود. همچنین بار مثبت $+Q$ روی سطح خارجی پوسته در $R=R_o$ القا شود.

پوسته هادی یک جسم هم‌پتانسیل است:

$$V_2=V_1\Big|_{R=R_o}=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_o}$$

پ) $R<R_i$ (سطح گوسی S_3):

بکارگیری قانون گوس، فرمولی مشابه ناحیه اول داریم:

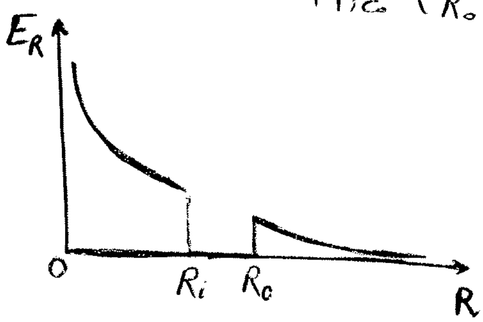
$$E_{R_3}=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

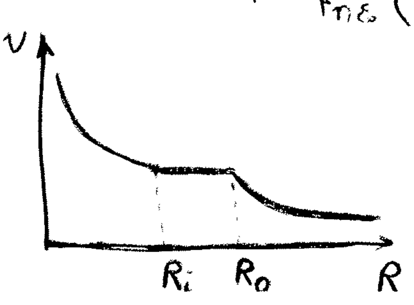
پتانسیل در این ناحیه برابر است با:

$$V_3=-\int E_{R_3}\, dR + C = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}+C$$

که ثابت انتگرال‌گیری C در آن از لزوم برابری V_3 در $R=R_i$ با V_2 تعیین می‌گردد. داریم:

$$C=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R_o}-\frac{1}{R_i}\right) \rightarrow V_3=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R_o}-\frac{1}{R_i}\right)$$





شدت میدان الکتریکی دارای جهش ناپیوسته
پتانسیل پیوسته

* جهش ناپیوسته پتانسیل، شدت میدان الکتریکی بی‌نهایت ∞

دی الکتریک‌ها در میدان الکتریکی ساکن:

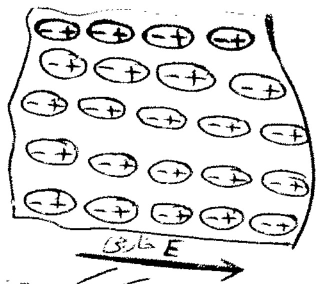
اتم هر ماده از ذرات باردار الکترونها و هسته تشکیل می‌شود و فضای بین آنها خلاء می‌باشد.

تحت اثر میدان الکتریکی خارجی، ذرات باردار از خود واکنش نشان داده و میدانهای جدیدی را ایجاد می‌کنند.

تاثیر متقابل ماده و میدان براساس خواص و نوع مواد، خواصی نظیر هدایت الکتریکی و قطبی شدن در مقیاس میکروسکوپی را در پی دارد.

← در عایق‌ها برخلاف هادی‌ها، الکترونهای لایه آخر نیز همیشه در مجاورت اتم باقی مانده و آنها را الکترونهای مقید می‌نامند.
بعلت عدم قابلیت تحرک الکترونهای مقید و ناچیز بودن تعداد الکترونهای آزاد، هدایت الکتریکی در آنها بسیار اندک می‌باشد.

← در عایق‌ها بعلت دشواری دور شدن الکترونهای لایه آخر از هسته، اعمال میدان خارجی تنها مرکز ثقل ابر الکترونی را نسبت به هسته اندکی جابجا و
جابجایی بارهای مثبت و منفی در جهات مخالف، اگرچه نسبت به ابعاد اتم کوچک است ولی ماده دی الکتریک را قطبی کرده و
دوقطبی‌های الکتریکی را ایجاد می‌کند.



پتانسیل و شدت میدان الکتریکی دوقطبی الکتریکی مخالف هم است

بنابراین دوقطبی‌های الکتریکی القا شده میدان الکتریکی را در داخل و خارج ماده دی‌الکتریک تغییر می‌دهند.

مولکولهای برخی عایق‌ها (نظیر آب) حتی در غیاب یک میدان خارجی، گشتاور دوقطبی دائمی دارد. (برخوردار از اتمهای غیرهمسان، مولکول قطبی)

برخی عایق‌ها حتی در غیاب میدان الکتریکی خارجی گشتاور دوقطبی دائمی داشته باشند که آنها را الکتریت می‌نامند.

* بحث از گشتاورهای دوقطبی و ح آنها و نیز محاسبه چگالی بارهای قطبی شده یا بارهای مقید. (۱۲۸-۱۳۱ چنگ)

با ایجاد چگالی حجمی معادل ρ_p در دی‌الکتریک قطبی شده داریم:

$\rho_p = -\nabla\cdot P$ بار قطبی شدگی
بردار پلاریزاسیون

P: چگالی گشتاور دوقطبی الکتریکی
گشتاور دوقطبی در واحد حجم

$$\Rightarrow \quad \nabla\cdot E = \frac{1}{\epsilon_0}\left(\rho + \rho_p\right)$$

یا

$$\nabla\cdot\left(\epsilon_0 E + P\right) = \rho$$

حال کمیت چگالی شار الکتریکی را تعریف می‌کنیم:

$$D = \epsilon_0 E + P \quad \left(\frac{C}{m^2}\right)$$

از دو معادله فوق نتیجه می‌شود:

$$\nabla\cdot D = \rho \left(\frac{C}{m^3}\right)$$

صورت انتگرالی تکلیف نیز با انتگرال‌گیری حجمی از روابط بدست می‌آید،

$$\int_v \nabla\cdot D\, dv = \int_v \rho\, dv$$

یا $\oint_s D\cdot ds = Q\,(C)$ که بیان دیگری از قانون گوس است

اگر دی‌الکتریک محیطی خطی وایزوتروپیک باشد داریم،

$$P = \epsilon_0 \chi_e E$$

χ_e در آن کمیتی بدون بعد بنام پذیرندگی الکتریکی است. ساسپتیبلیته Susceptibility

با جایگذاری در روابط داریم،

$$D = \epsilon_0 (1+\chi_e) E$$
$$= \epsilon_0 \epsilon_r E = \epsilon E$$

(بدون بعد) $\epsilon_r = 1+\chi_e = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$ گذردهی نسبی (ضریب دی‌الکتریک محیط)

گذردهی مطلق $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r \ (\frac{F}{m})$

[هوا $\epsilon_r = 1{,}00059 \rightarrow$ فضای آزاد ϵ_0]

ϵ_r می‌تواند تابعی از مختصات فضایی باشد.

اگر ϵ_r مستقل از مکان باشد محیط را همگن گویند.

هر محیط خطی، همگن و ایزوتروپیک را یک محیط ساده می‌دانند که گذردهی نسبی آن ثابت است.

اثرات محیط با اتلاف را می‌توان با یک ضریب دی‌الکتریکی مختلط نشان داد که بخش موهومی آن نشانگر تلف توان در محیط است که وابسته به فرکانس است.

برای مواد غیر ایزوتروپیک، ضریب دی‌الکتریک در جهت‌های مختلف متفاوت است.

بردارهای D و E طور معمول جهت‌های متفاوتی دارند و گذردهی یک تانسور است.

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} D_x = \epsilon_1 E_x \\ D_y = \epsilon_2 E_y \\ D_z = \epsilon_3 E_z \end{cases}$$

اگر جملات غیر قطری ماتریس صفر باشد : محیط دو محوری است

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}$$

اگر $\epsilon_1 = \epsilon_2 \Leftarrow$ محیط تک محوری

اگر $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 \Leftarrow$ محیط ایزوتروپیک ✓ (در این درس)

مقاومت دی‌الکتریک :

اعمال میدان الکتریکی خارجی باعث جابجایی کوچک بارهای مقید در ماده عایق شده و قطبی شدگی را بوجود می‌آورد.

اگر میدان الکتریکی خیلی قوی باشد، الکترون‌ها از مولکول خارج شده و الکترون تحت اثر میدان را شتاب داده که با ساختار مولکولی تصادم کرده و موجب صدمه دیدن و تغییر وضعیت دائمی آن می‌شود.

در اثر این تصادم‌ها ممکن است اثر بهمنی قطبی شدگی پدید آید.
ماده ممکن است هادی شده و جریان‌های بزرگی را ایجاد کند. این پدیده را شکست دی‌الکتریک می‌نامند.

حداکثر شدت میدان الکتریکی که یک ماده دی‌الکتریک می‌تواند بدون شکست تحمل کند مقاومت دی‌الکتریک ماده نامیده می‌شود.

برای مثال مقاومت دی‌الکتریک هوا در فشار جو $3\,\frac{kV}{mm}$ می‌باشد.
با افزایش شدت میدان الکتریکی از این مقدار، هوا دچار شکست می‌شود. یونیزاسیون عظیمی رخ داده و جرقه می‌زند. کرونا

شدت میدان الکتریکی در محل‌های نوک‌تیز بزرگتر از نقاط روی سطوح هموار با انحنای کم است.

این مطلب اساس کار برقگیر ساختمان‌ها می‌باشد.
هنگامی که ابری شامل بارهای الکتریکی فراوان به ساختمان مجهز به برقگیر نزدیک می‌شود، بارهای با علامت مخالف از زمین به سمت نوک میله که شدت میدان الکتریکی در آن حداکثر است جذب می‌شود.
وقتی شدت میدان الکتریکی از مقاومت دی‌الکتریک هوای مرطوب زیادتر می‌شود شکست حاصل می‌شود و هوای نزدیک نوک یونیزه و رسانا می‌گردد.
سپس بارهای الکتریکی ابر از طریق مسیر هدایت کننده به زمین تخلیه می‌شود.

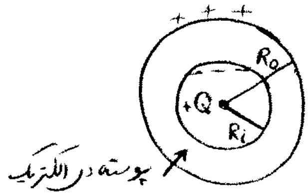
(مثال)

ص ۱۳۴ چنگ

مثال: یک بار نقطه‌ای مثبت Q در مرکز یک پوسته دی‌الکتریک کروی با شعاع درونی R_i و شعاع بیرونی R_o قرار گرفته است. ضریب دی‌الکتریک پوسته ϵ_r است. مقادیر E، V، D و P به صورت تابعی از فاصله شعاعی R به دست آورید.

مشابه مثال قبلی بدلیل تقارن کروی از قانون گوس برای یافتن E و D در سه ناحیه استفاده می‌شود.
پتانسیل V از منفی انتگرال خطی E و قطبی‌شدگی P از $P = D - \epsilon_0 E = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)E$ به دست می‌آید.

بردارهای E، D و P تنها دارای مولفه شعاعی هستند.



الف) $R > R_o$:

(گوس) مشابه مثال قبلی،

$$E_{R_1} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

$$V_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

از روابط فوق داریم،

$$D_{R_1} = \epsilon_0 E_{R_1} = \frac{Q}{4\pi R^2}$$

و

$$P_{R_1} = 0$$

ب) $R_i < R < R_o$:

با استفاده از قانون گوس،

$$E_{R_2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r R^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon R^2}$$

$$D_{R_2} = \frac{Q}{4\pi R^2}$$

$$P_{R_2} = \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right)\frac{Q}{4\pi R^2}$$

$$V_2 = -\int_{\infty}^{R_o} E_{R_1}\, dR - \int_{R_o}^{R} E_{R_2}\, dR$$

$$= V_1\Big|_{R=R_o} - \frac{Q}{4\pi\epsilon}\int_{R_o}^{R}\frac{1}{R^2}\, dR$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right)\frac{1}{R_o} + \frac{1}{\epsilon_r R}\right]$$

ضمنا D_{R_2} دقیقا مشابه D_{R_1} می‌باشد،
ولی E_R و P_R هر دو در $R = R_o$ ناپیوسته‌اند.

پ) $R < R_i$:

چون محیط این ناحیه مشابه ناحیه $R > R_o$ است،
بکارگیری قانون گوس در هر دو ناحیه نتایج یکسانی دارد.

$$E_{R_3} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

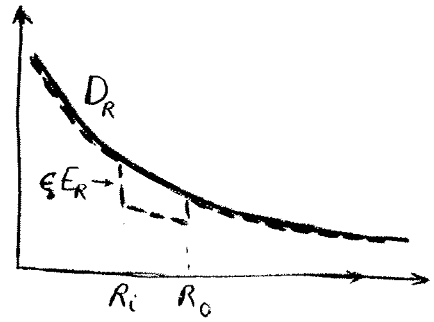
$$D_{R_3} = \frac{Q}{4\pi R^2}$$

$$P_{R_3} = 0$$

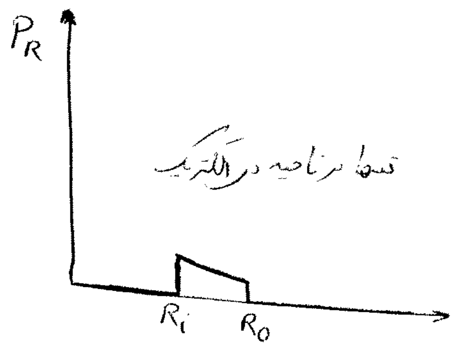
برای یافتن V_3 باید منفی انتگرال خطی E_{R_2} را به V_2 در $R=R_i$ اضافه کنیم،

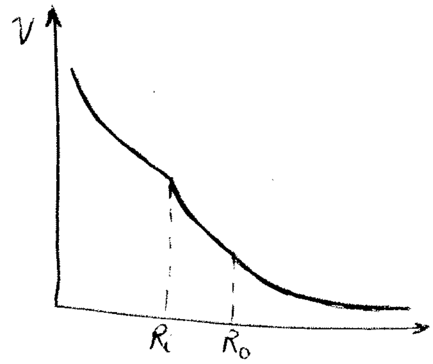
$$V_3 = V_2\Big|_{R=R_i} - \int_{R_i}^{R} E_{R_2}\, dR$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\left(1-\frac{1}{\epsilon_r}\right)\frac{1}{R_0} - \left(1-\frac{1}{\epsilon_r}\right)\frac{1}{R_i} + \frac{1}{R}\right]$$



D_R منحنی پیوسته





$$\mathbf{P}_R = D_R - \epsilon_0 E_R$$

روابط داخل دی‌الکتریک:

$$\rho_{ps} = \mathbf{P}\cdot a_n \;,\quad \rho_p = -\nabla\cdot P$$

روی سطح داخلی پوسته:

$$\rho_{ps}\Big|_{R=R_i} = P\cdot(-a_R)\Big|_{R=R_i} = -P_{R_2}\Big|_{R=R_i} = -\left(1-\frac{1}{\epsilon_r}\right)\frac{Q}{4\pi R_i^2}$$

روی سطح خارجی پوسته:

$$\rho_{ps}\Big|_{R=R_0} = P\cdot a_R\Big|_{R=R_0} = P_{R_2}\Big|_{R=R_0} = \left(1-\frac{1}{\epsilon_r}\right)\frac{Q}{4\pi R_0^2}$$

$$\rho_p = -\nabla\cdot P = -\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\Big(R^2 \underbrace{P_{R_2}}_{\frac{Q}{4\pi R^2}}\Big) = 0$$

یعنی بار حجمی قطبی شدگی خالص در داخل پوسته دی‌الکتریک وجود ندارد.

اما بار سطحی قطبی شدگی منفی روی سطح داخلی و بار سطحی قطبی شدگی مثبت روی سطح خارجی وجود دارد.

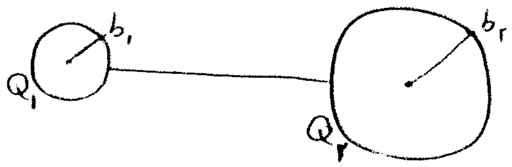
این بارهای سطحی یک شدت میدان الکتریکی بصورت شعاعی و به سمت داخل ایجاد می‌کند.

بنابراین میدان E ناشی از بار نقطه‌ای $+Q$ را در ناحیه II (دی‌الکتریک) کاهش می‌دهد.

مثال:

دو هادی کروی با شعاع‌های b_1 و b_2 $(b_1 < b_2)$ توسط یک سیم هادی به هم متصل شده‌اند

فاصله بین دو هادی در مقایسه با b_2 خیلی بزرگ فرض شده است (اثر بارهای روی هادیهای کروی با توزیع یکنواخت)



بار کل Q روی کره‌ها قرار دارد. مطلوبست:

الف) بار روی دو کره؟

ب) شدت میدان الکتریکی روی سطح کره‌ها؟

الف) هادیهای کروی هم پتانسیل هستند:

$$\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 b_1} = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 b_2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{b_1}{b_2}$$

یعنی بار روی کره‌ها با شعاع آنها نسبت مستقیم دارد.

اما چون بار کل: $Q_1 + Q_2 = Q$

$$\begin{cases} Q_1 = \dfrac{b_1}{b_1 + b_2} Q \\ Q_2 = \dfrac{b_2}{b_1 + b_2} Q \end{cases}$$

ب) شدت میدان الکتریکی در سطح دو کره هادی برابر است با:

$$\begin{cases} E_{1n} = \dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 b_1^2} \\ E_{2n} = \dfrac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 b_2^2} \end{cases}$$

بنابراین:

$$\frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \left(\frac{b_2}{b_1}\right)^2 \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{b_2}{b_1}$$

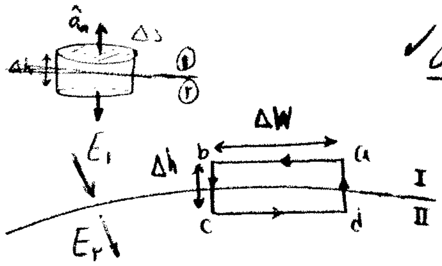
یعنی شدت میدان الکتریکی با شعاع تناسب معکوس دارد و در سطح کره کوچکتر (با انحنای بیشتر) بزرگتر است.

شرایط مرزی میدانهای الکتریکی ساکن:

مسائل الکترومغناطیس شامل محیطهایی با خواص فیزیکی متفاوت است.

هدف: روابط کمیات میدان در فصل مشترک دو محیط. منظور بررسی تغییرات بردارهای E و D در مرز عبور از فصل مشترک

شرایط مرزی هادی- فضای آزاد را بررسی کرده ایم. در ادامه فصل مشترک دو محیط کلی ✓



مسیر بسته $abcda$ را انتخاب می‌کنیم ($\Delta h \to 0$ در مرز) در این حالت اثری ندارد

$$\oint_c E \cdot dl = 0$$

$$\oint_{abcda} E \cdot dl = E_1 \cdot \Delta W + E_2 \cdot (-\Delta W) = E_{1t}\,\Delta W - E_{2t}\,\Delta W = 0$$

$$\boxed{E_{1t} = E_{2t}} \quad (V/m)$$

* یعنی: مولفه مماسی میدان E در سراسر فصل مشترک پیوسته است. اگر یکی از محیطها هادی باشد، $E_t = 0$

اگر محیطهای 1 و 2 دی‌الکتریکهایی با گذردهی ϵ_1 و ϵ_2 باشند داریم:

$$\boxed{\frac{D_{1t}}{\epsilon_1} = \frac{D_{2t}}{\epsilon_2}}$$

برای یافتن رابطه بین مولفه‌های عمودی میدانها در مرز:

در یک قوطی با وجه ΔS و ارتفاع Δh داریم:

$$\oint_s D \cdot ds = Q$$

$$\oint_s D \cdot ds = (D_1 \cdot a_{n_2} + D_2 \cdot a_{n_1})\,\Delta S$$

$$= a_{n_2}(D_1 - D_2)\,\Delta S \qquad a_{n_2} = -a_{n_1}$$

$$= \rho_s\,\Delta S \quad \rightarrow \quad a_{n_2} \cdot (D_1 - D_2) = \rho_s$$

I / II $\uparrow a_{n_2}$ مرجع

$$\boxed{D_{1n} - D_{2n} = \rho_s} \quad (C/m^2)$$

* یعنی: مولفه عمودی میدان D در سراسر فصل مشترکی که در آن بار سطحی وجود دارد ناپیوسته است، و مقدار ناپیوستگی معادل چگالی بار سطحی است.

اگر محیط ② هادی باشد: $D_2 = 0$ و داریم: $D_{1n} = \epsilon_1 E_{1n} = \rho_s$

درصورتی که محیط ① فضای آزاد باشد: $E_n = \frac{\rho_s}{\epsilon_0}$ یا $(D_n = \epsilon_0 E_n)$

در حالتی که دو دی‌الکتریک در حالت تماس، بار آزادی در فصل مشترک ندارند:

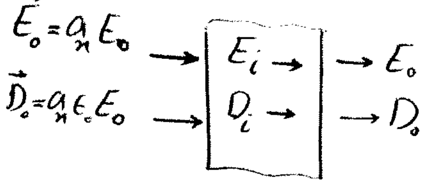
$$\rho_s = 0 \qquad D_{1n} = D_{2n} \quad \text{یا} \quad \epsilon_1 E_{1n} = \epsilon_2 E_{2n}$$

شرایط مرزی بطور خلاصه:

$$\begin{cases} E_{1t} = E_{2t} & \text{مولفه‌های مماسی} \\ a_{n2} \cdot (D_1 - D_2) = \rho_s & \text{مولفه‌های عمودی} \end{cases}$$

مثال: یک ورقه عایق با $\epsilon_r = 3.2$ بصورت عمودی در میدان یکنواخت $\vec{E}_0 = a_x E_0$ در فضای آزاد قرار گرفته است.

مطلوبست E ، D و P در داخل عایق (لوسیت)؟



فرض می‌کنیم قرار دادن ورقه میدان الکتریکی یکنواخت اولیه E_0 را برهم نمی‌زند.

چون فصل مشترک عمود بر میدان الکتریکی است، کافی است مولفه‌های عمودی میدان را درنظر بگیریم.

هیچ گونه بار آزادی نیز وجود ندارد. $\rho_s = 0 \Rightarrow D_{1n} = D_{2n}$

$$D_i = a_x D_i = a_x D_0 = a_x \epsilon_0 E_0$$

یعنی تغییری در چگالی شار الکتریکی در فصل مشترک نداریم.

شدت میدان الکتریکی درون ورقه عایق: $E_i = \frac{1}{\epsilon} D_i = \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_r} D_i = a_x \frac{E_0}{3.2}$

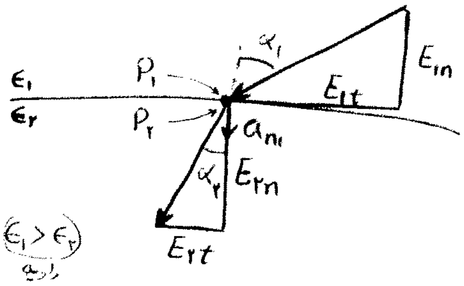
بردار قطبی شدن در خارج ورقه صفر است: $P_0 = 0$

در داخل ورقه داریم: $P_i = D_i - \epsilon_0 E_i = a_x \left(1 - \frac{1}{3.2}\right) \epsilon_0 E_0 = a_x\, 0.6875\, \epsilon_0 E_0 \ \frac{C}{m^2}$

بدیهی است که اعمال شرایط مرزی در فصل مشترک سمت راست، E_0 و D_0 را در فضای آزاد سمت راست ورقه نتیجه می‌دهد.

تمرین: همین مسئله برای میدان الکتریکی غیر یکنواخت: $E_0 = a_x E(y)$

۱۴۲ مثال: دو محیط عایق با گذردهی‌های ϵ_1 و ϵ_2 توسط یک سطح بدون بار از همدیگر جدا شده‌اند.
اندازه شدت میدان الکتریکی در نقطه P_1 واقع در محیط ۱ برابر E_1 و با راستای قائم زاویه α_1 می‌سازد.
اندازه و راستای میدان الکتریکی را در نقطه P_2 در محیط ۲ تعیین کنید.



برای بدست آوردن ۲ مجهول E_{2t} و E_{2n} دو معادله مورد نیاز است.
پس از یافتن E_{2t} و E_{2n} ، E_2 و α_2 بدست می‌آید.

$$E_{1t} = E_{2t} \Rightarrow E_2 \sin\alpha_2 = E_1 \sin\alpha_1$$

$$D_{1n} = D_{2n} \Rightarrow \epsilon_2 E_2 \cos\alpha_2 = \epsilon_1 E_1 \cos\alpha_1$$

با تقسیم دو معادله داریم:

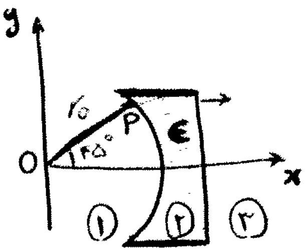
$$\frac{\tan\alpha_2}{\tan\alpha_1} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}$$

اندازه E_2 :

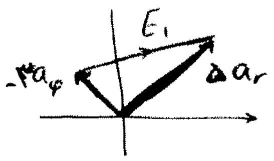
$$E_2 = \sqrt{E_{2t}^2 + E_{2n}^2} = \sqrt{(E_2 \sin\alpha_2)^2 + (E_2 \cos\alpha_2)^2}$$

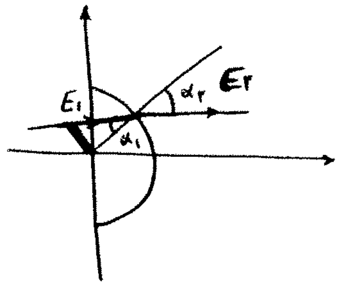
$$= \sqrt{(E_1 \sin\alpha_1)^2 + \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} E_1 \cos\alpha_1\right)^2}$$

$$\Rightarrow E_2 = E_1 \sqrt{\sin^2\alpha_1 + \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \cos\alpha_1\right)^2}$$



ت ۳-۲۸ هیت ۱۷۷ مثال: اگر میدان E_1 در نقطه $P(r_0, 45^\circ, z)$ در ناحیه ① برابر $5a_r - 3a_\varphi$ باشد، ضریب دی‌الکتریک عدسی چقدر باشد تا E_3 در ناحیه ③ موازی محور x ها گردد.





$$\tan\alpha_2 = \tan 45^\circ = 1$$

$$E_1 = 5a_r - 3a_\varphi$$

$$\hookrightarrow \tan\alpha_1 = \left|\frac{3}{5}\right|$$

$$\frac{\tan\alpha_2}{\tan\alpha_1} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \Rightarrow \frac{1}{3/5} = \frac{\epsilon_0\epsilon_r}{\epsilon_0}$$

$$\alpha_1 = \tan^{-1}\frac{3}{5} \simeq 30/96^\circ$$

$$\Rightarrow \epsilon_r = \frac{5}{3} \simeq 1/67$$

۱۴۴ مثال: در یک کابل هم محور شعاع هادی درونی توسط جریان و اندازه کل توسط ولتاژ و ماده عایق بکار رفته تعیین می‌شود.
چنگ

فرض شعاع هادی درونی ۰/۴ cm و لایه‌ای هم مرکز لاستیکی $\epsilon_{rr}=3.2$ و پلی استیرین $\epsilon_{rp}=2.6$ بعنوان مواد عایقی بکار روند.

$25\times10^{6}\ \mathrm{V/m}$ ‏ ‏ $20\times10^{6}\ \mathrm{V/m}$ استقامت دی الکتریک جدول ص ۱۳۷

کابلی طراحی کنید که در ولتاژ تا $20\ \mathrm{kV}$ کار کند.

برای اجتناب از شکست ناشی از افزایش غیرعادی ولتاژ (در اثر آذرخش و ...) حداکثر شدت میدان الکتریکی در مواد عایق نباید از ۲۵٪ استقامت الکتریکی آنها تجاوز کند.

در لاستیک
$$E_{r\,max} = 25\% \times 25\times10^{6} = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{3.2\,r_i}\right) \quad (1)$$

در پلی استیرین
$$E_{p\,max} = 25\% \times 20\times10^{6} = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{2.6\,r_p}\right)$$

با ترکیب دو معادله داریم:
$$r_p = 1.54\,r_i = 0.616\ \mathrm{cm}$$

نتیجه بیانگر آنست که لایه عایق پلی استیرین باید بیرون لایه عایق لاستیکی قرار داده شود.

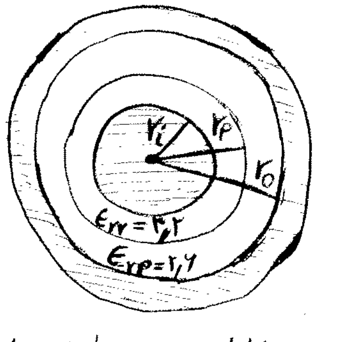
کابل باید در اختلاف پتانسیل $20{,}000\ \mathrm{V}$ بین هادیهای درونی و بیرونی کار کند یعنی:
$$-\int_{r_o}^{r_p} E_p\,dr - \int_{r_p}^{r_i} E_r\,dr = 20{,}000$$

$$E_p, E_r = a_r\frac{\rho_L}{2\pi\epsilon r} \;\rightarrow\; \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{\epsilon_{rp}}\ln\frac{r_o}{r_p} + \frac{1}{\epsilon_{rr}}\ln\frac{r_p}{r_i}\right) = 20{,}000$$

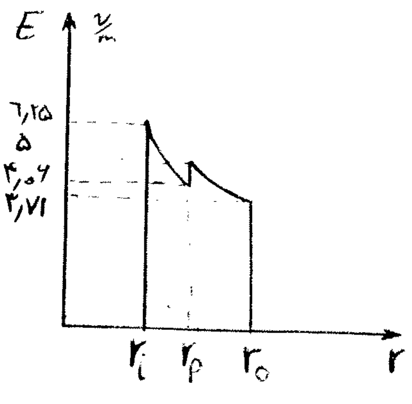
$$\frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{2.6}\ln\frac{r_o}{1.54\,r_i} + \frac{1}{3.2}\ln 1.54\right) = 20{,}000$$

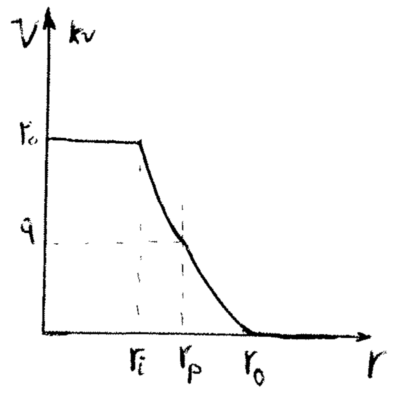
چون $r_i = 0.4\ \mathrm{mm}$ جایگذاری در (1): $\frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} = 8\times10^{4}$

$$r_o = 2.08\,r_i = 0.832\ \mathrm{cm}$$



سطح مقطع کابل هم محور با ۲ نوع عایق مختلف





تمرین:

۱) دیورژانس بردارهای زیر را در مبداء مختصات بدست آورید.

$$A = 2e^{3x}\sin 5y\,\hat{a}_x + 2e^{2x}\cos 5y\,\hat{a}_y + 3ze^{4z}\,\hat{a}_z \equiv A_x\hat{a}_x + A_y\hat{a}_y + A_z\hat{a}_z$$

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} = 6e^{3x}\sin 5y\Big|_{(0,0,0)}^{\text{مبداء}} = 0 \qquad \frac{\partial A_y}{\partial y} = -10e^{2x}\sin 5y\Big|_{(0,0,0)} = 0 \qquad \frac{\partial A_z}{\partial z} = 3e^{4z} + 12ze^{4z}\Big|_{(0,0,0)} = 3$$

$$\nabla\cdot\bar{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = 0 + 0 + 3 \Rightarrow \underline{\nabla\cdot\bar{A} = 3}$$

$$\bar{B} = \rho\hat{a}_\rho \quad (B_\rho = \rho,\ B_\phi = B_z = 0)$$

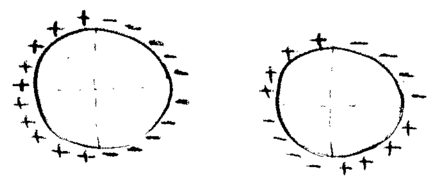
$$\nabla\cdot\vec{B} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho B_\rho) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^2) = \frac{2\rho}{\rho} = 2 \Rightarrow \underline{\nabla\cdot\vec{B} = 2}$$

۲) اگر $\vec{D} = 2xyz^3\hat{a}_x + x^2z^3\hat{a}_y + 3x^2yz^2\hat{a}_z$ ، مقدار تقریبی بار داخل مکعبی کوچک به ضلع 10^{-4} متر را در نقطه $P(1,2,3)$ محاسبه کنید.

$$\nabla\cdot\vec{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 2yz^3 + 0 + 6x^2yz = 2\times(2)(3)^3 + 6(1)^2(2)(3) = 144$$

$$\nabla\cdot\vec{D} = \frac{dQ}{dV}\ (dV\to 0) \Rightarrow 144 = \frac{dQ}{10^{-12}} \Rightarrow \underline{dQ = 144\ \text{PC}}$$

۳) یک میله شیشه‌ای را به فرم دایره‌ای به شعاع R درمی‌آوریم. بار Q را بطور یکنواخت به فرم زیر توزیع می‌کنیم. میدان E را در راستای محور دایره را بدست آورید. ([illegible])



ظرفیت خازنها :

هادی در میدان الکتریکی ساکن یک جسم هم‌پتانسیل است و بارهای آن بر روی سطح به گونه‌ای توزیع شده‌اند که میدان الکتریکی داخلی صفر شود.

← اگر پتانسیل ناشی از بار Q ، V ولت باشد

افزایش کل بار ، تنها چگالی بار سطحی ρ_s را در همه نقاط به همان نسبت افزایش خواهد داد. (توزیع بار ثابت می‌ماند ، سطح هم‌پتانسیل)

از رابطه $V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{s'}\frac{\rho_s}{R}ds'$ نتیجه می‌شود که پتانسیل یک هادی مجزا متناسب با بار کل روی آن است.

$\uparrow V \rightarrow \uparrow E \rightarrow \uparrow \rho_s \rightarrow \uparrow Q$

افزایش V با ضریب k ، میدان E را با همان نسبت افزایش می‌دهد. $E=-\nabla V$

همچنین ρ_s و در نتیجه بار کل Q نیز با همان ضریب افزایش می‌دهد. $E=a_n\frac{\rho_s}{\epsilon_0}$

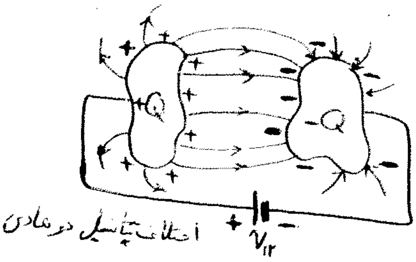
بنابراین نسبت $\frac{Q}{V}$ بدون تغییر باقی می‌ماند و داریم : $\underline{Q=CV}$

ثابت تناسب C ، ظرفیت جسم هادی مجزا نامیده می‌شود (واحد : $\frac{\text{کولمب}}{\text{ولت}}$ $\frac{C}{V} \leftarrow F$ فاراد)

ظرفیت یعنی مقدار بار الکتریکی که باید به جسم افزوده شود تا پتانسیل الکتریکی آن به اندازه واحد افزایش یابد.

کاربرد عملی : خازن متشکل از دو هادی که توسط فضای آزاد یا محیط دی‌الکتریک از هم جدا شده است.

وقتی یک منبع ولتاژ dc بین هادیها متصل می‌شود ، انتقال بار صورت پذیرفته و بار $+Q$ روی یک هادی و بار $-Q$ روی هادی دیگر قرار می‌گیرد



خطوط میدان از بارهای مثبت به بارهای منفی

خطوط میدان عمود بر سطوح هادی (سطح هم‌پتانسیل)

$$C=\frac{Q}{V_{12}} \quad (F)$$

ظرفیت یک خازن یک خاصیت فیزیکی سیستم متشکل از دو هادی است و به شکل هندسی و گذردهی محیط بین آنها بستگی دارد نه به بار Q و پتانسیل V_{12}

یک خازن دارای ظرفیت است حتی اگر هیچ ولتاژی به آن اعمال نشده باشد و یا هیچ بار آزادی روی هادی‌های آن نباشد.

تعیین ظرفیت خازن :

(۱) تعیین Q برحسب V_{12} (معلوم) [نیازمند حل شرایط مرزی]

(۲) تعیین V_{12} برحسب Q (معلوم) ✓

مراحل : ۱) تشخیص دستگاه مختصات مناسب

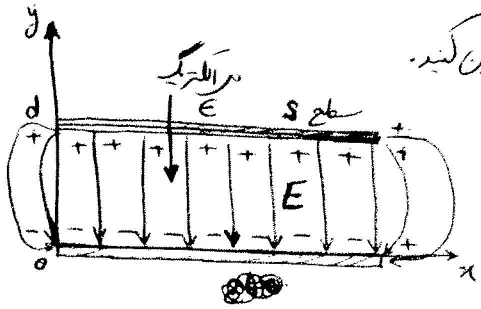
۲) در نظر گرفتن بارهای $+Q$ و $-Q$ روی هادیها

۳) محاسبه E از روی Q (گوس یا ...)

۴) ... ۵) محاسبه C از نسبت Q/V_{12}

مثال: خازن صفحه‌ای موازی، از دو صفحه هادی موازی به سطح S و به فاصله یکنواخت d تشکیل می‌شود.

فضای بین صفحه‌ها با یک دی‌الکتریک با گذردهی ثابت ϵ پر شده است. ظرفیت آن را تعیین کنید.



دستگاه مختصات مناسب: کارتزین

بارهای $+Q$ و $-Q$ روی صفحات هادی بالایی و پایینی

فرض: توزیع یکنواخت بارها روی صفحات هادی با چگالی سطحی ρ_s و $-\rho_s$

معلوم $Q \rightarrow V_{12}$ ✓

و داریم: $\rho_s = \frac{Q}{S}$

$$E = -a_y \frac{\rho_s}{\epsilon} = -a_y \frac{Q}{\epsilon S}$$

اگر از اثرات لبه‌ای میدان الکتریکی در کناره‌های صفحات صرف‌نظر شود، E در داخل دی‌الکتریک ثابت است.

$$V_{12} = -\int_{y=0}^{y=d} E \cdot dl = -\int_0^d \left(-a_y \frac{Q}{\epsilon S}\right) \cdot (a_y\, dy) = \frac{Q}{\epsilon S} d$$

بنابراین برای خازن صفحه‌ای موازی: $C = \frac{Q}{V_{12}} = \epsilon \frac{S}{d}$

که مستقل از Q یا V_{12} است.

در این مسئله می‌توانستیم با فرض اختلاف پتانسیل V_{12} بین صفحات بالایی و پایینی شروع کنیم.

شدت میدان الکتریکی میان صفحات یکنواخت بوده و مساوی است با: $E = -a_y \frac{V_{12}}{d}$

معلوم $V_{12} \rightarrow Q$ ✓

چگالی‌های بار سطحی در صفحات هادی بالایی و پایینی به ترتیب $+\rho_s$ و $-\rho_s$ است،

که با توجه به معادله $\left(E_n = \frac{\rho_s}{\epsilon_0}\right)$ داریم: $\rho_s = \epsilon E_y = \epsilon \frac{V_{12}}{d}$

بنابراین: $Q = \rho_s S = \left(\epsilon \frac{S}{d}\right) V_{12}$

$$\boxed{C = \frac{Q}{V_{12}} = \epsilon \frac{S}{d}}$$

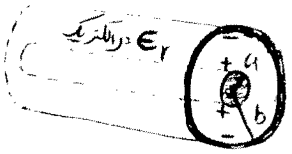
نتیجه مثل ✓

مثال: یک خازن استوانه‌ای از یک هادی داخلی به شعاع a و یک هادی بیرونی با شعاع داخلی b تشکیل شده است. ص ۱۴۲

فضای بین هادی‌ها از دی‌الکتریک با گذردهی ϵ پر شده و طول خازن برابر L است. ظرفیت خازن؟

حل: در مختصات استوانه‌ای، بارهای $+Q$ و $-Q$ به ترتیب روی سطح هادی داخلی و روی سطح داخلی هادی بیرونی است.

میدان با استفاده از قانون گوس، میدان E در سطح هادی فقط مولفه عمودی دارد.



$$E = a_r E_r = a_r \frac{Q}{2\pi\epsilon L r}$$

صرف‌نظر از اثر لبه‌ها (انتها)

اختلاف پتانسیل هادی‌های داخلی و خارجی:

$$V_{ab} = -\int_{r=b}^{r=a} E \cdot dl = -\int_b^a \left(a_r \frac{Q}{2\pi\epsilon L r}\right)\cdot(a_r\, dr)$$

$$= \frac{Q}{2\pi\epsilon L}\ln\left(\frac{b}{a}\right) \Longrightarrow C = \frac{Q}{V_{ab}} = \frac{2\pi\epsilon L}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

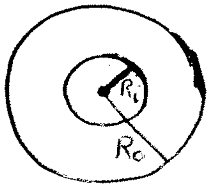
خازن استوانه‌ای

این مسئله را نمی‌توان با یک V_{ab} مفروض حل نمود زیرا میدان الکتریکی بین هادی‌های داخلی و خارجی یکنواخت نیست.

تا زمان بکارگیری شرط مرزی نمی‌توانیم E و Q را از V_{ab} بدست آوریم.

مثال: یک خازن کروی از یک کره هادی به شعاع R_i و یک هادی بیرونی با دیواره داخلی کروی به شعاع R_o تشکیل شده است. ص ۱۵۱

فضای بین هادی‌ها از دی‌الکتریک با گذردهی ϵ پر شده است. ظرفیت خازن؟



فرض بارهای $+Q$ و $-Q$ به ترتیب روی هادی‌های داخلی و خارجی خازن کروی قرار دارند.

با بکارگیری قانون گوس در سطح کروی به شعاع $R_i < R < R_o$:

$$E = a_R E_R = a_R \frac{Q}{4\pi\epsilon R^2}$$

$$V = -\int_{R_o}^{R_i} E \cdot (a_R\, dR) = -\int_{R_o}^{R_i} \frac{Q}{4\pi\epsilon R^2}\, dR = \frac{Q}{4\pi\epsilon}\left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_o}\right)$$

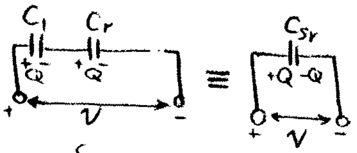
بنابراین در یک خازن کروی:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{4\pi\epsilon}{\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_o}}$$

* در مورد یک هادی کروی مجزا به شعاع R_i: $R_o \to \infty$

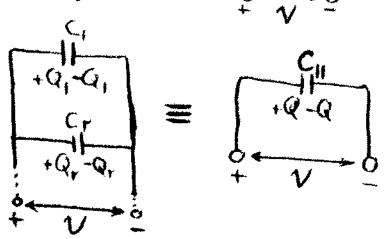
$$C = 4\pi\epsilon R_i$$

اتصال خازن‌ها:



اتصال سری:

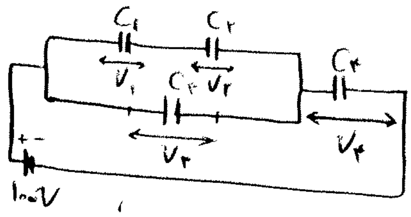
$$V=\frac{Q}{C_{sr}}=\frac{Q}{C_1}+\frac{Q}{C_2}+\cdots \rightarrow \boxed{\frac{1}{C_{sr}}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\cdots}$$



اتصال موازی:

$$Q=Q_1+Q_2+\cdots=C_1V+C_2V+\cdots \rightarrow \boxed{C_{\parallel}=C_1+C_2+\cdots}$$

ص ۱۵۲ مثال:



چهار خازن C_1، C_2، C_3 و C_4 به ترتیب برابر ۱، ۲، ۳ و ۴ میکروفاراد به هم متصل شده‌اند.
مطلوبست: ظرفیت معادل کل، بار روی هر خازن و اختلاف پتانسیل دو سر هر خازن؟

سری $C_{12}=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}=\frac{2}{3}\ \mu F$

موازی $C_{123}=C_{12}+C_3=\frac{11}{3}\ \mu F$

$$C_t=\frac{C_{123}C_4}{C_{123}+C_4}=\frac{44}{23}=1.913\ \mu F$$

چهار مجهول Q_1، Q_2، Q_3، Q_4
چهار معادله لازم داریم:

$$\begin{cases} Q_1=Q_2 & \text{اتصال سری} \\ \frac{Q_1}{C_1}+\frac{Q_2}{C_2}=\frac{Q_3}{C_3} & KVL\ (V_1+V_2=V_3) \\ \frac{Q_3}{C_3}+\frac{Q_4}{C_4}=100 & KVL\ (V_3+V_4=100) \\ Q_2+Q_3=Q_4 & \text{اتصال سری} \end{cases}$$

$$\frac{Q_1}{1}+\frac{Q_1}{2}=\frac{Q_3}{3} \Rightarrow \boxed{Q_3=4.5\,Q_1}$$

$$Q_1+Q_3=Q_4=5.5\,Q_1$$

$$\frac{Q_3}{3}+\frac{Q_4}{4}=\frac{4.5\,Q_1}{3}+\frac{5.5\,Q_1}{4}=100 \Rightarrow \boxed{Q_1=\frac{400}{11.5}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Q_1=Q_2=\frac{400}{11.5}=34.8\ \mu C \\ Q_3=4.5\,Q_1=156.5\ \mu C \\ Q_4=5.5\,Q_1\simeq 191.3\ \mu C \end{cases}$$

با تقسیم بارها بر ظرفیت داریم:

$$\begin{cases} V_1=\frac{Q_1}{C_1}=34.8\ V \\ V_2=\frac{Q_2}{C_2}=17.4\ V \\ V_3=\frac{Q_3}{C_3}=52.2\ V \\ V_4=\frac{Q_4}{C_4}=47.8\ V \end{cases}$$

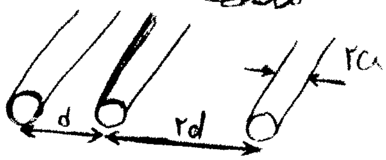
ظرفیت در سیستم چند هادی:

پتانسیل

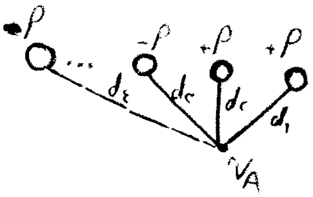
$$[V]=[P][Q]$$

ظرفیت و القاء

$$[Q]=[C][V]$$



مثال: سه سیم هادی افقی موازی با شعاع a و مجزا شده از زمین مطابق شکل،
ص ۱۵۶ با فرض $d \gg a$ ظرفیتهای جزئی بر واحد طول این سیمها را بدست آورید؟



نکته: پتانسیل نقطه A با فواصل $d_1, d_2, \dots, d_n$ از سیمهای حامل با چگالی بار $\pm\rho$

$$V_A=\frac{\rho}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{\prod \text{فاصله نقطه از منفی ها}}{\prod \text{فاصله نقطه از مثبت ها}}\right)=\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{d_1 d_2}{d_3 d_4}\right)$$

انرژی:

پتانسیل الکتریکی یک نقطه در میدان الکتریکی: کار لازم برای آوردن یک بار مثبت واحد از بی‌نهایت به آن نقطه ($V_{ref}=0$)

آوردن بار Q_1 از بی‌نهایت به محل استقرار: میدان نداریم ← کاری انجام نمی‌دهیم

کار لازم برای آوردن بار Q_2 از بی‌نهایت به فاصله R_{12} از بار Q_1 در مقابله با میدان این بار در فضای آزاد:

$$W_2 = Q_2 V_2 = Q_2 \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_{12}}$$

میدان الکترستاتیک ذخیره‌شونده است و W_2 مستقل از مسیر Q_2 است:

$$W_2 = Q_1 \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_{12}} = Q_1 V_1$$

این کار به صورت انرژی پتانسیل در دو بار ذخیره می‌شود:

$$W_2 = \frac{1}{2}\left(Q_1 V_1 + Q_2 V_2\right)$$

اگر بار Q_3 را از بی‌نهایت به نقطه‌ای به فاصله R_{13} از Q_1 و R_{23} از بار Q_2 بیاوریم:

کار اضافی برابر است با:

$$\Delta W = Q_3 V_3 = Q_3\left(\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_{13}} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_{23}}\right)$$

انرژی پتانسیل W_3 که در مجموعه سه بار ذخیره شده است:

$$W_3 = W_2 + \Delta W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1 Q_2}{R_{12}} + \frac{Q_1 Q_3}{R_{13}} + \frac{Q_2 Q_3}{R_{23}}\right)$$

$$W_3 = \frac{1}{2}\left[Q_1\left(\frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_{12}} + \frac{Q_3}{4\pi\varepsilon_0 R_{13}}\right) + Q_2\left(\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_{12}} + \frac{Q_3}{4\pi\varepsilon_0 R_{23}}\right) + Q_3\left(\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_{13}} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_{23}}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(Q_1 V_1 + Q_2 V_2 + Q_3 V_3\right)$$

[V_1 پتانسیل در نقطه Q_1 ناشی از دو بار Q_2 و Q_3]

تعمیم روش: (آوردن بارهای اضافی)

انرژی پتانسیل مجموعه N بار نقطه‌ای گسسته ساکن:

انرژی الکتریکی $$W_e = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} Q_k V_k \quad (J)$$

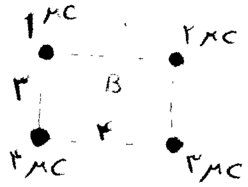
$$V_k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{\substack{j=1 \\ (j\neq k)}}^{N} \frac{Q_j}{R_{jk}}$$

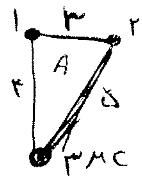
که در آن V_k پتانسیل الکتریکی در نقطه Q_k ناشی از بارهای دیگر است.

W_e {
- می‌تواند منفی باشد: بارهای مختلف العلامه، انجام کار توسط میدان (نه بر علیه میدان)
- تنها انرژی متقابل بارهاست (کار لازم برای تشکیل خود بارهای نقطه‌ای منظور نیست)

بطور معمول ژول واحد کار بسیار بزرگی است و لذا از واحد کوچکتری بنام الکترون ولت برای سنجش انرژی استفاده میشود
یک الکترون ولت انرژی یا کار لازم برای حرکت دادن یک الکترون در خلاف پتانسیل یک ولت است.

$$1\ eV = 1.6\times10^{-19}\times 1 = 1.6\times10^{-19}\ J$$





مثال عددی: انرژی لازم برای ایجاد مجموعه بارهای زیر را بدست آورید:

$$W_e = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3} Q_k V_k \quad , \quad V_k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{N} \frac{Q_j}{R_{jk}}$$

$\underrightarrow{A}$

$$V_1 = 9\times10^{9}\times10^{-6}\times\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\right) = 9\times10^{+3}\,(1.41)$$

$$V_2 = \left(\frac{1}{3}+\frac{3}{5}\right) = (.93)$$

$$V_3 = \left(\frac{1}{4}+\frac{2}{5}\right) = (.65)$$

$$W_e = \frac{1}{2}\Big(\overbrace{1\times1.41+2\times.93+3\times.65}^{5.22}\Big)\times10^{-6}\times9\times10^{3} = 23.49\times10^{-3}\ J$$

$\underrightarrow{B}$

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_2}{R_{12}}+\frac{Q_3}{R_{13}}+\frac{Q_4}{R_{14}}\right) = \qquad eV$$

$$V_1 = 9\times10^{9}\left(\frac{2}{4}+\frac{3}{5}+\frac{4}{3}\right)\times10^{-6} = 9\times10^{3}\times2.43$$

$$V_2 = 9\times10^{9}\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{3}+\frac{4}{5}\right) = \times2.05$$

$$V_3 = \left(\frac{1}{5}+\frac{2}{3}+\frac{4}{4}\right) = \times1.86$$

$$V_4 = \left(\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{3}{4}\right) = \times1.48$$

$$W_e = \frac{1}{2}\Big(\overbrace{1\times2.43+2\times2.05+3\times1.86+4\times1.48}^{18.03}\Big)\times10^{-6}\times9\times10^{3} = 81.14\times10^{-3}\ J$$

انرژی بار پیوسته:

انرژی لازم برای تشکیل یک کره با بار یکنواخت به شعاع b و چگالی بار حجمی ρ را پیدا کنید.

در مسئله تقارن داریم.

حل ساده: فرض می‌کنیم کره با بار از کنار هم قرار دادن لایه‌های متوالی کروی به ضخامت dR تشکیل یافته است.

پتانسیل در شعاع R برابر است با:

$$V_R = \frac{Q_R}{4\pi\epsilon_0 R} \quad (1)$$

که Q_R در آن کل بار موجود در کروی به شعاع R است:

$$Q_R = \rho \frac{4}{3}\pi R^3 \quad (2)$$

بار دیفرانسیلی در لایه کروی به ضخامت dR برابر است با:

$$dQ_R = \rho\, 4\pi R^2\, dR \quad (3)$$

کار یا انرژی برای گردآوری dQ:

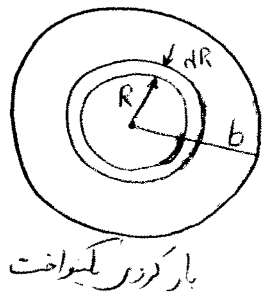
$$dW = V_R\, dQ_R = \frac{4\pi}{3\epsilon_0}\rho^2 R^4 dR \quad (4)$$

از این رو کار لازم برابر است با:

$$W = \int dW = \frac{4\pi}{3\epsilon_0}\rho^2\int_0^b R^4 dR = \frac{4\pi\rho^2 b^5}{15\epsilon_0} \ (J)$$

$$Q = \rho\frac{4\pi}{3}b^3$$

$$\rightarrow W = \frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 b} \ (J)$$



بار کروی یکنواخت

اصلاح فرمول W_e از حالت گسسته برای توزیع پیوسته بار با چگالی ρ :

$$\begin{cases} Q_k \longrightarrow \rho\, dv \\ \sum \longrightarrow \int \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boxed{W_e = \frac{1}{2}\int_{v'} \rho V\, dv \quad (J)}$$

V پتانسیل در محل بار حجمی ρ
v' حجم ناحیه ρ

مثال: حل مثال قبل به روش فوق:

در حل قبل بارها با تشکیل لایه لایه کره‌های متوالی با ضخامت دیفرانسیلی ایجاد شده است

در اینجا کره باردار از قبل تشکیل شده است.

$$W_e = \frac{\rho}{2}\int_{v'} V\, dv = \frac{\rho}{2}\int_0^b V\, 4\pi R^2 dR$$

ρ ثابت ← از انتگرال بیرون می‌آید
تقارن کروی داریم

V: پتانسیل در نقطه‌ای به فاصله R از مرکز

$$E_{R_1} = a_R \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = a_R \frac{\rho b^3}{3\epsilon_0 R^2} \qquad R \geq b$$

$$E_{R_2} = a_R \frac{Q_R}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = a_R \frac{\rho R}{3\epsilon_0} \qquad 0 < R \leq b$$

$R \frown b \frown \infty$

$$V = -\int_\infty^R E \cdot dR = -\left[\int_\infty^b E_{R_1} dR + \int_b^R E_{R_2} dR\right]$$

$$= -\left[\int_\infty^b \frac{\rho b^3}{3\epsilon_0 R^2} dR + \int_b^R \frac{\rho R}{3\epsilon_0} dR\right]$$

$$= \frac{\rho}{3\epsilon_0}\left(b^2 + \frac{b^2}{2} - \frac{R^2}{2}\right)$$

$$= \frac{\rho}{3\epsilon_0}\left(\frac{3}{2}b^2 - \frac{R^2}{2}\right)$$

جایگذاری در رابطه W_e:

$$W_e = \frac{\rho}{2}\int_0^b \frac{\rho}{3\epsilon_0}\left(\frac{3}{2}b^2 - \frac{R^2}{2}\right) 4\pi R^2 dR = \boxed{\frac{4\pi\rho^2 b^5}{15\,\epsilon_0}}$$

انرژی الکتریستیه برحسب کمیات میدان:

$$W_e = \frac{1}{2}\int_v D\cdot E\, dv = \frac{1}{2}\int_v \epsilon E^2 dv = \frac{1}{2}\int_v \frac{D^2}{\epsilon} dv$$

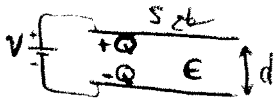
$$W_e = \frac{1}{2}\int_v \overset{\rho}{(\nabla\cdot D)}\, V\, dv$$

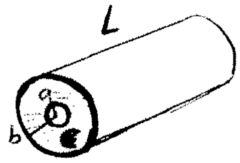
$$\nabla\cdot(VD) = \underbrace{V\,\nabla\cdot D}_{0} + D\cdot\nabla V$$

انرژی ذخیره شده در خازن صفحه‌ای:

$$E = \frac{V}{d} \;\; \rightarrow \;\; W_e = \frac{1}{2}\int_v \epsilon \left(\frac{V}{d}\right)^2 dv = \frac{1}{2}\epsilon\left(\frac{V}{d}\right)^2 S d = \frac{1}{2}\left(\epsilon\frac{S}{d}\right)V^2$$

$$\rightarrow W_e = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}QV = \frac{Q^2}{2C} \;\; J$$





مثال: مطلوبست محاسبه انرژی یک خازن استوانه‌ای بطول L به شعاع‌های درونی و بیرونی b, a

با اعمال قانون گوس داریم:

$$E = a_r E_r = a_r \frac{Q}{2\pi\varepsilon L r} \qquad a<r<b$$

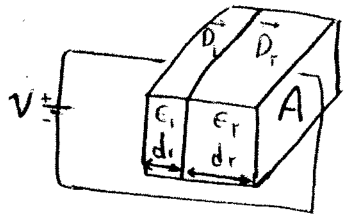
کلی

$$\frac{1}{2}\int \epsilon E^2 dv \longrightarrow W_e = \frac{1}{2}\int_a^b \epsilon\left(\frac{Q}{2\pi\varepsilon L r}\right)^2 (L 2\pi r dr) = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon L}\int_a^b \frac{dr}{r} = \boxed{\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon L}\ln\frac{b}{a}}$$

انرژی الکتروستاتیکی ذخیره شده، (در ناحیه دی‌الکتریک)

بدست آمده

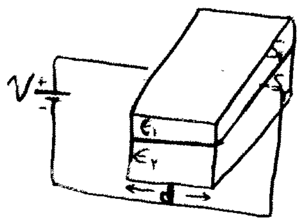
$$W_e = \frac{Q^2}{2C} \Rightarrow \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon L}\ln\frac{b}{a} = \frac{Q^2}{2C} \Rightarrow \boxed{C = \frac{2\pi\varepsilon L}{\ln\frac{b}{a}}}$$



ظرفیت خازن مسطح با دی‌الکتریک‌های متفاوت:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{V_1+V_2} = \frac{A\rho_s}{E_1 d_1 + E_2 d_2} = \frac{A\epsilon_1 E_1}{E_1 d_1 + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}E_1 d_2} = \boxed{\frac{A\,\epsilon_1\epsilon_2}{\epsilon_2 d_1 + \epsilon_1 d_2}}$$

$$\begin{cases} D_1 = \rho_s = \epsilon_1 E_1 \\ D_1 = D_2 \Rightarrow \epsilon_1 E_1 = \epsilon_2 E_2 \Rightarrow E_2 = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}E_1 \end{cases}$$



$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\rho_1 S_1 + \rho_2 S_2}{E d} = \frac{\epsilon_1 \cancel{E} S_1 + \epsilon_2 \cancel{E} S_2}{\cancel{E} d} = \boxed{\frac{\epsilon_1 S_1 + \epsilon_2 S_2}{d}}$$

$$V = V_1 = V_2 = E_1 d_1 = E_2 d_2 = E d$$

کابل هم محوری منطبق بر محور x است. شعاع های داخلی و خارجی a و b است. فضای بین دو رسانا از یک عایق ناهمگن با ضریب عایقی $\varepsilon = \varepsilon_0 e^{-|x|}$ پر شده است. ظرفیت خازنی چنین کابلی با طول بی‌نهایت را حساب کنید

$$\frac{1}{C} = \int \frac{dl}{\iint \varepsilon\, ds}$$

$$\iint \varepsilon\, ds = \int_{x=-\infty}^{\infty}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \varepsilon_0 e^{-|x|} r\, d\varphi\, dz = 2\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} \varepsilon_0 e^{-x} r\, d\varphi\, dz = 4\pi\varepsilon_0 r$$

$$\frac{1}{C} = \int_a^b \frac{dr}{4\pi\varepsilon r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\Big[\ln r\Big]_a^b = \frac{\ln(b/a)}{4\pi\varepsilon_0} \Rightarrow C = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\ln(b/a)}$$

صفحات هادی کامل: $\begin{cases}\varphi = 30\\ \varphi = 45\end{cases}$ $0.02 < r < 0.5^m$

$$E_\varphi(r = 0.2^m, \varphi = 36^\circ) = 240\ V/m$$

اگر صفحه $\varphi = 45^\circ$ زمین شده باشد، پتانسیل صفحه $\varphi = 30$ را بدست آورید.

لاپلاس $\nabla^2 V = 0$ $V(\varphi)$

$$V = A\varphi + B$$

$$V(\tfrac{\pi}{4}) = A\frac{\pi}{4} + B = 0 \quad (1)$$

$$E = -\nabla V = \frac{-1}{r}\frac{\partial V}{\partial \varphi} a_\varphi = -\frac{A}{r}\hat{a}_\varphi$$

$$\Rightarrow 240 = \frac{-A}{0.2} \Rightarrow A = -48 \quad (2)$$

با جایگذاری ۲ در ۱

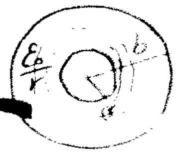
$$B = +12\pi$$

$$\Rightarrow V = -48\varphi + 12\pi$$

$$V(\tfrac{\pi}{6}) = -48\frac{\pi}{6} + 12\pi = 4\pi$$

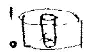
بین دو استوانه هادی هم محور به شعاع‌های a و b از عایقی با ثابت دی‌الکتریک $\epsilon = \frac{\epsilon_0}{r}$ پر شده است.

ظرفیت خازن واحد طول را محاسبه کنید.



روش کلاسیک $C = \frac{Q \to \rho \to E \to V}{V \to \int E \cdot dl \quad Q}$

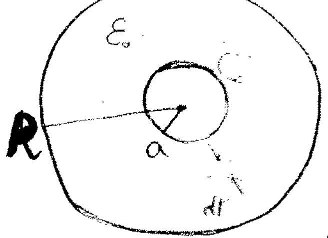
روش دیگر: ظرفیت چند خازن سری: $\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}$ $\longleftarrow$ $C = \frac{1}{\int \frac{dl}{\int_s \epsilon\, ds}}$



$$\frac{1}{C} = \int \frac{dl}{\int_s \epsilon\, ds}$$

$$\int \epsilon\, ds = \int_{z=0}^{1}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{\epsilon_0}{r}\, r\, d\varphi\, dz = 2\pi\epsilon_0$$

$$\frac{1}{C} = \int_a^b \frac{dr}{2\pi\epsilon_0} = \frac{b-a}{2\pi\epsilon_0} \longrightarrow \boxed{C = \frac{2\pi\epsilon}{b-a}}$$



کره فلزی بزرگی با رسانندگی σ و ضریب عایقی ϵ_0 به شعاع R مفروض است.

بار Q را در لحظه $t=0$ بطور یکنواخت در کره هم مرکز کوچکی به شعاع a قرار می‌دهیم.

تلفات حرارتی گذرای این بار چقدر است؟

$$\frac{1}{C} = \int \frac{dl}{\iint_s \epsilon_0\, ds}$$

خازن ایجاد شده:

$$\iint \epsilon_0\, ds = \iint_{\theta\,\varphi} \epsilon\, r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = 4\pi\epsilon r^2$$

$$\frac{1}{C} = \int \frac{dr}{4\pi\epsilon r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon}\left[\frac{-1}{r}\right]_a^R = \frac{1}{4\pi\epsilon}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{R}\right)$$

$$C = 4\pi\epsilon\left(\frac{1}{\frac{1}{a} - \frac{1}{R}}\right)$$

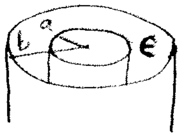
تلفات خواسته شده، مشابه حالتی است که خازن اولیه دارای Q باشد و پس از مدتی تخلیه شود

انرژی ذخیره شده اولیه $W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{R}\right)$

انرژی ذخیره شده نهایی $Q \to 0$ $W = 0$

$$\boxed{W_J = W = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{R}\right)}$$

در کابل هم‌محور ، ضریب عایقی ماده بین دو رسانا ϵ چگونه باشد تا اندازه میدان الکتریکی درون عایق کابل در تمام نقاط یکسان باشد.



قانون گوس $\nabla \cdot D = 0$

تقارن استوانه ، مولفه شعاعی

حل مختصات استوانه $D = \frac{A}{r}\hat{a}_r$

(A عدد ثابت : شرایط مرزی)

$$\nabla \cdot D = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rD_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

$$E = \frac{D}{\epsilon} = \frac{A}{r\epsilon}\hat{a}_r$$

برای آنکه E مستقل از فاصله باشد باید $r\epsilon$ عدد ثابت شود یعنی $\underline{\epsilon \propto \frac{1}{r}}$

در یک کره عایق چگالی حجمی بارهای پلاریزه یکنواخت و برابر با ρ_b است. بردار قطبی شدگی $\vec{P}$ داخل کره را بدست آورید.

$$\rho_b = -\nabla \cdot P$$

انتگرال‌گیری روی حجم :

$$\int_v \rho_b \, dv = \int_v (-\nabla \cdot P)\, dv$$

$$Q = -\oint_S \vec{P} \cdot ds$$

تقارن کروی : P فقط مولفه در جهت $\hat{a}_r$ دارد.

$$\frac{4}{3}\pi r^3(\rho_b) = -4\pi r^2 \vec{P}_r$$

$$\hookrightarrow \quad P_r = -\frac{\rho_b}{3}r \longrightarrow \quad \underline{\vec{P} = -\frac{\rho_b}{3} r\,\hat{a}_r}$$

[illegible] ص ۱۴۱-۱۷۲ برق ۸۲