

فهرست مطالب

www.free-elec-edu.blogfa.com

۱ مدل الکترومغناطیس ۱

۱	مقدمه	۱-۱
۴	مدل الکترومغناطیس	۲-۱
۹	واحدهای SI و ثوابت جهانی	۳-۱
۱۲	پرسش‌های دوره‌ای	

۲ آنالیز برداری ۱۵

۱۵	مقدمه	۱-۲
۱۷	جمع و تفریق برداری	۲-۲
۱۹	ضرب بردارها	۳-۲
۱۹	ضرب عددی یا داخلی	۱-۳-۲
۲۱	ضرب برداری یا خارجی	۲-۳-۲
۲۳	ضرب سه بردار	۳-۳-۲
۲۵	دستگاه‌های مختصات متعامد	۴-۲
۲۹	مختصات کارتزین	۱-۴-۲
۳۴	مختصات استوانه‌ای	۲-۴-۲
۳۹	مختصات کروی	۳-۴-۲

david k cheng

field and wave
electromagnetics

فهرست مطالب	نیروها و گشتاورهای مغناطیسی	۱۳-۶
۳۳۱	اثر هال	۱-۱۳-۶
۳۳۱	نیروها و گشتاورها در هادیهای حامل جریان	۲-۱۳-۶
۳۴۰	نیروها و گشتاورها برحسب انرژی مغناطیسی ذخیره شده	۳-۱۳-۶
۳۴۷	نیروها و گشتاورها برحسب اندوکتانس متقابل	۴-۱۳-۶
۳۵۱	پرسش‌های دوره‌ای	
۳۵۳	مسائل	
۳۵۶		

۷ میدانهای متغیر با زمان و معادلات ماکسول ۳۷۱

۳۷۱	مقدمه	۱-۷
۳۷۲	قانون القای الکترومغناطیسی فاراده	۲-۷
۳۷۴	مدار ساکن در میدان مغناطیسی تغییرپذیر با زمان	۱-۲-۷
۳۷۵	ترانسفورماتورها	۲-۲-۷
۳۸۰	هادی متحرک در میدان مغناطیسی ساکن	۳-۲-۷
۳۸۳	مدار متحرک در میدان مغناطیسی تغییرپذیر با زمان	۴-۲-۷
۳۸۸	معادلات ماکسول	۳-۷
۳۹۰	شکل انتگرالی معادلات ماکسول	۱-۳-۷
۳۹۳	توابع پتانسیل	۴-۷
۳۹۶	شرایط مرزی الکترومغناطیس	۵-۷
۳۹۸	فصل مشترک بین دو محیط خطی بی اتلاف	۱-۵-۷
۳۹۹	فصل مشترک بین یک دی‌الکتریک و یک هادی کامل	۲-۵-۷
۴۰۱	معادلات موج و حل آنها	۶-۷
۴۰۱	حل معادلات موج به منظور یافتن پتانسیل‌ها	۱-۶-۷
۴۰۳	معادلات موج بدون منبع	۲-۶-۷
۴۰۵	میدانهای هماهنگ زمانی	۷-۷
۴۰۵	کاربرد فازورها-دوره	۱-۷-۷
۴۰۸	الکترومغناطیس هماهنگ زمانی	۲-۷-۷

۲۳۷	مقدمه	۱-۵
۲۳۹	چگالی جریان و قانون اهم	۲-۵
۲۴۶	نیروی محرکه الکتریکی و قانون ولتاژ کیرشوف	۳-۵
۲۴۹	معادله پیوستگی و قانون جریان کیرشوف	۴-۵
۲۵۱	اتلاف توان و قانون ژول	۵-۵
۲۵۳	شرایط مرزی چگالی جریان	۶-۵
۲۵۸	محاسبه مقاومت	۷-۵
۲۶۳	پرسش‌های دوره‌ای	
۲۶۴	مسائل	

۶ میدانهای مغناطیسی ساکن ۲۷۱

۲۷۱	مقدمه	۱-۶
۲۷۳	اصول موضوعی مغناطیس ساکن در فضای آزاد	۲-۶
۲۷۹	پتانسیل مغناطیسی برداری	۳-۶
۲۸۲	قانون بیوساوار و کاربردهای آن	۴-۶
۲۸۷	دوقطبی مغناطیسی	۵-۶
۲۹۰	پتانسیل مغناطیسی عددی	۱-۵-۶
۲۹۲	مغناطیس‌شدگی و چگالی‌های جریان معادل	۶-۶
۲۹۶	چگالی‌های بار مغناطیسی معادل	۱-۶-۶
۲۹۹	شدت میدان مغناطیسی و نفوذپذیری نسبی	۷-۶
۳۰۲	مدارهای مغناطیسی	۸-۶
۳۰۹	رفتار مواد مغناطیسی	۹-۶
۳۱۵	شرایط مرزی میدان‌های مغناطیسی ساکن	۱۰-۶
۳۲۱	اندوکتانس‌ها و سلف‌ها	۱۱-۶
۳۲۳	انرژی مغناطیسی	۱۲-۶
۳۳۵	انرژی مغناطیسی برحسب کمیات میدان	۱-۱۲-۶

فهرست مطالب		
۴۹۱	بازتاب کلی	۱-۱۰-۸
۴۹۵	قطبی شدگی عمودی	۲-۱۰-۸
۴۹۸	قطبی شدگی موازی	۳-۱۰-۸
۵۰۲	پرسش‌های دوره‌ای	
۵۰۴	مسائل	

۹ تئوری و کاربردهای خطوط انتقال ۵۱۵

۵۱۵	مقدمه	۱-۹
۵۱۷	موج الکترومغناطیسی عرضی در طول یک خط انتقال صفحه‌ای موازی	۲-۹
۵۲۲	خطوط انتقال صفحه‌ای موازی با اتلاف	۱-۲-۹
۵۲۴	خطوط مایکرواستریپ	۲-۲-۹
۵۲۶	معادلات کلی خط انتقال	۳-۹
۵۲۹	مشخصات موج ورودی یک خط انتقال بی‌نهایت	۱-۳-۹
۵۳۵	پارامترهای خط انتقال	۲-۳-۹
۵۳۸	ثابت تضعیف از روی روابط توان	۳-۳-۹
۵۴۰	مشخصات موج در خطوط انتقال محدود	۴-۹
۵۴۵	خطوط انتقال به عنوان عناصر مدار	۱-۴-۹
۵۵۳	خطوط با ختم شدگی مقاومتی	۲-۴-۹
۵۵۹	خطوط با ختم شدگی دلخواه	۳-۴-۹
۵۶۲	مدارهای خط انتقال	۴-۴-۹
۵۶۶	حالت‌های گذرا در خطوط انتقال	۵-۹
۵۷۰	نمودارهای بازتاب	۱-۵-۹
۵۷۴	تحریک پالسی	۲-۵-۹
۵۷۷	خط با بار اولیه	۳-۵-۹
۵۷۹	خط با بار اکتیو	۴-۵-۹
۵۸۲	نمودار اسمیت	۶-۹
۵۹۳	محاسبات نمودار اسمیت در خطوط با اتلاف	۱-۶-۹

فهرست مطالب		
۴۱۰	میدانهای بدون منبع در محیط‌های ساده	
۴۱۴	طیف الکترومغناطیسی	۳-۷-۷
۴۱۷	پرسش‌های دوره‌ای	۴-۷-۷
۴۱۹	مسائل	

۸ امواج الکترومغناطیسی مسطح ۴۲۷

۴۲۷	مقدمه	۱-۸
۴۲۸	امواج مسطح در محیط‌های بدون اتلاف	۲-۸
۴۳۴	اثر داپلر	۱-۲-۸
۴۳۵	امواج الکترومغناطیسی عرضی	۲-۲-۸
۴۳۸	قطبی شدگی امواج مسطح	۳-۲-۸
۴۴۲	امواج مسطح در محیط با اتلاف	۳-۸
۴۴۴	دی‌الکتریک‌های کم اتلاف	۱-۳-۸
۴۴۴	هادیهای خوب	۲-۳-۸
۴۴۹	گازهای یونیزه	۳-۳-۸
۴۵۲	سرعت گروه	۴-۸
۴۵۷	گذران توان الکترومغناطیسی و بردار پوینتینگ	۵-۸
۴۶۰	جگالی‌های توان لحظه‌ای و متوسط	۱-۵-۸
۴۶۴	برخورد عمودی با یک مرز مسطح هادی	۶-۸
۴۶۹	برخورد مایل با یک مرز مسطح هادی	۷-۸
۴۶۹	قطبی شدگی عمودی	۱-۷-۸
۴۷۴	قطبی شدگی موازی	۲-۷-۸
۴۷۶	برخورد عمودی با یک مرز مسطح دی‌الکتریک	۸-۸
۴۸۲	برخورد عمودی با فصل مشترک‌هایی با چند دی‌الکتریک	۹-۸
۴۸۴	امپدانس موج میدان کل	۱-۹-۸
۴۸۶	تبدیل امپدانس با دی‌الکتریک‌های چندگانه	۲-۹-۸
۴۸۸	برخورد مایل به یک مرز مسطح دی‌الکتریک	۱۰-۸

مدل الکترومغناطیس

۱-۱ مقدمه

به بیان ساده، الکترومغناطیس^۱، مطالعه تأثیرات بارهای الکتریکی ساکن و متحرک است. از فیزیک مقدماتی می‌دانیم که دو نوع بار وجود دارد: مثبت و منفی. بارهای مثبت و منفی، هر دو منشأ یک میدان الکتریکی هستند. بارهای متحرک جریان را بوجود می‌آورند که یک میدان مغناطیسی را نتیجه می‌دهد. در اینجا ما منابع آزمایش از میدان الکتریکی و مغناطیسی به صورت کلی صحبت می‌کنیم، بعداً معانی صریح‌تری را به این اصطلاحات اختصاص خواهیم داد. میدان^۲ توزیع فضائی کمیتی است که ممکن است تابعی از زمان باشد یا نباشد. یک میدان الکتریکی متغیر با زمان توسط یک میدان مغناطیسی همراهی می‌شود و برعکس. به عبارت دیگر، میدانهای الکتریکی و مغناطیسی متغیر با زمان باهم تزیوج شده و یک میدان الکترومغناطیسی را نتیجه می‌دهند. تحت شرایط معینی، میدانهای الکترومغناطیسی وابسته به زمان، امواجی را تولید می‌کنند که از منبع تشعشع می‌یابند.

مفهوم میدانها و امواج در توضیح یک رویداد در فواصل دور اساسی است. مثلاً از مکانیک مقدماتی آموختیم که اجسام همدیگر را جذب می‌کنند و این دلیل آن است که چرا اشیاء به سمت زمین سقوط می‌کنند. اما از آنجائی که نخهای الاستیکی وجود ندارند که اشیاء سقوط کننده آزاد و زمین را بهم وصل کنند، چگونه این پدیده را توضیح می‌دهید؟ ما این پدیده عمل در یک

فاصله دور را با فرضیه وجود میدان نقل توضیح می دهیم. امکانات مخابرات ماهواره ای و دریافت سیگنال هاز کارشگران فضائی در فاصله های میلیون ها مایل دورتر را می توان تنها با فرضیه وجود میدانهای الکتریکی و مغناطیسی و امواج الکترومغناطیسی توضیح داد. در این کتاب، الکترومغناطیس را میدان و موج، اصول و کاربردهای قوانین الکترومغناطیسی حاکم بر پدیده های الکترومغناطیسی را

مورد مطالعه قرار می دهیم. الکترومغناطیس از نظر فیزیکدانها و مهندسين برق و کامپیوتر دارای اهمیت بنیادی است. نظریه الکترومغناطیس در تفهیم اصول شکافنده های اتمی^۱، نوسان نگارهای پرتو کاندی^۲، رادار^۳، مخابرات ماهواره ای^۴، دریافت تلویزیونی^۵، تشخیص از راه دور^۶، اخترشناسی رادیویی^۷، ادوات مایکروویو^۸، مخابرات الیاف نوری^۹، حالت های گذرا در خطوط انتقال و مسائل سازگاری الکترومغناطیسی^{۱۰}، سیستم های دقیق فرود^{۱۱}، تبدیل انرژی الکترومکانیکی^{۱۲} و غیره، اجتناب ناپذیر است. مفاهیم مدار، نمایشگر شکل محدود و حالت خاصی از مفاهیم الکترومغناطیس است. به طوری که ابعاد مدار هادی بسیار کوچکتر خواهیم دید، هنگامی که فرکانس منبع بسیار پایین است، به طوری که ابعاد مدار هادی بسیار کوچکتر از طول موج باشد وضعیت شب ساکن^{۱۳} برقرار خواهد بود که مسئله الکترومغناطیس را به مسئله مدار تبدیل می نماید. هرچند فوراً باید اضافه کنیم که نظریه مدارها خود یک نظم بسیار توسعه یافته و پیچیده است و در رده های متفاوتی از مسائل مهندسی برق کاربرد دارد و در جای خود پراهمیت است. دو وضعیت، عدم کفایت مفاهیم نظریه مدارها و نیاز به مفاهیم میدانهای الکترومغناطیس را

روشن می سازد. شکل ۱-۱، یک آنتن تک قطبی را از نوعی که در فرستنده ها و گیرنده های کوچک دستی^{۱۴} ملاحظه می کنیم، به نمایش می گذارد. در فرستنده، منبع پای آنتن، آن را با جریانی که حامل پیام است در فرکانس حامل مناسب تغذیه می کند. از دیدگاه نظریه مدار، منبع یک مدار باز را تغذیه می کند زیرا انتهای بالائی آنتن به طور فیزیکی به جائی وصل نیست، در نتیجه جریانی نمی گذرد و اتفاقی نمی افتد. البته این نظر نمی تواند توضیح دهد که چرا ارتباط بین فرستنده ها و گیرنده های کوچک دستی در فواصلی از هم می تواند انجام گیرد. در اینجا مفاهیم الکترومغناطیس باید بکار رود. در

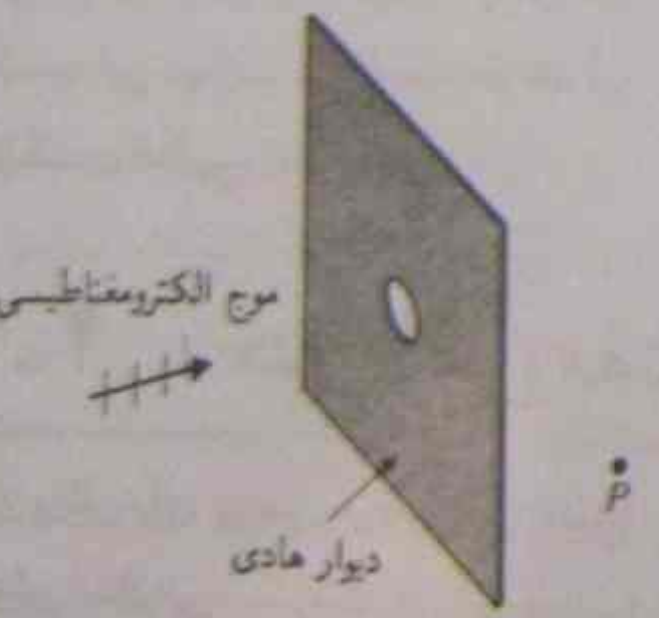
- | | |
|--------------------------------|---|
| ۱- Atom smashers | ۲- Cathode-ray-oscilloscopes |
| ۳- Radar | ۴- Satellite communication |
| ۵- Television reception | ۶- Remote sensing |
| ۷- Radio astronomy | ۸- Microwave devices |
| ۹- Optical fiber communication | ۱۰- Electromagnetic compatibility |
| ۱۱- Instrument-landing systems | ۱۲- Electromechanical energy conversion |
| ۱۳- Quasi-static | ۱۴- Walkie - talkie |



شکل ۱-۱ یک آنتن تک قطبی

فصل ۱۱ خواهیم دید که وقتی طول آنتن بخش قابل توجهی از طول موج حامل را تشکیل دهد، جریان غیریکتواختی در طول آنتن که یک انتهای باز دارد، راه می افتد. این جریان، میدان الکترومغناطیسی متغیر با زمانی را در فضا تشعشع می کند که به صورت یک موج الکترومغناطیسی انتشار می یابد و جریان هایی را در آنتن های دیگری که از آن فاصله دارند القا می نماید.

در شکل ۱-۲، وضعیتی را نشان می دهیم که یک موج الکترومغناطیسی از سمت چپ با یک دیواره هادی بزرگ شامل سوراخی کوچک (شکاف) برخورد می نماید. میدانهای الکترومغناطیس در نقاطی چون P در شکل، که لزوماً مستقیماً در پشت شکاف نیستند، در سمت راست دیواره وجود خواهند داشت. نظریه مدار، آشکارا برای تعیین (یا حتی توضیح وجود) میدان در P کفایت نمی کند. به هر حال، وضعیت شکل ۱-۲، مسئله ای با اهمیت عملی را مطرح می کند زیرا حل آن به ارزیابی مؤثر بودن حفاظتی دیواره هادی ارتباط می یابد.



شکل ۱-۲ یک مسئله الکترومغناطیس

† حاصل ضرب طول موج و فرکانس یک منبع ac، سرعت انتشار موج است.

به طور کلی نظریه مدار با سیستم‌های دارای پارامتر فشرده سروکار دارد - مدارهایی که دارای عناصری مشخص شده با پارامترهای فشرده هستند، مثل مقاومت‌ها، اندوکتانس‌ها، و ظرفیت‌ها، ولتاژها و جریان‌ها متغیرهای اصلی سیستم هستند. در مدارهای dc، متغیرهای سیستم ثابت و معادلات حاکم معادلات جبری هستند. متغیرهای سیستم در مدارهای ac، وابسته به زمان می‌باشند؛ این متغیرها کمیتهای عددی هستند که به مختصات مکانی وابسته نبوده و معادلات حاکم بر آنها معادلات دیفرانسیل معمولی هستند. از طرف دیگر، اکثر متغیرهای الکترومغناطیسی، تابعی از زمان و مختصات مکانی می‌باشند. بسیاری به صورت بردار با اندازه و جهت بوده، نمایش و عملیات با آنها به اطلاعاتی از جبر و حساب برداری نیاز دارد. حتی در حالت ایستا، معادلات حاکم عموماً معادلات دیفرانسیل پاره‌ای هستند. اصول جبر و حساب برداری، در عملیات با کمیتهای بردارهای وابسته به زمان و مکان برآیم. اصول جبر و حساب برداری، در فصل ۲ بررسی خواهد شد. در رابطه با انواع معینی از مسائل الکترومغناطیس، روشهایی برای حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای مورد نیاز هستند. این روشها در فصل ۴ مورد بحث قرار خواهند گرفت. اهمیت فراگیری سهیلانی در استفاده از این ابزارهای ریاضی در مطالعه الکترومغناطیس را نمی‌توان بیش از این مورد تأکید قرار داد.

دانشجویانی که نظریه مدار را بخوبی آموخته باشند، ممکن است در ابتدا این تصور را داشته باشند که نظریه الکترومغناطیس یک تجرید است. در حقیقت تجرید نظریه الکترومغناطیس از نظریه مدار، بیشتر نیست، بدان معنی که اعتبار هر دو را می‌توان با نتایج اندازه‌گیری شده تجربی تأیید نمود. در الکترومغناطیس نیاز داریم کمیتهای بیشتری را تعریف کرده و عملیات ریاضی بیشتری را بکار ببریم تا بتوانیم یک نظریه منطقی و کامل بوجود بیاوریم که بتواند پدیده‌های بمراتب متنوع‌تری را توضیح دهد. ادعای الکترومغناطیس میدان و موج در مجرد بودن مواد موضوعی آنها نیست، بلکه در فرآیند مهارت یافتن در مدل‌های الکترومغناطیس و قواعد متناظر آنهاست. تعهد به کسب این مهارت به ما کمک خواهد کرد که این ادعا را برآورده ساخته و رضایت غیرقابل سنجشی را کسب نماییم.

۲-۱ مدل الکترومغناطیس

در روش برای بررسی موضوعات علمی وجود دارد: روش استقرانی و روش قیاسی. با استفاده از روش استقرانی، پیشرفت تاریخی موضوع دنبال می‌شود، یعنی شروع از مشاهده چند آزمایش ساده و استنباط قوانین و قضایا از روی آنها. این روش یک فرآیند استنتاج از پدیده‌های خاص به اصول کلی است. از سوی دیگر، روش قیاسی، روابط اساسی چندی را در یک مدل ایده‌آل، مسلم فرض

می‌کند. این روابط فرض شده، اصول موضوعی را تشکیل می‌دهند و قوانین و قضایای خاص از روی آنها نتیجه می‌شوند. اعتبار مدل و اصول، توسط قابلیت آنها در پیش‌بینی نتایج قابل واریسی توسط ملاحظات تجربی، تأیید می‌گردد. در این کتاب، ترجیح می‌دهیم روش قیاسی یا اصل موضوعی را بکار ببریم زیرا دارای ظرافت بیشتری است و باعث پیشبرد موضوع الکترومغناطیس به شکل منظم‌تری می‌شود.

مدل ایده‌آلی که ما برای مطالعه یک موضوع علمی می‌پذیریم، باید به وضعیت‌های دنیای واقعی مربوط باشد و بتواند پدیده‌های فیزیکی را توضیح دهد؛ در غیر این صورت مشغول تمرینات فکری بدون هدفی خواهیم شد. برای مثال، یک مدل نظری می‌تواند پی‌ریزی شود و روابط ریاضی بسیاری هم از آن بدست آید؛ اما اگر این روابط با نتایج تجربی موافق نباشند، مدل هیچ دردی را دوا نخواهد کرد. ریاضیات آن ممکن است صحیح باشد اما فرضیات زیربنایی مدل می‌تواند غلط بوده و یا تقریبات نتیجه شده قابل توجیه نباشند.

در بنانهادن نظریه‌ای بر روی یک مدل ایده‌آل سه گام اساسی مطرح است: نخست، کمیتهای بنیادی مربوط به موضوع مطالعه تعریف می‌شوند. دوم، قواعد عملیاتی (ریاضیات) این کمیتهای مشخص می‌گردند. سوم، روابط اساسی چندی فرض می‌شوند. این فرضیات یا قوانین همواره بر اساس ملاحظات تجربی متعددی قرار دارند که تحت شرایط کنترل شده‌ای بدست آمده و توسط مغزهای برجسته‌ای ترکیب گشته‌اند. یک مثال آشنا، نظریه مدارهاست که بر اساس مدل مداری منابع ایده‌آل و مقاومتها، سلفها و خازنهای خالص بنا شده است. در این حالت، کمیتهای اساسی، ولتاژها (V)، جریان‌ها (I)، مقاومت‌ها (R)، سلف‌ها (L) و خازن‌ها (C) هستند. قواعد عملیاتی، همان قواعد جبر، معادلات دیفرانسیل معمولی و تبدیل لاپلاس و اصول موضوعی اساسی قوانین ولتاژ و جریان کیرشف می‌باشند. روابط و فرمول‌های بسیاری از همین مدل نسبتاً ساده اساسی استخراج می‌شود و پاسخ‌های مدارهای بسیار پیچیده تعیین می‌گردد. اعتبار و ارزش این مدل در موارد فراوانی به نمایش درآمده است.

به صورتی مشابه، نظریه الکترومغناطیس نیز بر اساس مدل الکترومغناطیسی انتخاب شده مناسبی قابل بنا نهادن است. در این بخش ما نخستین گام را در تعریف کمیتهای اساسی الکترومغناطیس، بر خواهیم داشت. گام دوم، قواعد عملیاتی، مشتمل بر جبر و حساب برداری و معادلات دیفرانسیل پاره‌ای است. اصول جبر و حساب برداری در فصل ۲ (آنالیز برداری) مورد بررسی قرار خواهد گرفت و روشهای حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای هنگامی که این معادلات بعداً در کتاب مطرح شدند، معرفی خواهند شد. گام سوم، یعنی اصول موضوعی اساسی به صورت سه گام فرعی در فصول ۳، ۶ و ۷ هنگامی که به ترتیب با میدانهای الکتریکی ساکن، میدانهای مغناطیسی دائم و میدانهای الکترومغناطیس سروکار پیدا می‌کنیم، مطرح خواهند شد.

کمیات مدل الکترومغناطیس ما به طور کلی به دو گروه تقسیم می‌شوند. کمیات منبع و میدان. منبع یک میدان الکترومغناطیس همواره بارهای الکتریکی در حال سکون یا متحرک است. هرچند، یک میدان الکترومغناطیس می‌تواند باعث توزیع دوباره بارها شود که آن نیز به نوبه خود باعث تغییر میدان می‌گردد؛ بنابراین تفکیک بین علت و معلول همیشه چندان واضح نیست. نماد q (و گاهی Q) را برای نمایش بار الکتریکی بکار می‌بریم. بار الکتریکی از خواص بنیادی ماده است و فقط به صورت مضارب صحیح مثبت یا منفی از بار یک الکترون e^- وجود دارد.

$$e = 1.60 \times 10^{-19} \quad (C) \quad (1-1)$$

که در آن C مخفف واحد بار، کولمب^۱ است و پس از آنکه فیزیکدان فرانسوی چارلز ادو کولمب^۱ در سال ۱۷۸۵ قانون کولمب را به نظم درآورد، انتخاب شده است. (قانون کولمب در فصل ۳ بررسی می‌گردد.) یک کولمب واحد بسیار بزرگی برای بار الکتریکی است؛ $1/(1.60 \times 10^{-19})$ یا ۲۵ (۶) میلیون تریلیون الکترون برای ایجاد $-1 C$ مورد نیاز می‌باشد. در واقع دوبار $1 C$ بافاصله $1 m$ نیروی تقریباً برابر با 1 میلیون تن بر یکدیگر وارد می‌کنند. ثابت‌های فیزیکی دیگر در مورد الکترون در ضمیمه ب-۲ درج شده‌اند.

اصل بقای بار الکتریکی، مانند اصل بقای اندازه حرکت، فرضیه یا قانون بنیادی فیزیک است. این قانون بیان می‌دارد که بار الکتریکی حفظ می‌شود، یعنی نه می‌تواند تولید شود و نه نابود گردد. این یک قانون طبیعت است و از اصول یا روابط دیگر نمی‌تواند استخراج گردد. صحت آن هرگز در عمل مورد سؤال یا تردید قرار نگرفته است.

بارهای الکتریکی می‌توانند از یک محل به محل دیگر حرکت کرده، و تحت تأثیر میدان الکترومغناطیسی دوباره توزیع گردند؛ اما جمع جبری بارهای مثبت و منفی در یک سیستم بسته (مجزا شده) بدون تغییر می‌ماند. اصل بقای بار الکتریکی باید در تمام زمانها و تحت هر شرایطی برقرار باشد. نمایش ریاضی آن توسط معادله پیوستگی^۲ است که در بخش ۵-۴ مورد بحث قرار خواهیم داد. هر فرمول‌بندی یا حل مسائل الکترومغناطیس که مغایر با اصل بقای بار الکتریکی

^۱ در سال ۱۷۶۱، موری گل-مان^۲، کوارک‌ها^۳ را به عنوان واحدهای اصلی ساختمان مواد فرض نمود. پیش‌بینی می‌شد که کوارک‌ها کسری از بار الکتریکی الکترون،^۴ را حمل نمایند. تا امروز هنوز وجود آنها به طور تجربی اثبات نشده است.

^۲ سیستم اجزاء در بخش ۲-۱ مورد بحث قرار خواهد گرفت.

۱- Equation of continuity

۱- Charles A. de Coulomb

۲- Quarks

۳- Murray Gell-Mann

باشد، باید نادرست باشد. به یاد می‌آوریم که قانون جریان کیرشف در نظریه مدار با این بیان که، جمع تمام جریانهای خروجی از یک گره برابر جمع تمام جریانهای ورودی به آن گره است، یک نتیجه از خاصیت بقای بار الکتریکی است. (در قانون جریان این فرض به طور ضمنی وجود دارد که انباشتگی بار در اتصال صورت نمی‌گیرد.)

اگرچه در اندازه‌های میکروسکوپی، بار الکتریکی به صورت گسسته یا در نقطه‌ای وجود دارد و یا ندارد، تا وقتی که تأثیرات الکترومغناطیسی توده‌های بزرگی از بار را در نظر می‌گیریم، این تغییرات ناگهانی در مقیاس اتمی اهمیتی ندارد. در پی ریزی یک نظریه ماکروسکوپی یا تئوری الکترومغناطیس با مقیاس بزرگ، در می‌یابیم که استفاده از توابع چگالی متوسط هموار شده نتایج بسیار خوبی به بار می‌آورد. (همین روش در مکانیک هم بکار می‌رود. علی‌رغم این حقیقت که جرم، تنها در ذرات بنیادی با خواص گسسته در مقیاس اتمی همراه است، تابع چگالی جرم هموار شده تعریف می‌شود.) چگالی بار حجمی^۱ ρ را به عنوان یک کمیت منبع به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\rho = \frac{\Delta q}{\Delta v} \quad (C/m^3) \quad (2-1)$$

که در آن Δq ، مقدار بار در حجم بسیار کوچک Δv است. Δv چقدر کوچک باید باشد؟ آنقدر کوچک که بتواند تغییرات دقیق ρ را نمایش دهد، اما آنقدر بزرگ که تعداد بسیار زیادی از بارهای گسسته را دربر داشته باشد. برای مثال، جزء کوچک مکعبی شکل به ضلع 1 میکرون ($10^{-6} m$) یا $1 \mu m$) دارای حجم $10^{-18} m^3$ است و هنوز دارای 10^{11} (۱۰۰ بیلیون) اتم می‌باشد. انتظار می‌رود که یک تابع هموار شده ρ از مختصات فضائی که با چنین Δv کوچکی تعریف شده باشد، نتایج ماکروسکوپی دقیقی در مورد تقریباً تمامی منظوره‌های عملی بدست دهد.

در بعضی از موارد فیزیکی ممکن است، یک مقدار بار Δq با جزء کوچک سطحی Δs یا جزء کوچک خطی Δl مشخص شود. در چنین مواردی مناسب‌تر است که چگالی بار سطحی^۲ ρ_s یا چگالی بار خطی^۳ ρ_l را تعریف کنیم:

$$\rho_s = \frac{\Delta q}{\Delta s} \quad (C/m^2) \quad (3-1)$$

$$\rho_l = \frac{\Delta q}{\Delta l} \quad (C/m) \quad (4-1)$$

بجز در موارد خاص، چگالی‌های بار از نقطه‌ای به نقطه دیگر تغییر می‌کند؛ از این رو ρ ، ρ_s و ρ_l

۱- Volume charge density

۲- Surface charge density

۳- Line charge density

جدول ۱-۱
کمیات اصلی میدان الکترومغناطیس

واحد	نماد	کمیت میدان	نماد و واحد کمیات میدان
V/m	E	شدت میدان الکتریکی	الکتریکی
C/m ²	D	چگالی شار الکتریکی (جابجایی الکتریکی)	
T	B	چگالی شار مغناطیسی	مغناطیسی
A/m	H	شدت میدان مغناطیسی	

در فصل ۶ مورد بحث قرار خواهد گرفت.

چهار کمیت اصلی میدان الکترومغناطیس، به همراه واحدهای آنها در جدول ۱-۱ درج شده است. در جدول ۱-۱، V/m، ولت بر متر و T، همان تسلا یا ولت-ثانیه بر مترمربع است. در صورت عدم تغییرات زمانی (مانند موارد ساکن، دائم یا مانا)، کمیات میدان الکتریکی E و D، کمیات میدان مغناطیسی B و H، جفت بردارهای جداگانه‌ای را تشکیل می‌دهند؛ اما در موارد متغیر با زمان، کمیات میدان الکتریکی و مغناطیسی با هم تزیوج می‌شوند؛ یعنی E و D متغیر با زمان، باعث بوجود آمدن B و H خواهند شد و برعکس. هر چهار کمیت، توابع نقطه‌ای هستند؛ در هر نقطه از فضا تعریف شده و عموماً توابعی از مختصات فضائی می‌باشند. خواص مواد (یا محیط)، رابطه بین E و D و بین B و H را تعیین می‌کند. این روابط را روابط اساسی یک محیط گویند و بعداً مورد مطالعه قرار خواهند گرفت.

منظور اصلی از مطالعه الکترومغناطیس، درک تأثیر متقابل بین بارها و جریانهای قرار گرفته در فاصله‌ای از آنها، براساس مدل الکترومغناطیسی است. میدانها و امواج (میدانهای وابسته به زمان و مکان) کمیات اصلی ادراکی این مدل هستند و فرضیه‌های اساسی، E، B، D، H و کمیات منبع را به هم ارتباط خواهند داد و روابط حاصل از آنها به توضیح و پیش‌بینی پدیده‌های الکترومغناطیس منجر خواهد شد.

۳-۱ واحدهای SI و ثوابت جهانی

اندازه‌گیری هر کمیت فیزیکی باید با یک عدد و به دنبال آن، یک واحد بیان گردد. از این رو می‌گوییم طول سه متر، جرم دو کیلوگرم و فاصله زمانی ده ثانیه. یک سیستم واحد برای مفید بودن، باید

عموماً توابع نقطه‌ای از مختصات فضائی هستند. جریان، نرخ تغییر بار نسبت به زمان است؛ یعنی،

$$I = \frac{dq}{dt} \quad (\text{C/s یا A})$$

(۵-۱)

که در آن خود I می‌تواند وابسته به زمان باشد. واحد جریان کولمب بر ثانیه (C/s) یا همان آمپر (A) است. جریان باید از سطح معینی عبور کند (مثلاً از یک سیم هادی با سطح مقطع معین)؛ از این رو تابعی نقطه‌ای بشمار نمی‌آید. در الکترومغناطیس، یک تابع نقطه‌ای برداری چگالی جریان حجمی^۱ (یا فقط چگالی جریان) J را تعریف می‌کنیم که مقدار جریان گذرنده از سطحی واحد و عمود بر مسیر عبور جریان را اندازه می‌گیرد. حرف بزرگ J یک بردار است که اندازه آن جریان در واحد سطح (A/m²) و جهت آن جهت جریان گذرنده است. در فصل ۵، رابطه بین I و J را مورد بررسی دقیق قرار خواهیم داد. در هادی‌های بسیار خوب، جریانهای متناوب فرکانس بالا، به جای عبور از داخل هادی، محدود به عبور از لایه سطحی آن است. در این موارد، لازم است J، چگالی جریان سطحی^۲ را تعریف کنیم که جریان در واحد پهنا در سطح هادی عمود بر جهت عبور جریان بوده، دارای واحد آمپر بر متر (A/m) می‌باشد.

چهار کمیت اصلی میدان برداری در الکترومغناطیس وجود دارد: شدت میدان الکتریکی^۳ E، چگالی شار الکتریکی^۴ (یا جابجایی الکتریکی^۵) D، چگالی شار مغناطیسی^۶ B، و شدت میدان مغناطیسی^۷ H. تعریف و اهمیت فیزیکی این کمیات پس از معرفی آتی آنها در این کتاب، به طور کامل توضیح داده خواهد شد. فعلاً، فقط می‌خواهیم نکات زیر را بیان کنیم: شدت میدان الکتریکی E تنها برداری است که در بحث الکتریسته ساکن (تأثیرات بارهای الکتریکی ساکن) در فضای آزاد مورد نیاز است و به صورت نیروی الکتریکی وارد بر بار آزمون واحد تعریف می‌شود. بردار جابجایی الکتریکی D، به طوری که در فصل ۳ خواهیم دید، در مطالعه میدان الکتریکی درون محیط‌های مادی مفید خواهد بود. به طریق مشابه، چگالی شار مغناطیسی B، تنها بردار مورد نیاز در بحث مغناطیس ساکن (تأثیرات جریانهای الکتریکی دائم) در فضای آزاد است و به نیروی مغناطیسی وارد بر بار متحرک با سرعت معین مربوط می‌شود. بردار شدت میدان مغناطیسی H، در مطالعه میدان مغناطیسی درون محیط‌های مادی مفید است. تعریف و اهمیت B و H

- ۱- Volume current density
- ۲- Surface current density
- ۳- Electric field intensity
- ۴- Electric flux density
- ۵- Electric displacement
- ۶- Magnetic flux density
- ۷- Magnetic field intensity

جدول ۲-۱ واحدهای اصلی SI

مخفف	واحد	کیمت
m	متر (meter)	طول
kg	کیلوگرم (kilogram)	جرم
s	ثانیه (second)	زمان
A	آمپر (ampere)	جریان

بر اساس چند واحد اصلی با اندازه مناسب (عملی) قرار گیرد. در مکانیک، تمام کمیات بر حسب سه واحد اصلی (برای طول، جرم و زمان) قابل بیان هستند. در مسائل الکترومغناطیس، واحد اصلی چهارمی (برای جریان) مورد نیاز است. (سیستم بین المللی آحاد) SI یک سیستم MKSA است که از چهار واحد اصلی درج شده در جدول ۱-۲ تشکیل می شود. بقیه آحاد مورد استفاده در الکترومغناطیس، از جمله آنهایی که در جدول ۱-۱ ظاهر شده اند، واحدهای فرعی و قابل بیان بر حسب متر، کیلوگرم، ثانیه و آمپر هستند. برای مثال، واحد بار کولمب (C) برابر آمپر-ثانیه (A.s)؛ واحد شدت میدان الکتریکی (V/m) برابر $\text{kg} \cdot \text{m} / \text{A} \cdot \text{s}^2$ و واحد چگالی شار مغناطیسی، تسلا (T) برابر $\text{kg} / \text{A} \cdot \text{s}^2$ است. جدول های کامل تری از آحاد با کمیات متنوع، در ضمیمه الف آمده است.

تعاریف رسمی SI که توسط کمیته بین المللی وزنها و سنجش ها پذیرفته شده است، به شرح زیر است^۱:

متر، در گذشته به صورت فاصله دو نشانه بر روی میله پلاتینیوم-ایریدیوم (که در ابتدا به صورت یک ده میلیونیم فاصله میان قطب شمال و خط استوای گذرنده از پاریس، فرانسه محاسبه گردید) و اینک با مراجعه به ثانیه (در زیر تعریف شده) و سرعت نور که در خلا^۲ برابر ۲۹۹,۷۹۲,۴۵۸ متر در ثانیه است تعریف می شود.

کیلوگرم، جرم یک میله استاندارد ساخته شده از آلیاژ پلاتینیوم-ایریدیوم که در داخل مجموعه ای از حفاظهای تودرتو که آن را از آلودگی و استفاده نامناسب حفظ می کند و در اداره بین المللی وزنها و سنجش ها در سور^۳، خارج پاریس قرار دارد، نگهداری می شود.

^۱ P. Wallich، «ولت و آمپر چیزهایی نیستند که قبلاً بودند»، IEEE Spectrum، جلد ۲۴، صفحات ۴۹-۴۴، مارس ۱۹۸۷.

ثانیه . ۱,۱۹۲,۶۳۱,۷۷۰ دوره تناوب تشعشعات الکترومغناطیسی صادر شده توسط یک انتقال خاص یک اتم سزیم^۱.
آمپر، جریان ثابتی که اگر در دو هادی موازی مستقیم به طول بینهایت و سطح مقطع دایره ای ناچیز که به فاصله یک متر از یکدیگر در خلا^۲ نگه داشته شده اند جاری شود، میان این دو هادی نیروی برابر 2×10^{-7} نیوتن بر یک متر طول آن بوجود خواهد آورد. (یک نیوتن نیروی است که به جرم یک کیلوگرم شتابی برابر یک متر بر مجذور ثانیه می دهد)
در مدل الکترومغناطیسی ما، علاوه بر کمیات میدان درج شده در جدول ۱-۱، سه ثابت جهانی^۳ وجود دارد که به ویژگیهای فضای آزاد (خلا^۴) مربوط هستند. آنها عبارتند از: سرعت امواج الکترومغناطیس (از جمله نور) در فضای آزاد، c ؛ گذردهی فضای آزاد، ϵ_0 ؛ و نفوذپذیری^۵ (تراوانی) فضای آزاد، μ_0 . آزمایشهای بسیاری برای اندازه گیری دقیق سرعت نور با اعشار بالا انجام گرفته است. برای منظور ما کافی است به خاطر داشته باشیم که

$$(۱-۶) \quad c \approx 3 \times 10^8 \text{ (m/s)} \quad \text{(در فضای آزاد)}$$

دو ثابت دیگر، ϵ_0 و μ_0 ، به ترتیب به پدیده های الکتریکی و مغناطیسی مربوط هستند. ϵ_0 ، ثابت تناسب بین چگالی شار الکتریکی D و شدت میدان الکتریکی E در فضای آزاد است، به طوری که

$$(۱-۷) \quad D = \epsilon_0 E \quad \text{(در فضای آزاد)}$$

μ_0 ، ثابت تناسب بین چگالی شار مغناطیسی B و شدت میدان مغناطیسی H در فضای آزاد است، به طوری که

$$(۱-۸) \quad H = \frac{1}{\mu_0} B \quad \text{(در فضای آزاد)}$$

مقادیر ϵ_0 و μ_0 با انتخاب سیستم واحد تعیین می گردند، و مستقل از هم نیستند. در سیستم SI (سیستم MKSA گویا شده^۱) که در کارهای الکترومغناطیس، تقریباً به طور جهانی پذیرفته شده است، نفوذپذیری فضای آزاد به مقدار صفحه بعد اختیار می شود

^۱ این سیستم آحاد را گویا شده گویند زیرا ضریب 4π در معادلات ماکسول (فرضیه های بنیادی الکترومغناطیس) ظاهر نمی شود. اگرچه این ضریب در بسیاری از روابط استخراجی ظاهر خواهد شد. در سیستم MKSA گویا شده، μ_0 برابر $4\pi \times 10^{-7}$ (H/m) است، و ضریب 4π در معادلات ماکسول ظاهر خواهد شد.

۱- Cesium
۲- Universal constant
۳- Permittivity
۴- Permeability

جدول ۳-۱ ثابت‌های جهانی در واحدهای SI

واحد	مقدار	نماد	ثابت‌های جهانی
m/s	3×10^8	c	سرعت نور در فضای آزاد
H/m	$4\pi \times 10^{-7}$	μ_0	نفوذپذیری فضای آزاد
F/m	$\frac{1}{36\pi} \times 10^{-9}$	ϵ_0	گذردهی فضای آزاد

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ (H/m)}$$

(۹-۱)

که در آن H/m، نمایش هانری بر متر است. مقدار ضریب گذردهی فضای آزاد با استفاده از مقادیر مشخص شده c و μ_0 در معادلات (۶-۱) و (۹-۱) و رابطه:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \text{ (m/s)}$$

(۱۰-۱)

یا

$$\epsilon_0 = \frac{1}{c^2 \mu_0} \cong \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} \cong 8,854 \times 10^{-12} \text{ (F/m)}$$

(۱۱-۱)

بدست می‌آید که در آن F/m مخفف فاراد بر متر است. سه ثابت جهانی و مقادیر آنها در جدول ۳-۱ خلاصه شده‌اند.

حال که کمیات اصلی و ثابت‌های جهانی مدل الکترومغناطیس را تعریف کرده‌ایم، می‌توانیم موضوعات متنوع الکترومغناطیس را بنا گذاریم. اما، قبل از انجام این کار، باید با ابزارهای ریاضی مناسب مجهز شویم. در فصل بعد قواعد اساسی عملیات جبر و حساب برداری را مورد بررسی قرار خواهیم داد.

نظریه مدار، به‌طور مناسب قابل توضیح نباشند.

- ۳-۱.۵ سه گام اساسی در بنا نهادن یک مدل ایده‌آل در مطالعه موضوعات علمی کدامند؟
- ۴-۱.۵ چهار واحد اصلی SI در الکترومغناطیس کدامند؟
- ۵-۱.۵ چهار کمیت اصلی میدان در مدل الکترومغناطیس کدامند؟ واحد آنها چیست؟
- ۶-۱.۵ سه ثابت جهانی مدل الکترومغناطیس کدامند، و رابطه آنها چیست؟
- ۷-۱.۵ کمیات منبع در مدل الکترومغناطیس کدامند؟

آنالیز بررداری

۱-۲ مقدمه

به طوری که در فصل ۱ متذکر شدیم، برخی از کمیات در الکترومغناطیس (مانند بار، جریان، و انرژی) عددی و برخی دیگر، (مانند شدت میدان الکتریکی و مغناطیسی) برداری هستند. کمیات عددی و برداری هر دو می‌توانند تابعی از زمان و مکان باشند. در یک زمان و مکان مشخص، یک کمیت عددی به طور کامل با اندازه‌اش توصیف می‌گردد (مثبت یا منفی همراه واحد خود). از این رو، برای مثال می‌توانیم بار $-1\mu\text{C}$ را در مکان معینی در زمان $t = 0$ مشخص کنیم. از سوی دیگر، مشخصه یک بردار^۲ در مکان و زمان معین به اندازه و جهت، هر دو نیاز دارد. چگونه جهت یک بردار را مشخص کنیم؟ در فضای سه بعدی، سه عدد مورد نیاز است و این اعداد به انتخاب دستگاه مختصات وابسته است. تبدیل یک بردار مفروض از یک دستگاه مختصات به دستگاه دیگر این اعداد را تغییر می‌دهد. اما قوانین فیزیکی و قضایای ارتباط دهنده کمیات متفاوت عددی یا برداری مسلماً باید بدون توجه به دستگاه مختصات معتبر باشند. بنابراین بیانهای کلی قوانین الکترومغناطیس، به مشخص کردن دستگاه مختصات نیاز ندارد. دستگاه مختصات خاص تنها وقتی انتخاب می‌شود که می‌خواهیم مسئله‌ای با مشخصات هندسی معین را تحلیل نماییم. برای مثال، اگر بخواهیم میدان مغناطیسی در مرکز یک حلقه سیم حامل جریان را تعیین کنیم؛ در

۱- Scalar

۲- Vector

صورتی که حلقه مستطیلی باشد، مختصات قائم^۱ مناسبتر است. در حالی که اگر حلقه دایره‌ای شکل باشد، مختصات قطبی^۲ (دوبعدی) کارسازتر خواهد بود. روابط اساسی الکترومغناطیس، حاکم بر حل یک چنین مسئله‌ای برای هر دو شکل هندسی یکسان می‌باشد.

سه عنوان اصلی از آنالیز برداری در این فصل مورد بررسی قرار خواهد گرفت:

۱. جبر برداری - جمع، تفریق و ضرب بردارها.
 ۲. دستگاه مختصات متعامد^۳ - مختصات کارتزین^۴، استوانه‌ای^۵ و کروی^۶.
 ۳. حساب برداری - مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری بردارها، انتگرال‌های خطی، سطحی و حجمی، عملگر^۷ "del"، عملیات با گرادیان^۸، دیورژانس^۹ و کرل^{۱۰}.
- در سرتاسر باقیمانده این کتاب، ما بردارها را در معرض تجزیه، ترکیب، مشتق‌گیری، انتگرال‌گیری و سایر عملیات قرار خواهیم داد. ضروری است که دانشجو آشنائی کاملی با جبر و حساب برداری کسب نماید. در فضای سه‌بعدی، یک رابطه برداری، در واقع سه رابطه عددی است. استفاده از روشهای آنالیز در الکترومغناطیس به فرمول‌بندی‌های دقیق و ظریفی منجر می‌شود. ضعف در آنالیز برداری به هنگام مطالعه الکترومغناطیس، مشابه ضعف در جبر و حساب به هنگام مطالعه فیزیک است. روشن است که این ضعف‌ها نمی‌توانند به نتایج مفیدی منجر شوند.

در حل مسائل عملی، ما همیشه با نواحی یا اشیاء دارای شکلی مفروض سروکار داریم و لازم است فرمول‌های عمومی را در دستگاه مختصات مناسب هندسه مسئله مفروض بیان نماییم. برای مثال، واضح است که مختصات آشنای قائم (x, y, z) نمی‌تواند در مسائلی که شامل یک استوانه مدور یا یک کره است براهتی بکار رود، زیرا مرزهای استوانه مدور و کره نمی‌توانند با مقادیر ثابت x, y, z بیان شوند. در این فصل سه دستگاه مهم مختصات متعامد (عمودبرهم) و نمایش و عملیات برداری در این دستگاهها را بررسی خواهیم نمود. آشنائی با این دستگاههای مختصات در حل مسائل الکترومغناطیس، ضروری است.

حساب برداری با مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری بردارها ارتباط دارد. با تعریف عملگرهای دیفرانسیلی معین، می‌توانیم قوانین اساسی الکترومغناطیس را به صورتی دقیق چنان بیان کنیم که با انتخاب دستگاه مختصات تغییرناپذیر باشند. در این فصل، تکنیک‌هایی را برای محاسبه انواع

- | | |
|----------------|--------------|
| ۱- Rectangular | ۲- Polar |
| ۳- Orthogonal | ۴- Cartesian |
| ۵- Cylindrical | ۶- Spherical |
| ۷- Operator | ۸- Gradient |
| ۹- Divergence | ۱۰- Curl |

متفاوتی از انتگرال‌های شامل بردار، معرفی و انواع مختلف عملگرهای دیفرانسیلی را تعریف و بررسی خواهیم کرد.

۲-۲ جمع و تفریق برداری

می‌دانیم هر بردار دارای یک اندازه و یک جهت است. هر بردار A می‌تواند به صورت زیر نوشته شود

$$A = a_A A \quad (۱-۲)$$

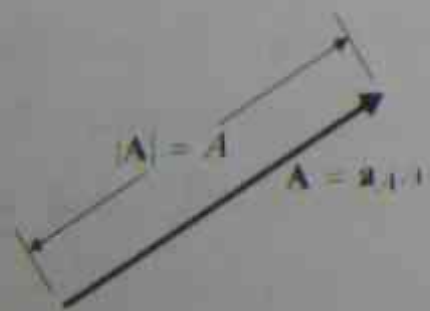
که در آن A ، اندازه (دارای واحد و بعد) A است.

$$A = |A| \quad (۲-۲)$$

و a_A بردار واحد بدون بعد است با اندازه واحد و هم جهت با A . از این رو،

$$a_A = \frac{A}{|A|} = \frac{A}{A} \quad (۳-۲)$$

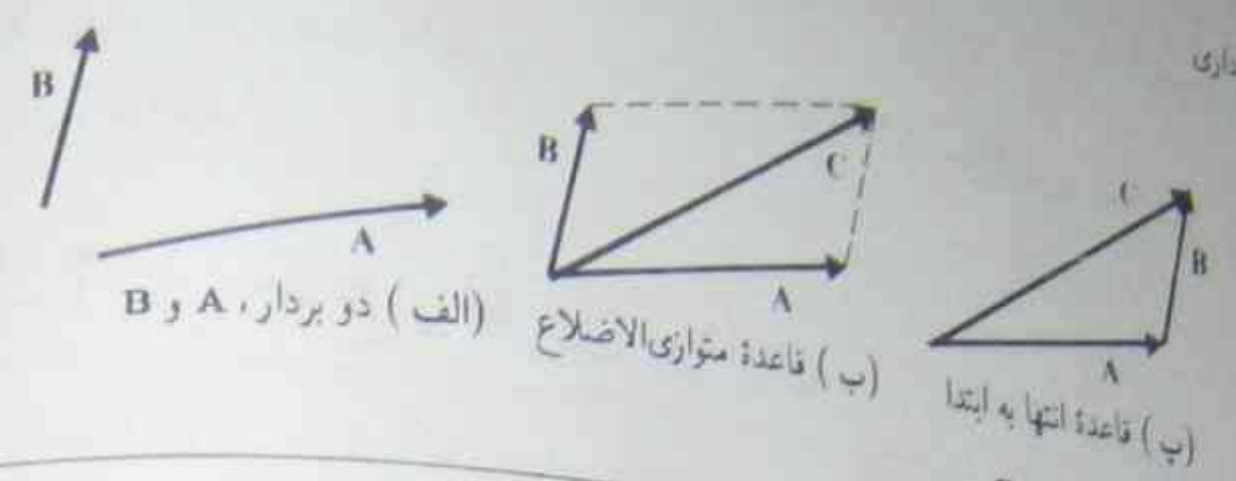
به‌طور تریسیمی، بردار A توسط یک پاره‌خط مستقیم جهت‌دار به طول $|A| = A$ و همسو با a_A مطابق شکل ۱-۲ نمایش داده می‌شود. دو بردار مساویند، اگر هم اندازه و هم جهت باشند، حتی اگر در فضا جایجا شوند. چون نوشتن حروف بزرگ با دست مشکل است، معمول است که یک پیکان یا خط بالای حرف (\bar{A} یا \bar{A}) یا اینکه یک خط موجدار زیر حرف موردنظر (\underline{A}) گذاشته شود، تا اینکه بردار از یک کمیت عددی متمایز گردد. هر وقت و هر جایی که برداری نوشته می‌شود، این علامت تشخیص، پس از انتخاب، هرگز نباید حذف گردد.



شکل ۱-۲ نمایش تریسیمی بردار A

† در برخی کتابها، بردار واحد در جهت A به صورتهای متفاوت \hat{A} ، u_A یا e_A نمایش داده می‌شود. ما ترجیح می‌دهیم که به جای A ، $A = \hat{A} A$ را به صورت معادله (۱-۲) بنویسیم. برداری که از نقطه P_1 به نقطه P_2 می‌رود، در این صورت، به جای $\overrightarrow{P_1 P_2}$ که تا حدودی مشکل است به صورت $(P_1 P_2)$ نوشته خواهد شد. نمادهای u و i به ترتیب برای سرعت و جریان به‌کار می‌روند.

۳-۲ آنالیز برداری



شکل ۳-۲ جمع برداری، $C=A+B$

دو بردار A و B که هم جهت نبوده و در جهت مخالف هم نیز نباشند، مانند شکل ۳-۲ (الف)، یک صفحه را تعیین می‌نمایند. جمع آنها بردار دیگر C در همان صفحه است. $C=A+B$ را به صورت تریسیمی، به دو طریق می‌توان بدست آورد. ۱. با قاعده متوازی الاضلاع: برآیند C، بردار قطر متوازی الاضلاعی بوده که مطابق شکل ۳-۲ (ب) توسط A و B که از یک نقطه رسم شده‌اند، بوجود آمده است. ۲. با قاعده انتها به ابتدا: انتهای A به ابتدای B وصل می‌شود. جمع آنها C، بردار رسم شده از ابتدای A به انتهای B است و بردارهای A، B و C مطابق شکل ۳-۲ (پ) تشکیل یک مثلث می‌دهند.

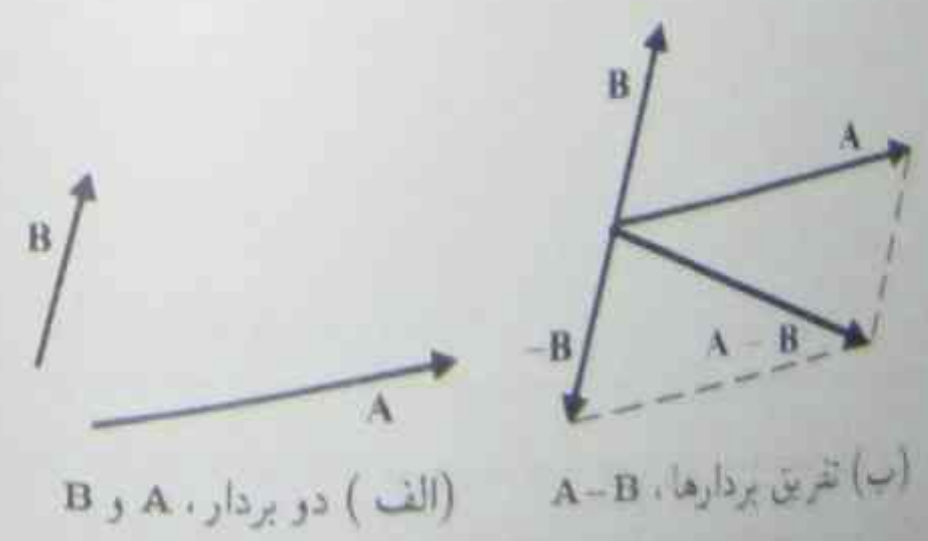
واضح است که جمع برداری از قوانین جابجائی و انجمنی پیروی می‌نماید.

(۴-۲) قانون جابجائی: $A + B = B + A$

(۵-۲) قانون انجمنی: $A + (B + C) = (A + B) + C$

تفریق برداری، برحسب جمع برداری به صورت زیر تعریف می‌شود:

(۶-۲) $A - B = A + (-B)$



شکل ۳-۲ تفریق برداری

۳-۲ ضرب بردارها

که در آن $-B$ منفی بردار B است؛ یعنی $-B$ دارای اندازه مساوی با B، اما جهت مخالف آن می‌باشد. از این رو

(۷-۲) $-B = (-a_B)B$

عملیات نشان داده شده در معادله (۷-۲) را در شکل ۳-۲ ملاحظه می‌کنید.

۳-۲ ضرب بردارها

ضرب بردار A در عدد مثبت k، اندازه A را k برابر می‌کند بدون اینکه جهت آن را تغییر دهد (k می‌تواند بزرگتر یا کوچکتر از ۱ باشد).

(۸-۲) $kA = a_A(kA)$

کافی نیست بگوییم "ضرب یک بردار در دیگری" یا "حاصلضرب دو بردار" زیرا دو نوع متمایز و بسیار متفاوت از ضرب دو بردار وجود دارد. آنها عبارتند از (۱) ضرب عددی یا داخلی، و (۲) ضرب برداری یا خارجی. در زیر بخشهای بعدی به تعریف آنها می‌پردازیم.

۳-۲ ضرب عددی یا داخلی

حاصلضرب عددی یا داخلی دو بردار A و B که به صورت $A \cdot B$ نمایش داده می‌شود، عددی است برابر حاصلضرب اندازه‌های A و B و کسینوس زاویه بین آنها. از این رو،

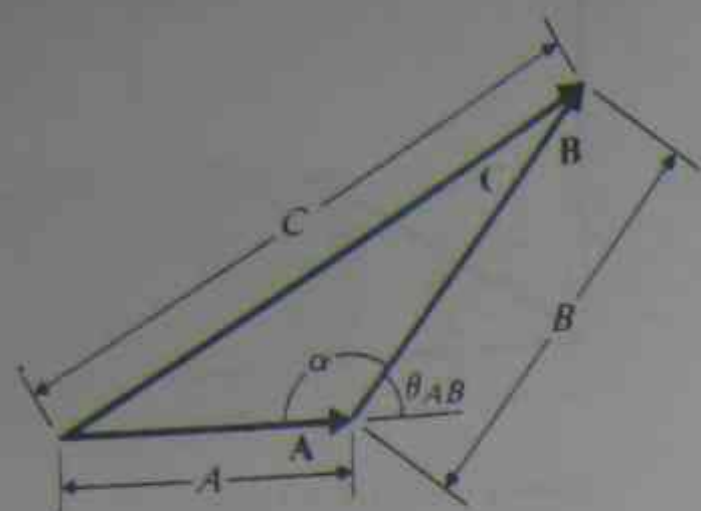
(۹-۲) $A \cdot B \triangleq AB \cos \theta_{AB}$

در معادله (۹-۲) نماد \triangleq به معنی "برابری طبق تعریف" و θ_{AB} زاویه کوچکتر بین A و B و کمتر از π رادیان (180°)، مطابق شکل ۳-۲ می‌باشد. حاصلضرب داخلی دو بردار (۱) کمتر یا مساوی حاصلضرب اندازه‌های آنهاست؛ (۲) می‌تواند کمیتی مثبت یا منفی باشد، بسته به اینکه زاویه بین آنها از $\pi/2$ رادیان (90°) کوچکتر یا بزرگتر باشد؛ (۳) برابر است با حاصلضرب اندازه یک بردار در تصویر بردار دیگر بر روی بردار اول؛ و (۴) مساوی صفر است اگر بردارها عمود برهم باشند. روشن است که

(۱۰-۲) $A \cdot A = A^2$

یا

(۱۱-۲) $A = +\sqrt{A \cdot A}$



شکل ۲-۵ نمایش مثال ۱-۲

دقت کنید که θ_{AB} مطابق تعریف، زاویه کوچکترین بین A و B و مساوی $(180^\circ - \alpha)$ است؛ بنابراین $\cos \theta_{AB} = \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$ در نتیجه،

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos \alpha$$

و قانون کسینوس‌ها مستقیماً بدست می‌آید.

۲-۳-۲ ضرب برداری یا خارجی

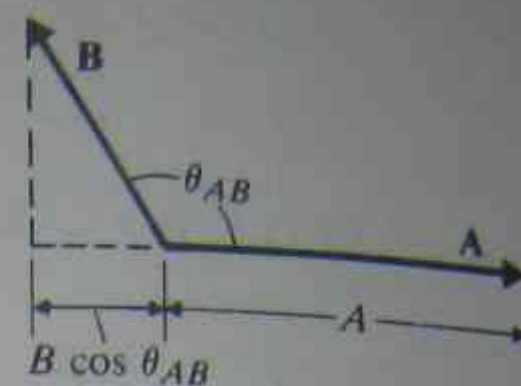
حاصلضرب برداری یا خارجی دو بردار A و B ، که به صورت $A \times B$ نمایش داده می‌شود، برداری است عمود بر صفحه شامل A و B ؛ با اندازه $AB \sin \theta_{AB}$ ، که θ_{AB} زاویه کوچکترین بین A و B است و جهت آن هم جهت با شست دست راست است وقتی که انگشتان دیگر از A به سوی B از طریق زاویه θ_{AB} دوران کنند (قاعده دست راست).

$$A \times B \triangleq a_n |AB \sin \theta_{AB}| \quad (14-2)$$

این حاصلضرب در شکل ۲-۶ توضیح داده شده است. چون $B \sin \theta_{AB}$ برابر ارتفاع متوازی‌الاضلاع ساخته شده توسط بردارهای A و B است، درمی‌یابیم که اندازه $A \times B$ یعنی $|AB \sin \theta_{AB}|$ ، که همواره مثبت است، عددی با مساحت متوازی‌الاضلاع مساوی است. با استفاده از تعریف معادله (۲-۱۴) و پیروی از قاعده دست راست، درمی‌یابیم

$$B \times A = -A \times B \quad (15-2)$$

از این رو، حاصلضرب خارجی جابجایی‌پذیر نیست. می‌توان دید که حاصلضرب برداری از قانون

شکل ۲-۴ نمایش ضرب عددی A و B

معادله (۲-۱۱)، ما را قادر می‌سازد که وقتی بیان برداری در هر دستگاه مختصات داده شده باشد، اندازه آن را بیابیم. ضرب داخلی جابجایی‌پذیر و توزیع‌پذیر است.

$$A \cdot B = B \cdot A$$

قانون جابجایی: (۲-۱۲)

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C \quad \text{قانون توزیع پذیری: (۲-۱۳)}$$

قانون جابجایی از تعریف ضرب عددی در معادله (۲-۱) پیداست و اثبات معادله (۲-۱۳) به عنوان تمرین واگذار می‌شود. قانون انجمنی در ضرب عددی کاربرد ندارد، زیرا بیش از دو بردار را نمی‌توان بدین طریق ضرب نمود و عبارتی شبیه به $A \cdot B \cdot C$ بی‌معنی است.

مثال ۲-۱ قانون کسینوس‌ها را در یک مثلث ثابت کنید.

حل قانون کسینوس‌ها، رابطه‌ای عددی است که طول یک ضلع مثلث را برحسب طول دو ضلع دیگر و زاویه بین آنها بیان می‌کند. با مراجعه به شکل ۲-۵، قانون کسینوس‌ها را به صورت زیر می‌یابیم

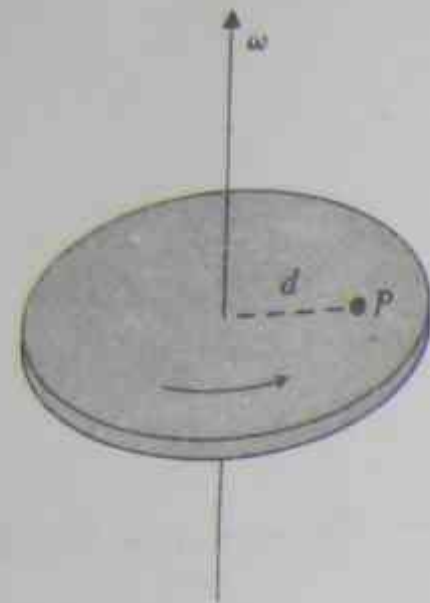
$$C = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB \cos \alpha}$$

این رابطه را با در نظر گرفتن اضلاع به عنوان بردار، ثابت می‌کنیم؛ یعنی،

$$C = A + B$$

با در نظر گرفتن ضرب عددی C در خودش، با استفاده از معادلات (۲-۱۰) و (۲-۱۳)، داریم

$$\begin{aligned} C^2 &= C \cdot C = (A + B) \cdot (A + B) \\ &= A \cdot A + B \cdot B + 2A \cdot B \\ &= A^2 + B^2 + 2AB \cos \theta_{AB} \end{aligned}$$



(الف) قرص چرخنده



(ب) نمایش برداری

شکل ۲-۷ نمایش مثال ۲-۲

۲-۷ (ب) به صورت R نوشته شود. داریم

$$|v| = \omega d = \omega R \sin \theta$$

صرف نظر از اینکه نقطه P کجاست، جهت v همیشه عمود بر صفحه شامل بردارهای ω و R است. از این رو بسادگی می توان نوشت

$$v = \omega \times R$$

که بدرستی هم اندازه و هم جهت سرعت خطی نقطه P را به نمایش می گذارد.

۲-۳-۳ ضرب سه بردار

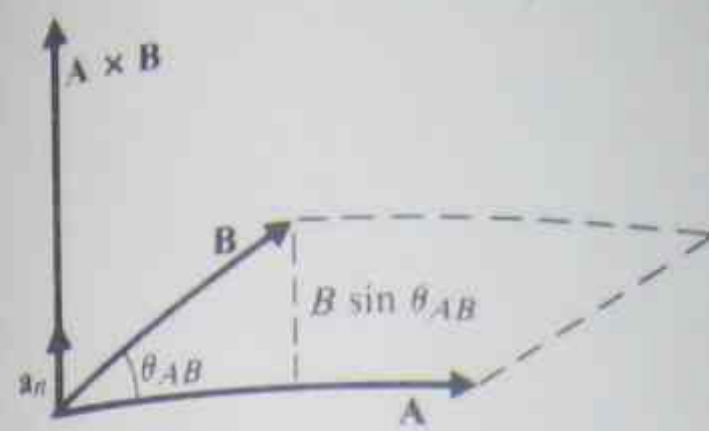
دو نوع ضرب سه برداری وجود دارد، یعنی ضرب سه گانه عددی و ضرب سه گانه برداری. ضرب سه گانه عددی ساده ترین این دو نوع بوده و دارای ویژگی زیر است:

$$A \cdot (B \times C) = B \cdot (C \times A) = C \cdot (A \times B) \quad (2-18)$$

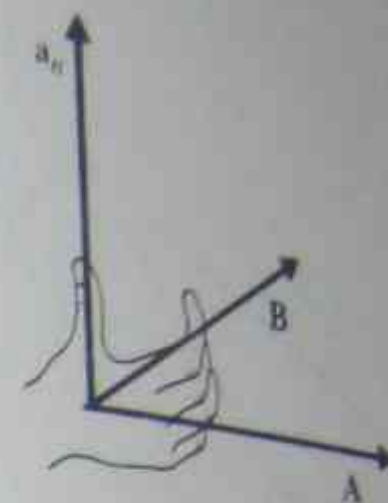
به جایگشت دورانی ترتیب سه بردار A، B و C توجه کنید. البته،

$$\begin{aligned} A \cdot (B \times C) &= -A \cdot (C \times B) \\ &= -B \cdot (A \times C) \end{aligned} \quad (2-19)$$

$$= -C \cdot (B \times A)$$



$$A \times B = a_n |AB \sin \theta_{AB}| \quad (\text{الف})$$



(ب) قاعده دست راست
شکل ۲-۶ حاصل ضرب خارجی A و B و A x B

توزیع پذیری تبعیت می کند،

$$A \times (B + C) = A \times B + A \times C \quad (2-16)$$

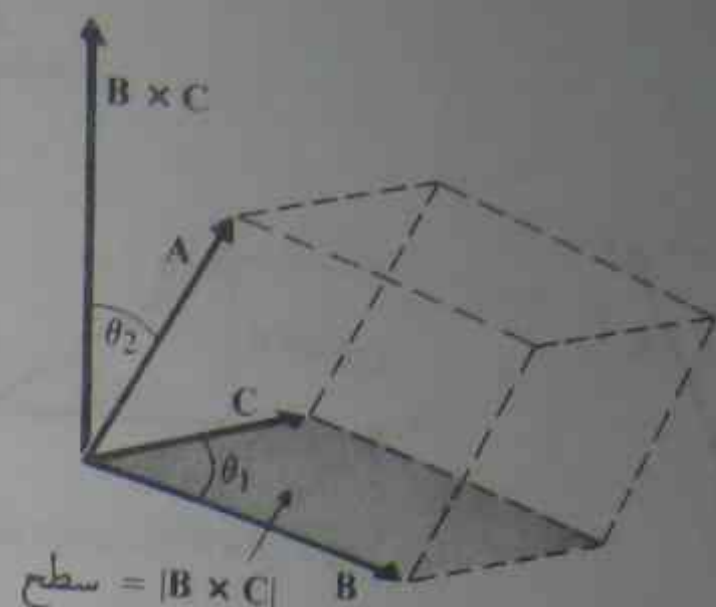
آیا می توانید این مطلب را در حالت کلی بدون تجزیه بردارها به مؤلفه های قائم نشان دهید؟ روشن است که حاصل ضرب برداری انجمن پذیر نیست؛ یعنی،

$$A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C \quad (2-17)$$

بردار نمایش دهنده ضرب سه گانه در سمت چپ رابطه فوق بر A عمود بوده و در صفحه متشکل از B و C قرار دارد، در حالی که همین بردار در سمت راست بر C عمود بوده و در صفحه متشکل از A و B قرار دارد. بنابراین ترتیب انجام عمل ضرب اساسی بوده و در هیچ شرایطی برانترها قابل حذف نیستند.

مثال ۲-۲ حرکت یک قرص صلب چرخنده به دور محور خود را که در شکل ۲-۷ (الف) نشان داده شده است، می توان با بردار سرعت زاویه ای ω توصیف نمود. جهت ω در امتداد محور است و از قاعده دست راست پیروی می کند؛ یعنی اگر انگشتان دست راست در جهت چرخش خم شوند، شست جهت ω را نشان می دهد. عبارت برداری سرعت خطی نقطه ای روی قرص به فاصله d از محور چرخش را بیابید.

حل از مکانیک می دانیم که اندازه سرعت خطی v مربوط به نقطه ای به فاصله d از محور چرخش برابر ωd و جهت آن همیشه مماس بر دایره چرخش است. اما چون نقطه P در حال حرکت است، جهت v با موقعیت P تغییر می کند. نمایش برداری آن را چگونه بنویسیم؟ گوییم O، مبدأ مختصات انتخاب شده باشد. بردار مکانی نقطه P می تواند مطابق شکل



سطح = $|B \times C|$

شکل ۸-۲ نمایش ضرب سه‌گانه عددی $A \cdot (B \times C)$

به طوری که در شکل ۸-۲ دیده می‌شود، هرکدام از سه عبارت معادله (۲-۱۸)، دارای اندازه‌ای برابر حجم متوازی السطوح تشکیل یافته از سه بردار A ، B و C است. متوازی السطوح، قاعده‌ای با مساحت معادل $|B \times C| = |BC \sin \theta_1|$ و ارتفاعی برابر $|A \cos \theta_1|$ دارد؛ از این رو حجم آن برابر است با $|ABC \sin \theta_1 \cos \theta_1|$. ضرب سه‌گانه برداری $A \times (B \times C)$ می‌تواند به عنوان تفاضل دو بردار ساده به صورت زیر بسط داده شود:

$$A \times (B \times C) = B(A \cdot C) - C(A \cdot B) \quad (2-20)$$

معادله (۲-۲۰) به قاعده "back-cab" معروف و اتحاد برداری مفیدی است. (به "BAC-CAB" در سمت راست معادله توجه کنید!)

■ مثال ۳-۲ قاعده back-cab را در ضرب سه‌گانه برداری ثابت کنید.

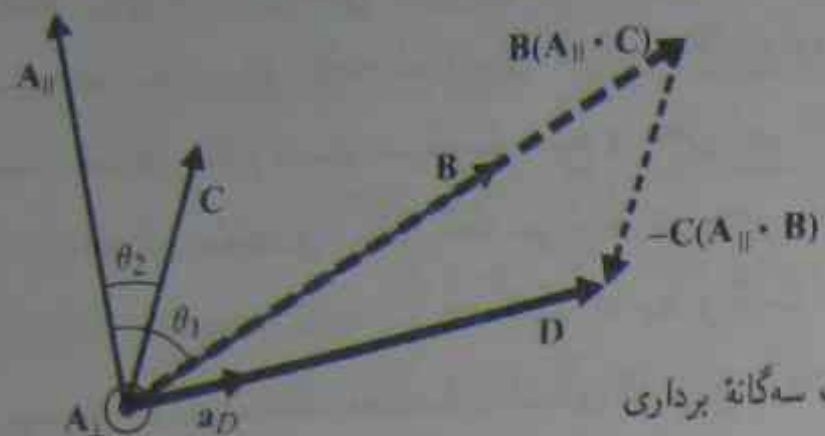
حل برای اثبات معادله (۲-۲۰)، راحت‌تر است A را به دو مؤلفه تجزیه کنیم:

$$A = A_{\parallel} + A_{\perp}$$

که در آن، A_{\parallel} و A_{\perp} به ترتیب، به موازات و عمود بر صفحه شامل B و C هستند. چون بردار نمایش‌دهنده $(B \times C)$ نیز بر صفحه عمود است، ضرب خارجی A_{\perp} و $(B \times C)$ صفر می‌شود. فرض کنید $D = A \times (B \times C)$. چون در اینجا تنها A_{\parallel} مؤثر است، داریم

$$D = A_{\parallel} \times (B \times C)$$

† قاعده back-cab را می‌توان به روش مستقیم با بسط بردارها در دستگاه مختصات کارتزین، ثابت نمود (مثال ۳-۲). تنها افرادی که علاقه مندی به اثبات کلی هستند لازم است این مثال را مطالعه نمایند.



شکل ۹-۲ نمایش قاعده back-cab در ضرب سه‌گانه برداری

با مراجعه به شکل ۹-۲، که صفحه شامل B ، C و A_{\parallel} را نشان می‌دهد، متذکر می‌شویم که D نیز در همین صفحه قرار داشته و بر A_{\parallel} عمود است. اندازه $(B \times C)$ برابر $BC \sin(\theta_1 - \theta_2)$ و اندازه $A_{\parallel} \times (B \times C)$ برابر $A_{\parallel} BC \sin(\theta_1 - \theta_2)$ است. از این رو

$$\begin{aligned} D &= D \cdot a_D = A_{\parallel} BC \sin(\theta_1 - \theta_2) \\ &= (B \sin \theta_1)(A_{\parallel} C \cos \theta_2) - (C \sin \theta_2)(A_{\parallel} B \cos \theta_1) \\ &= [B(A_{\parallel} \cdot C) - C(A_{\parallel} \cdot B)] \cdot a_D \end{aligned}$$

عبارت فوق، به تنهایی تضمین نمی‌کند که کمیت داخل کروشه، D باشد، زیرا این کمیت می‌تواند شامل برداری عمود بر D (بموازات A_{\parallel}) باشد؛ یعنی $D \cdot a_D = E \cdot a_D$ تضمین نمی‌کند که $E = D$. به طور کلی می‌توان نوشت

$$B(A_{\parallel} \cdot C) - C(A_{\parallel} \cdot B) = D + kA_{\parallel}$$

که در آن k کمیتی عددی است. برای تعیین k ، دو طرف معادله بالا را در A_{\parallel} ضرب عددی می‌نماییم و بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned} (A_{\parallel} \cdot B)(A_{\parallel} \cdot C) - (A_{\parallel} \cdot C)(A_{\parallel} \cdot B) &= 0 = A_{\parallel} \cdot D + kA_{\parallel}^2 \\ \text{چون } A_{\parallel} \cdot D &= 0 \text{ پس } k = 0 \text{ و} \end{aligned}$$

$$D = B(A_{\parallel} \cdot C) - C(A_{\parallel} \cdot B)$$

■ که قاعده back-cab را ثابت می‌کند، چون $A_{\parallel} \cdot C = A \cdot C$ و $A_{\parallel} \cdot B = A \cdot B$. تقسیم بر یک بردار تعریف نشده است، و عباراتی چون k/A و B/A بی‌معنی هستند.

۴-۲ دستگاه‌های مختصات متعامد

پیش از این خاطر نشان کرده‌ایم که، اگرچه قوانین الکترومغناطیس نسبت به دستگاه مختصات تغییر

نمی‌کنند. حل مسائل عملی لازم می‌دارد که روابط استخراجی از این قوانین در دستگاه مختصات مناسب هندسه مسائل داده شده بیان شوند. مثلاً، برای تعیین میدان الکتریکی در نقطه معینی از فضا، حداقل لازم است، موقعیت منبع و محل این نقطه را در یک دستگاه مختصات تعریف کنیم. در فضای سه بعدی، یک نقطه می‌تواند در محل تقاطع سه سطح قرار گیرد. فرض کنید این سه خانواده سطح‌ها با ثابت u_1 ، ثابت u_2 و ثابت u_3 تعریف شوند که در آن، u_1 ، u_2 و u_3 به ترتیب متناظر با x ، y و z هستند. (در دستگاه مختصات آشنای کارتزین یا قائم u_1 ، u_2 و u_3 به ترتیب متناظر با x ، y و z هستند.) اگر این سه سطح دوباره بر هم عمود باشند، یک دستگاه مختصات متعامد خواهیم داشت. دستگاه‌های مختصات غیرمتعامد بکار نمی‌روند، زیرا مسائل را پیچیده می‌کنند. بعضی سطح‌های نمایش داده شده توسط ثابت u_i ($i = 1, 2$ یا 3) در یک سیستم مختصات ممکن است صفحه‌ای نباشند؛ و می‌توانند سطح‌های منحنی باشند. فرض کنید a_{u_1} ، a_{u_2} و a_{u_3} بردارهای واحد در سه جهت مختصاتی باشند. آنها را بردارهای پایه می‌نامیم. در یک دستگاه مختصات عمومی راستگرد، متعامد و منحنی الخط بردارهای پایه، چنان مرتب می‌شوند که روابط زیر برقرار باشند:

$$a_{u_1} \times a_{u_2} = a_{u_3} \quad (21-2) \text{ الف}$$

$$a_{u_2} \times a_{u_3} = a_{u_1} \quad (21-2) \text{ ب}$$

$$a_{u_3} \times a_{u_1} = a_{u_2} \quad (21-2) \text{ پ}$$

این سه معادله همگی مستقل نیستند، زیرا مشخصه یکی، به‌طور خودکار دوتای دیگر را ایجاب می‌نماید. البته داریم،

$$a_{u_1} \cdot a_{u_2} = a_{u_2} \cdot a_{u_3} = a_{u_3} \cdot a_{u_1} = 0 \quad (22-2)$$

$$a_{u_1} \cdot a_{u_1} = a_{u_2} \cdot a_{u_2} = a_{u_3} \cdot a_{u_3} = 1 \quad (23-2)$$

هر بردار A می‌تواند به صورت مجموع مؤلفه‌های خود در سه جهت متعامد به صورت زیر نوشته شود:

$$A = a_{u_1} A_{u_1} + a_{u_2} A_{u_2} + a_{u_3} A_{u_3} \quad (24-2)$$

از معادله (24-2) اندازه A برابر است با

$$A = |A| = (A_{u_1}^2 + A_{u_2}^2 + A_{u_3}^2)^{1/2} \quad (25-2)$$

مثال ۲-۴ بردارهای A ، B و C داده شده‌اند، عباراتی برای (الف) $A \cdot B$ ، (ب) $A \times B$ ، (ج) $C \cdot (A \times B)$ در دستگاه مختصات متعامد منحنی الخط (u_1, u_2, u_3) بدست آورید.

حل نخست A ، B و C را در مختصات متعامد (u_1, u_2, u_3) می‌نویسیم:

$$A = a_{u_1} A_{u_1} + a_{u_2} A_{u_2} + a_{u_3} A_{u_3}$$

$$B = a_{u_1} B_{u_1} + a_{u_2} B_{u_2} + a_{u_3} B_{u_3}$$

$$C = a_{u_1} C_{u_1} + a_{u_2} C_{u_2} + a_{u_3} C_{u_3}$$

$$A \cdot B = (a_{u_1} A_{u_1} + a_{u_2} A_{u_2} + a_{u_3} A_{u_3}) \cdot (a_{u_1} B_{u_1} + a_{u_2} B_{u_2} + a_{u_3} B_{u_3}) \quad (26-2)$$

$$= A_{u_1} B_{u_1} + A_{u_2} B_{u_2} + A_{u_3} B_{u_3}$$

که نتیجه آخر با توجه به معادلات (22-2) و (23-2) بدست آمد.

$$A \times B = (a_{u_1} A_{u_1} + a_{u_2} A_{u_2} + a_{u_3} A_{u_3}) \times (a_{u_1} B_{u_1} + a_{u_2} B_{u_2} + a_{u_3} B_{u_3})$$

$$= a_{u_1} (A_{u_2} B_{u_3} - A_{u_3} B_{u_2}) + a_{u_2} (A_{u_3} B_{u_1} - A_{u_1} B_{u_3}) +$$

$$+ a_{u_3} (A_{u_1} B_{u_2} - A_{u_2} B_{u_1}) = \begin{vmatrix} a_{u_1} & a_{u_2} & a_{u_3} \\ A_{u_1} & A_{u_2} & A_{u_3} \\ B_{u_1} & B_{u_2} & B_{u_3} \end{vmatrix} \quad (27-2)$$

معادلات (26-2) و (27-2)، به ترتیب، حاصلضرب داخلی و خارجی دو بردار را در مختصات متعامد منحنی الخط، بیان می‌کنند. آنها اهمیت بسیار دارند و باید بخاطر سپرده شوند.

پ) عبارت مربوط به $C \cdot (A \times B)$ بلافاصله از ترکیب نتایج معادلات (26-2) و (27-2) نوشته می‌شود:

$$C \cdot (A \times B) = C_{u_1} (A_{u_2} B_{u_3} - A_{u_3} B_{u_2}) + C_{u_2} (A_{u_3} B_{u_1} - A_{u_1} B_{u_3}) +$$

$$+ C_{u_3} (A_{u_1} B_{u_2} - A_{u_2} B_{u_1}) = \begin{vmatrix} C_{u_1} & C_{u_2} & C_{u_3} \\ A_{u_1} & A_{u_2} & A_{u_3} \\ B_{u_1} & B_{u_2} & B_{u_3} \end{vmatrix} \quad (28-2)$$

معادله (28-2) می‌تواند برای اثبات معادلات (18-2) و (19-2) بکار رود، با توجه به اینکه جایگشت ترتیب بردارها در طرف چپ فقط به ترتیب دوباره سطرهای دترمینان سمت راست می‌انجامد.

در حساب برداری (و در کار الکترومغناطیس)، اغلب لازم است، انتگرال‌گیری‌های خطی، سطحی و حجمی انجام شود. در هر مورد، باید تغییر دیرفرانسیلی طولی متناظر با تغییر

دیفرانسیلی یکی از مختصات را بیان نماییم. هر چند که بعضی از مختصات مثلاً u_i ($i = 1, 2$ یا 3) ممکن است یک طول نباشد؛ و ضریب تبدیلی لازم باشد تا تغییر دیفرانسیلی du_i را به تغییر طول dl_i تبدیل کند:

$$dl_i = h_i du_i$$

(۲۹-۲)

که در آن h_i ضریب متریک نامیده می شود و خود می تواند تابعی از u_1, u_2, u_3 باشد. برای مثال در مختصات قطبی دوبعدی $(u_1, u_2) = (r, \phi)$ ، تغییر دیفرانسیلی $d\phi (= du_2)$ در $\phi (= u_2)$ نظیر تغییر دیفرانسیلی طول $dl_r = r d\phi$ ($h_r = r = u_1$) در جهت $a_\phi (= a_{u_2})$ است. یک تغییر جهت دار دیفرانسیلی طول در یک جهت دلخواه می تواند به صورت جمع برداری تغییرات طول مؤلفه ها نوشته شود:

$$dl = a_{u_1} dl_1 + a_{u_2} dl_2 + a_{u_3} dl_3 \quad (۳۰-۲)$$

یا

$$dl = a_{u_1}(h_1 du_1) + a_{u_2}(h_2 du_2) + a_{u_3}(h_3 du_3) \quad (۳۱-۲)$$

نظر به معادله (۲۵-۲)، اندازه dl برابر است با

$$dl = [(dl_1)^2 + (dl_2)^2 + (dl_3)^2]^{1/2} \quad (۲-۳۲)$$

$$= [(h_1 du_1)^2 + (h_2 du_2)^2 + (h_3 du_3)^2]^{1/2}$$

حجم دیفرانسیلی dv که به وسیله تغییرات دیفرانسیلی مختصات du_1, du_2, du_3 به ترتیب در جهت های $a_{u_1}, a_{u_2}, a_{u_3}$ تشکیل می شود، برابر است با $(dl_1 dl_2 dl_3)$ ، یا

$$dv = h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3 \quad (۳۳-۲)$$

بعداً مواردی پیش خواهد آمد تا جریان یا شار گذرنده از یک سطح دیفرانسیلی را بیان کنیم. در چنین مواردی، باید از سطح مقطع عرضی عمود بر جریان یا شار گذرنده استفاده نمود و بهتر است، سطح دیفرانسیلی را برداری در جهت عمود بر سطح در نظر گرفت؛ یعنی،

$$ds = a_n ds \quad (۳۴-۲)$$

برای مثال، اگر چگالی جریان J بر سطح دیفرانسیلی با اندازه ds عمود نباشد، جریان dI گذرنده

۱- در اینجا نماد برداری بطول l است.

از ds باید مؤلفه عمود بر سطح J ضربدر سطح باشد. با استفاده از طرز نمایش معادله (۲-۳۴) بسادگی می توان نوشت

$$dl = J \cdot ds \quad (۳۵-۲)$$

$$= J \cdot a_n ds$$

در مختصات عمومی متعام منحنی الخط، سطح دیفرانسیلی ds_1 عمود بر بردار واحد a_{u_1} برابر است با

$$ds_1 = dl_2 dl_3 \quad (۳۶-۲)$$

$$ds_1 = h_2 h_3 du_2 du_3$$

به طور مشابه، سطح های دیفرانسیلی عمود بر بردارهای واحد a_{u_2} و a_{u_3} به ترتیب عبارتند از،

$$ds_2 = h_1 h_3 du_1 du_3 \quad (۳۷-۲)$$

و

$$ds_3 = h_1 h_2 du_1 du_2 \quad (۳۸-۲)$$

دستگاه های مختصات متعام بسیاری وجود دارند؛ لیکن ما فقط با سه تایی آنها سروکار خواهیم داشت که معمول تر و مفیدتر هستند:

۱- مختصات کارتزین A (یا قائم).

۲- مختصات استوانه ای.

۳- مختصات کروی.

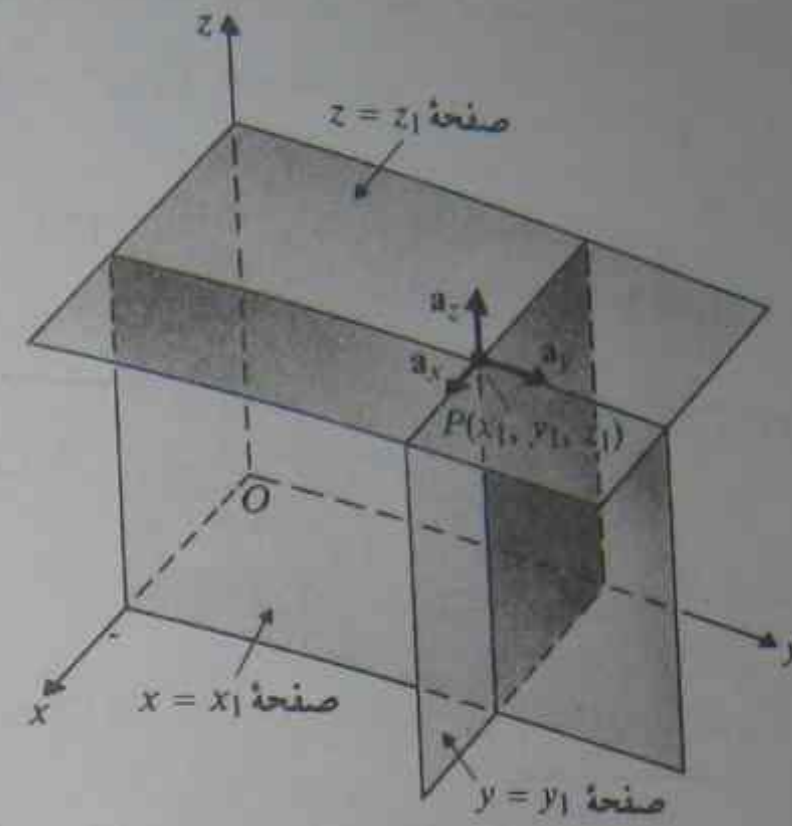
در زیر بخشهای آینده، اینها را جداگانه بررسی خواهیم کرد.

۲-۴-۱ مختصات کارتزین

$$(u_1, u_2, u_3) = (x, y, z)$$

نقطه $P(x_1, y_1, z_1)$ در مختصات کارتزین، محل تقاطع سه صفحه یا مشخصه $x = x_1, y = y_1, z = z_1$ و مطابق شکل ۲-۱۰ است. این دستگاه، راستگرد است، بردارهای پایه آن a_x, a_y, a_z

۱- عبارت "مختصات کارتزین"، ترجیح دارد، زیرا عبارت "مختصات قائم" معمولاً در ارتباط با هندسه دوبعدی است.



شکل ۲-۱۰ مختصات کارتزین

و a_z هستند و در رابطه زیر صدق می کنند:

$a_x \times a_y = a_z$ (الف ۲۹-۲)

$a_y \times a_z = a_x$ (ب ۲۹-۲)

$a_z \times a_x = a_y$ (پ ۲۹-۲)

بردار مکانی به نقطه $P(x_1, y_1, z_1)$ برابر است با

$\vec{OP} = a_x x_1 + a_y y_1 + a_z z_1$ (۲۰-۲)

هر بردار A در مختصات کارتزین، به صورت زیر نوشته می شود

$A = a_x A_x + a_y A_y + a_z A_z$ (۲۱-۲)

ضرب داخلی دو بردار A و B ، از معادله (۲۶-۲) برابر است با،

$A \cdot B = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$ (۲۲-۲)

و ضرب خارجی A و B ، از معادله (۲۷-۲)، برابر است با،

$A \times B = a_x (A_y B_z - A_z B_y) + a_y (A_z B_x - A_x B_z) + a_z (A_x B_y - A_y B_x)$

(۲۳-۲)

$$= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

۴-۲ دستگاه های مختصات متعامد

چون x, y, z و خود طول هستند، هر سه ضریب متری، واحد می باشند؛ یعنی $h_x = h_y = h_z = 1$. عبارات طول، سطح و حجم دیفرانسیلی - از معادلات (۲۱-۲)، (۲۶-۲)، (۲۷-۲)، (۲۸-۲) و (۲۳-۲) به ترتیب عبارتند از:

$d\ell = a_x dx + a_y dy + a_z dz$ (۴۴-۲)

$ds_x = dy dz$ (الف ۴۵-۲)

$ds_y = dx dz$ (ب ۴۵-۲)

$ds_z = dx dy$ (پ ۴۵-۲)

و

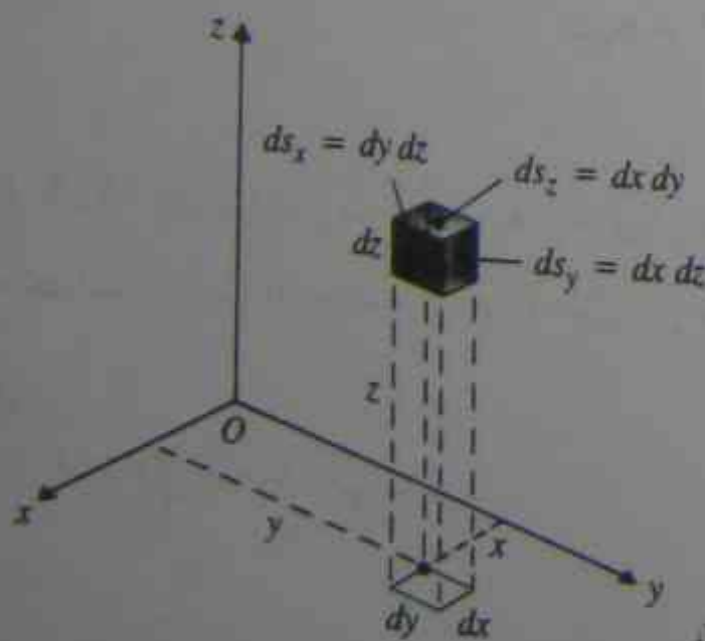
$dv = dx dy dz$ (۴۶-۲)

یک جزء کوچک حجمی دیفرانسیلی نوعی در نقطه (x, y, z) که از تغییرات دیفرانسیلی dy, dx و dz حاصل می شود، در شکل ۲-۱۱ نشان داده شده است. مساحت سطح های دیفرانسیلی ds_x, ds_y, ds_z عمود بر جهت های a_x, a_y, a_z نیز نشان داده شده است.

مثال ۲-۵ با داشتن $A = a_x 5 - a_y 2 + a_z$ ، عبارت بردار واحد B را چنان بیابید که

(الف) $B \parallel A$

(ب) $B \perp A$ ، اگر B در صفحه xy قرار داشته باشد.



شکل ۲-۱۱ یک حجم دیفرانسیلی در مختصات کارتزین

۲. اندازه برداری

حل گیریم $B = a_x B_x + a_y B_y + a_z B_z$ می دانیم که

$$|B| = (B_x^2 + B_y^2 + B_z^2)^{1/2} = 1 \quad (۲۷-۲)$$

الف) $B \parallel A$ لازم می دارد که $B \times A = 0$. از معادله $(۲۳-۲)$ داریم

$$-2B_x - B_y = 0 \quad (۲۸-۲) \text{ الف}$$

$$B_x - 5B_z = 0 \quad (۲۸-۲) \text{ ب}$$

$$5B_y + 2B_z = 0 \quad (۲۸-۲) \text{ پ}$$

سه معادله بالا، همگی مستقل نیستند. برای مثال، تفریق معادله $(۲۸-۲) \text{ ب}$ از دو برابر معادله $(۲۸-۲) \text{ الف}$ معادله $(۲۸-۲) \text{ ب}$ را نتیجه می دهد. با حل همزمان معادلات

معادله $(۲۷-۲)$ ، $(۲۸-۲) \text{ الف}$ و $(۲۸-۲) \text{ ب}$ بدست می آوریم

$$B_x = \frac{5}{\sqrt{30}} \quad \text{و} \quad B_y = -\frac{2}{\sqrt{30}} \quad \text{و} \quad B_z = \frac{1}{\sqrt{30}}$$

بنابراین

$$B = \frac{1}{\sqrt{30}}(a_x 5 - a_y 2 + a_z)$$

ب) $B \perp A$ لازم می دارد که $B \cdot A = 0$. از معادله $(۲۲-۲)$ داریم

$$5B_x - 2B_y = 0 \quad (۲۹-۲)$$

که در آن $B_z = 0$ قرار داده شده است، زیرا B در صفحه xy قرار دارد. حل معادلات $(۲۷-۲)$ و $(۲۹-۲)$ نتیجه می دهد

$$B_x = \frac{2}{\sqrt{29}} \quad \text{و} \quad B_y = \frac{5}{\sqrt{29}}$$

از این رو

$$B = \frac{1}{\sqrt{29}}(a_x 2 + a_y 5)$$

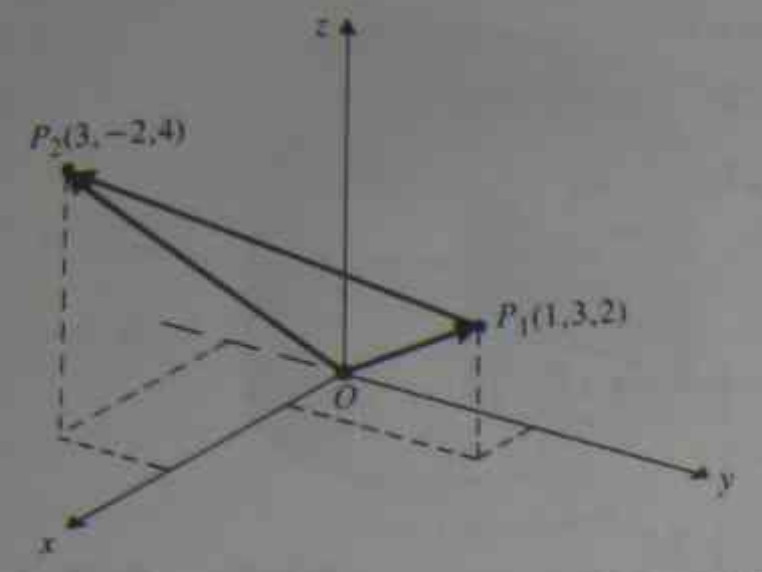
مثال ۶-۲ الف) عبارت مربوط به برداری از نقطه $P_1(1, 3, 2)$ به سمت نقطه $P_2(3, -2, 4)$ در مختصات کارتزین را بنویسید. ب) طول این خط چقدر است؟

حل

الف) از شکل ۱۲-۲ می بینیم که

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_1 P_2} &= \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} \\ &= (a_x 3 - a_y 2 + a_z 4) - (a_x + a_y 3 + a_z 2) \\ &= a_x 2 - a_y 5 + a_z 2 \end{aligned}$$

۲-۴ دستگاههای مختصات متعامد



شکل ۱۲-۲ تشریح مثال ۶-۲

ب) طول خط برابر است با

$$\begin{aligned} P_1 P_2 &= |\overrightarrow{P_1 P_2}| \\ &= \sqrt{2^2 + (-5)^2 + 2^2} \\ &= \sqrt{33} \end{aligned}$$

مثال ۷-۲ معادله یک خط راست در صفحه xy با $2x + y = 4$ داده شده است.

الف) معادله برداری عمود واحد از مبدأ به این خط را پیدا کنید.

ب) معادله خطی را که از نقطه $P(0, 2)$ می گذرد و بر خط مفروض عمود است، پیدا کنید.

حل روشن است که معادله داده شده $y = -2x + 4$ ، خط راستی را با شیب -2 و عرض از مبدأ $+4$ ، که در شکل ۱۳-۲ به صورت L_1 (خط کلفت) نشان داده شده است، به نمایش می گذارد. الف) اگر خط چهار واحد به سمت پایین انتقال یابد، خط موازی بریده L'_1 که از مبدأ می گذرد و معادله آن $2x + y = 0$ است، بدست می آید. گیریم بردار مکانی نقطه ای روی L'_1 به صورت زیر باشد

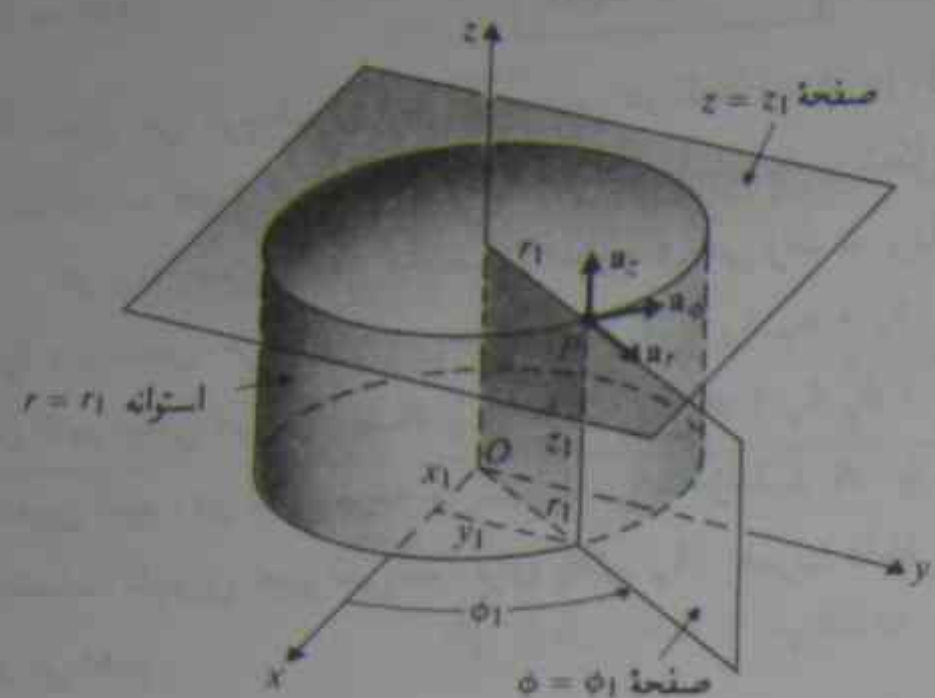
$$r = a_x x + a_y y$$

بردار $N = a_x 2 + a_y$ بر L'_1 عمود است، زیرا

$$N \cdot r = 2x + y = 0$$

روشن است که N بر L_1 نیز عمود است. از این رو معادله بردار عمود واحد در مبدأ برابر است با

$$a_N = \frac{N}{|N|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(a_x 2 + a_y)$$



شکل ۲-۱۴ مختصات استوانه‌ای

استوانه‌ای یا مدور موجود است اهمیت دارد. مختصات دو بعدی قطبی، حالت خاص $z = 0$ آن است.

در مختصات استوانه‌ای، هر بردار به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\mathbf{A} = a_r A_r + a_\phi A_\phi + a_z A_z \quad (۲-۵۱)$$

روابط مربوط به ضرب‌های داخلی و خارجی دو بردار در مختصات استوانه‌ای مستقیماً از معادلات (۲-۲۶) و (۲-۲۷) نتیجه می‌شوند.

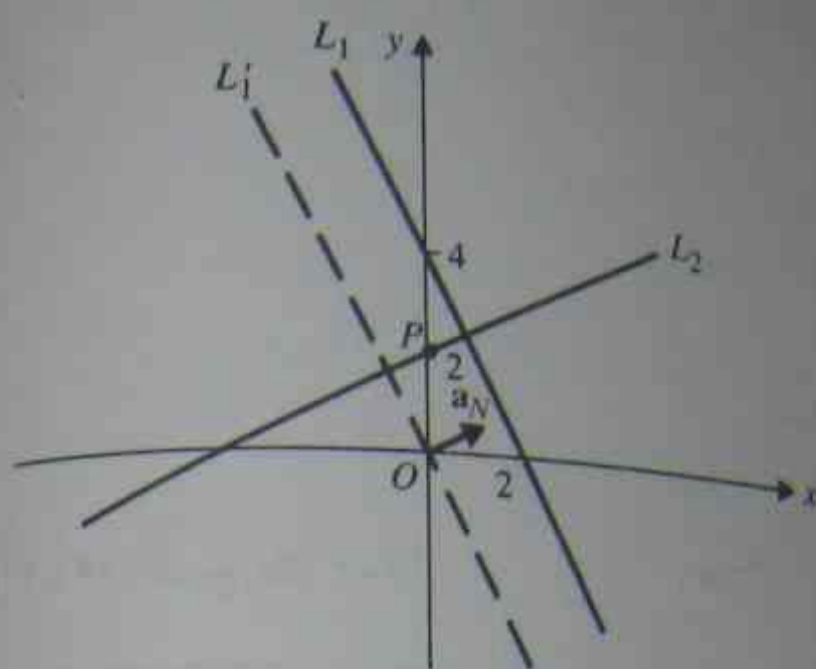
دوتا از سه مختصات r و z و u_ϕ ، خود طول هستند؛ از این رو $h_r = h_z = 1$ ، اما h_ϕ زاویه‌ای است که برای تبدیل $d\phi$ به dl_ϕ نیازمند ضریب متری $h_\phi = r$ است. پس عبارت کلی طول دیفرانسیلی در مختصات استوانه‌ای از معادله (۲-۳۱) چنین است.

$$dl = a_r dr + a_\phi r d\phi + a_z dz \quad (۲-۵۲)$$

عبارات مربوط به سطح‌های دیفرانسیلی و حجم دیفرانسیلی عبارتند از

$$\begin{aligned} ds_r &= r d\phi dz & (۲-۵۳ \text{ الف}) \\ ds_\phi &= r dr dz & (۲-۵۳ \text{ ب}) \\ ds_z &= r dr d\phi & (۲-۵۳ \text{ پ}) \end{aligned}$$

و



شکل ۲-۱۳ تشریح مثال ۲-۷

توجه کنید که شیب $a_N (= \frac{1}{r})$ منفی معکوس شیب خطوط L_1 و $L'_1 (= -2)$ است. (ب) گریم خط گذرنده بر نقطه $P(0, 2)$ و عمود بر L_1 باشد. L_2 به موازات و دارای شیبی برابر با a_N است. از این دو معادله L_2 برابر است با

$$y = \frac{x}{2} + 2 \quad \text{یا} \quad x - 2y = -4$$

چون لازم است L_2 از نقطه $P(0, 2)$ عبور کند.

۲-۴-۲ مختصات استوانه‌ای

$$(u_1, u_2, u_3) = (r, \phi, z)$$

در مختصات استوانه‌ای، نقطه $P(r_1, \phi_1, z_1)$ محل تقاطع سطح استوانه‌ای مدور $r = r_1$ ، نیم صفحه شامل محور z که با صفحه $z = z_1$ زاویه $\phi = \phi_1$ می‌سازد و صفحه‌ای موازی صفحه xy در نقطه $z = z_1$ است. به طوری که در شکل ۲-۱۴ مشخص شده است. زاویه ϕ از محور مثبت x اندازه‌گیری شده و بردار پایه a_ϕ بر سطح استوانه‌ای مماس است. روابط زیر با قاعده دست راست بکار می‌رود:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_r \times \mathbf{a}_\phi &= \mathbf{a}_z & (۲-۵۰ \text{ الف}) \\ \mathbf{a}_\phi \times \mathbf{a}_z &= \mathbf{a}_r & (۲-۵۰ \text{ ب}) \\ \mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_r &= \mathbf{a}_\phi & (۲-۵۰ \text{ پ}) \end{aligned}$$

مختصات استوانه‌ای در مسائلی یا بارها با جریان‌های خط طویل و در محل‌هایی که مرزهای

$$dv = r dr d\phi dz$$

(۵۴-۲)

یک نمونه جزء کوچک دیفرانسیلی حجمی در نقطه (r, ϕ, z) که از تغییرات دیفرانسیلی $d\phi, dr$ و dz در سه جهت مختصاتی قائم نتیجه شده است را در شکل ۱۵-۲ می بینید. هر بردار مفروض در مختصات استوانه‌ای می‌تواند به برداری در مختصات کارتزین تبدیل شود و برعکس. فرض کنید می‌خواهیم $A = a_r A_r + a_\phi A_\phi + a_z A_z$ را در مختصات کارتزین بیان کنیم؛ یعنی می‌خواهیم A را به صورت $a_x A_x + a_y A_y + a_z A_z$ بنویسیم و A_x, A_y, A_z را تعیین کنیم. در ابتدا، توجه می‌کنیم که A_z مؤلفه A با تبدیل از مختصات استوانه‌ای به مختصات کارتزین تغییر نمی‌کند. برای یافتن A_x ، ضرب داخلی هر دو عبارت A را در a_x برابر قرار می‌دهیم.

$$A_x = A \cdot a_x$$

از این رو

$$= A_r a_r \cdot a_x + A_\phi a_\phi \cdot a_x$$

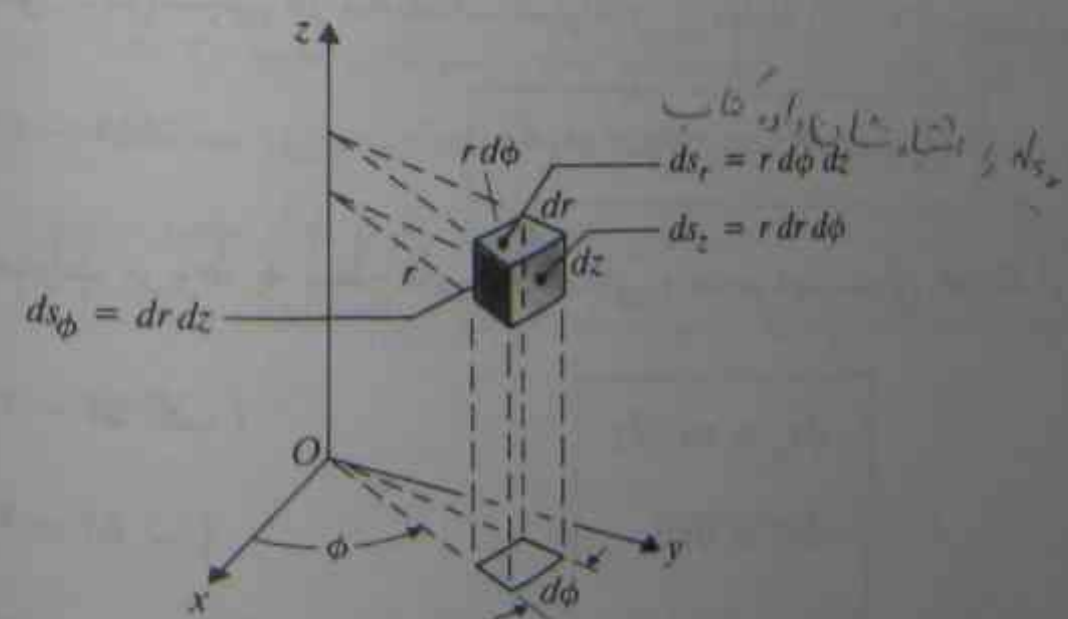
جمله شامل A_ϕ در اینجا حذف می‌شود زیرا $a_\phi \cdot a_x = 0$. با مراجعه به شکل ۱۶-۲ که موقعیت‌های نسبی بردارهای پایه a_r, a_ϕ, a_z و a_x, a_y, a_z را نشان می‌دهد، می‌بینیم که

$$a_r \cdot a_x = \cos \phi$$

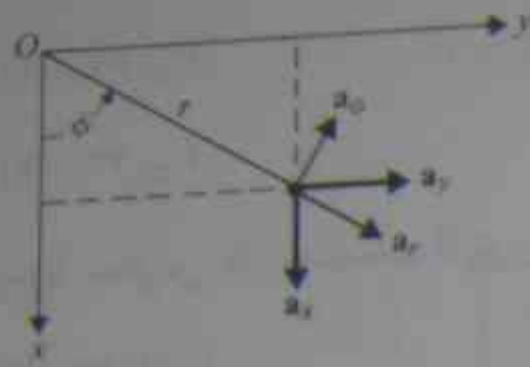
(۵۵-۲)

$$a_\phi \cdot a_x = \cos \left(\frac{\pi}{2} + \phi \right) = -\sin \phi$$

(۵۶-۲)



شکل ۱۵-۲ یک جزء کوچک دیفرانسیلی حجمی در مختصات استوانه‌ای



شکل ۱۶-۲ رابطه بین a_r, a_ϕ, a_z و a_x, a_y, a_z

از این رو

$$A_x = A_r \cos \phi - A_\phi \sin \phi \quad (۵۷-۲)$$

به همین ترتیب، برای یافتن A_y ، ضرب داخلی هر دو عبارت A را در a_y بدست می‌آوریم:

$$A_y = A \cdot a_y = A_r a_r \cdot a_y + A_\phi a_\phi \cdot a_y$$

از شکل ۱۶-۲ در می‌یابیم

$$a_r \cdot a_y = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \phi \right) = \sin \phi \quad (۵۸-۲)$$

و

$$a_\phi \cdot a_y = \cos \phi \quad (۵۹-۲)$$

نتیجه می‌شود

$$A_y = A_r \sin \phi + A_\phi \cos \phi \quad (۶۰-۲)$$

راحت‌تر است روابط بین مؤلفه‌های یک بردار در مختصات کارتزین و استوانه‌ای را به صورت ماتریسی بنویسیم:

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix} \quad (۶۱-۲)$$

اکنون مسئله ما حل شده است، بجز اینکه $\cos \phi$ و $\sin \phi$ در معادله (۶۱-۲) باید به مختصات کارتزین تبدیل شود. همچنین A_r, A_ϕ, A_z خود ممکن است توابعی از r, ϕ, z باشند. در این صورت، آنها نیز در جواب نهائی باید به توابعی از x, y, z تبدیل شوند. فرمول‌های تبدیل صفحه بعد از شکل ۱۶-۲ پیدا است. از مختصات استوانه‌ای به کارتزین:

مثال ۹-۲ بردار

$$A = a_r(r \cos \phi) - a_\phi r + a_z \delta$$

را در مختصات کارتزین بیان کنید.

حل با استفاده مستقیم از معادله (۶۱-۲) داریم

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \cos \phi \\ -r \\ \delta \end{bmatrix}$$

یا

$$A = a_x(r \cos^2 \phi + r \sin \phi) + a_y(r \sin \phi \cos \phi - r \cos \phi) + a_z \delta$$

اما، از معادلات (۶۲-۲) و (۶۳-۲).

$$\cos \phi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

و

$$\sin \phi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

بنابراین

$$A = a_x \left(\frac{rx}{\sqrt{x^2 + y^2}} + ry \right) + a_y \left(\frac{ry}{\sqrt{x^2 + y^2}} - rx \right) + a_z \delta$$

که جواب مورد نظر است.

۲-۴-۳ مختصات کروی

$$(u_1, u_2, u_3) = (R, \theta, \phi)$$

هر نقطه $P(R_1, \theta_1, \phi_1)$ در مختصات کروی، به عنوان محل تقاطع سه سطح زیر تعریف می شود: یک سطح کروی به مرکز مبدأ مختصات با شعاع $R = R_1$ ؛ یک مخروط مدور قائم با رأس در مبدأ و محور منطبق بر محور z و دارای نیم زاویه $\theta = \theta_1$ ؛ و یک نیم صفحه شامل محور z که با صفحه xz زاویه $\phi = \phi_1$ می سازد. بردار پایه a_R در P ، از مبدأ شعاعی است و با a_r در مختصات استوانه‌ای کاملاً تفاوت دارد. a_r در مختصات استوانه‌ای بر محور z عمود است. بردار پایه a_θ در صفحه $\phi = \phi_1$ واقع بوده و به سطح کروی مماس است، در حالی که بردار پایه a_ϕ مشابه a_θ در مختصات استوانه‌ای است. این بردارها را در شکل ۱۸-۲ ملاحظه می کنید. در یک سیستم

$$\begin{aligned} x &= r \cos \phi \\ y &= r \sin \phi \\ z &= z \end{aligned}$$

۲-الزوری

(۶۲-۲ الف)

(۶۲-۲ ب)

(۶۲-۲ پ)

روابط معکوس (از مختصات کارتزین به استوانه‌ای) عبارتند از

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \phi &= \tan^{-1} \frac{y}{x} \\ z &= z \end{aligned}$$

(۶۳-۲ الف)

(۶۳-۲ ب)

(۶۳-۲ پ)

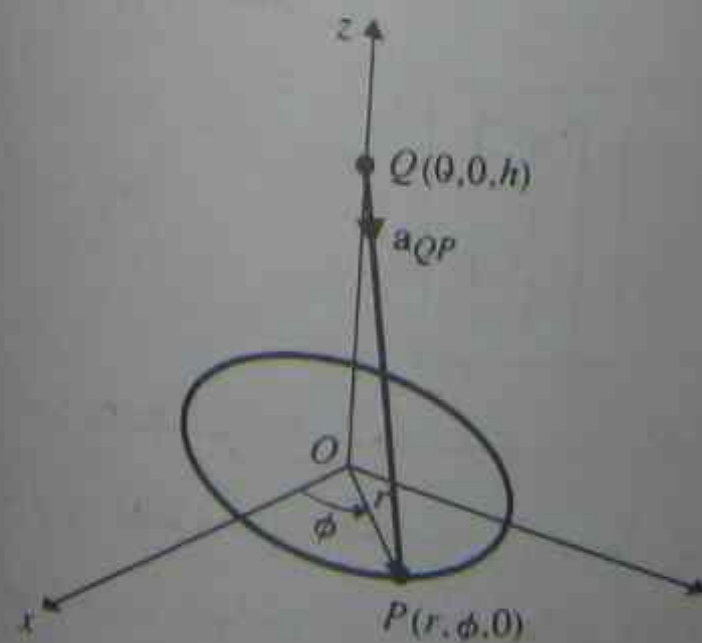
مثال ۸-۲ مختصات استوانه‌ای نقطه دلخواه P در صفحه $z = 0$ به صورت $(r, \phi, 0)$ است. بردار واحدی را بیابید که از نقطه $z = h$ روی محور z به سمت P امتداد داشته باشد.

حل با مراجعه به شکل ۱۷-۲ داریم

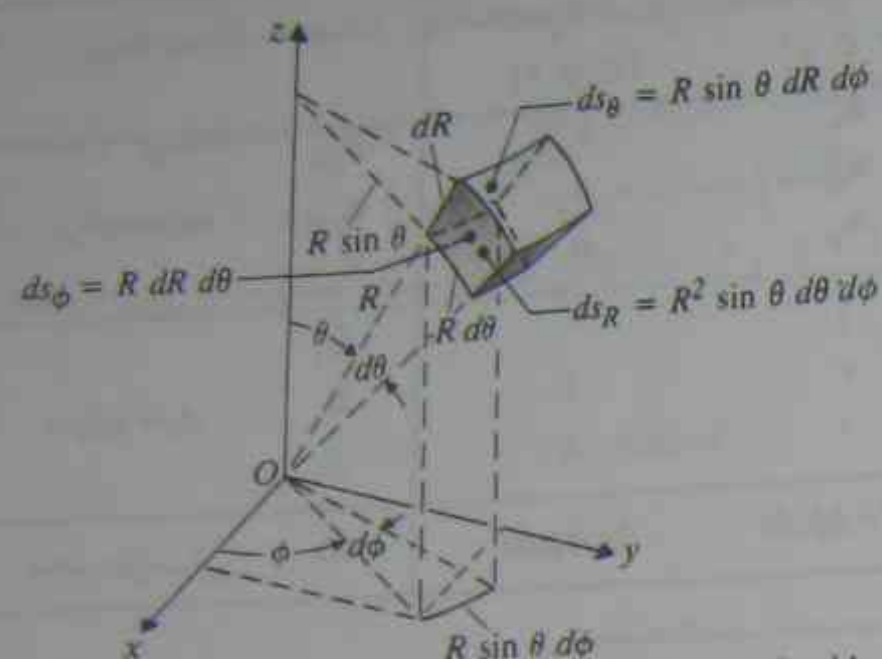
$$\begin{aligned} \vec{QP} &= \vec{OP} - \vec{OQ} \\ &= (a_r r) - (a_z h) \end{aligned}$$

از این رو

$$a_{QP} = \frac{\vec{QP}}{|\vec{QP}|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + h^2}} (a_r r - a_z h)$$



شکل ۱۷-۲ تشریح مثال ۸-۲



شکل ۲-۱۹ یک جزء کوچک حجمی دیفرانسیلی در مختصات کروی

شده است، می‌بینیم که ضرایب متری $h_r = R$ و $h_\theta = R \sin \theta$ به ترتیب برای تبدیل $d\theta$ و $d\phi$ به dl_θ و dl_ϕ مورد نیاز هستند. عبارت کلی یک طول دیفرانسیلی از معادله (۲-۳۱) برابر است با،

$$dl = a_R dR + a_\theta R d\theta + a_\phi R \sin \theta d\phi \quad (۲-۶۶)$$

عبارات مربوط به سطوح دیفرانسیلی و حجم دیفرانسیلی که از تغییرات دیفرانسیلی dR ، $d\theta$ و $d\phi$ در سه جهت مختصاتی نتیجه می‌شوند، عبارتند از

$$ds_R = R^2 \sin \theta d\theta d\phi \quad (۲-۶۷ \text{ الف})$$

$$ds_\theta = R \sin \theta dR d\phi \quad (۲-۶۷ \text{ ب})$$

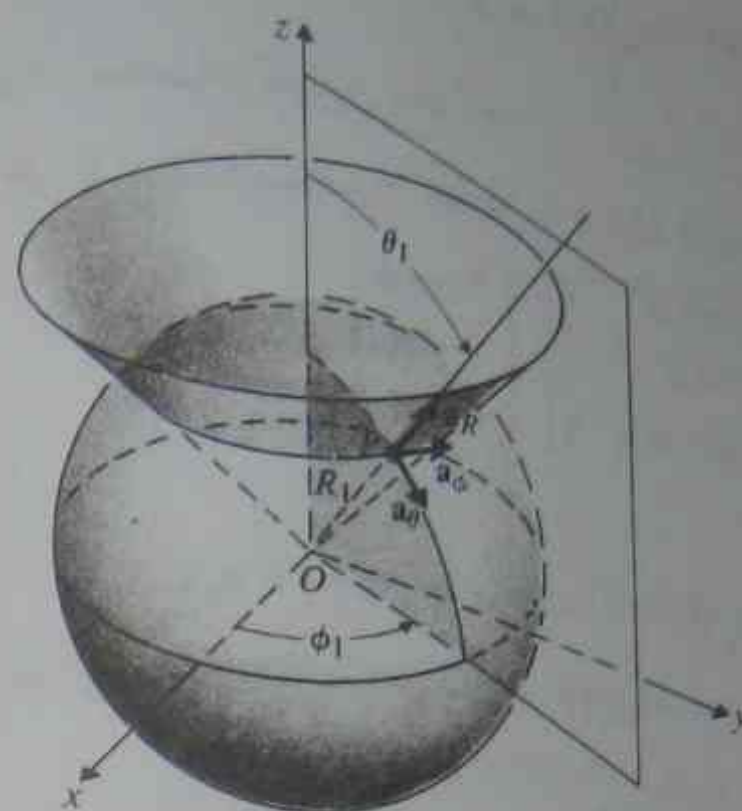
$$ds_\phi = R dR d\theta \quad (۲-۶۷ \text{ پ})$$

و

$$dv = R^2 \sin \theta dR d\theta d\phi \quad (۲-۶۸)$$

برای راحتی، بردارهای پایه، ضرایب متری، و عبارات مربوط به حجم دیفرانسیلی در جدول ۲-۱ به‌نظم درآمده‌اند.

بردارهای که در مختصات کروی داده شده را می‌توان به برداری در مختصات کارتزین یا استوانه‌ای تبدیل نمود و برعکس. از شکل ۲-۱۹ بسادگی دیده می‌شود که



شکل ۲-۱۸ مختصات کروی

راست‌گرد داریم

$$a_R \times a_\theta = a_\phi \quad (۲-۶۴ \text{ الف})$$

$$a_\theta \times a_\phi = a_R \quad (۲-۶۴ \text{ ب})$$

$$a_\phi \times a_R = a_\theta \quad (۲-۶۴ \text{ پ})$$

مختصات کروی در مسائلی که شامل منبع نقطه‌ای و نواحی با مرزهای کروی هستند، اهمیت دارد. وقتی ناظر از ناحیه منبع که دارای اندازه معین است، بسیار دور باشد، منبع را می‌توان به‌عنوان مبدأ دستگاه مختصات کروی در نظر گرفت و در نتیجه تقریب‌های ساده‌کننده مناسبی می‌تواند انجام گیرد. به همین دلیل است که مختصات کروی در حل مسائل آنتن‌ها در میدان‌های دور بکار می‌رود.

هر بردار در مختصات کروی بصورت زیر نوشته می‌شود

$$A = a_R A_R + a_\theta A_\theta + a_\phi A_\phi \quad (۲-۶۵)$$

عبارات مربوط به ضرب‌های داخلی و خارجی دو بردار در مختصات کروی از معادلات (۲-۲۶) و (۲-۲۷) بدست می‌آید.

در مختصات کروی، تنها R (u_r) طول است. دو مختصه دیگر، θ و ϕ (u_θ ، u_ϕ)، زاویه هستند. با مراجعه به شکل ۲-۱۹، که در آن یک نمونه جزء کوچک حجمی دیفرانسیلی نشان داده

مختصات کروی (R, θ, φ)	مختصات استوانه‌ای (r, φ, z)	مختصات کارتزین (x, y, z)	جدول ۱-۲ سه دستگاه اساسی مختصات متعامد روابط دستگاه مختصات
a _R	a _r	a _x	a _{u1}
a _θ	a _φ	a _y	a _{u2}
a _φ	a _z	a _z	a _{u3}
1	1	1	بردارهای پایه
R	r	1	ضرایب متریک
R sin θ	1	1	h _r h _φ h _z
R ² sin θ dR dθ dφ	r dr dφ dz	dx dy dz	حجم دیفرانسیلی dv

$$\begin{aligned} x &= R \sin \theta \cos \phi & (۶۹-۲) \text{ الف} \\ y &= R \sin \theta \sin \phi & (۶۹-۲) \text{ ب} \\ z &= R \cos \theta & (۶۹-۲) \text{ پ} \end{aligned}$$

برعکس، اندازه‌گیری‌های مختلف کارتزین را می‌توان به مختصات کروی تبدیل نمود:

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} & (۷۰-۲) \text{ الف} \\ \theta &= \tan^{-1} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} & (۷۰-۲) \text{ ب} \\ \phi &= \tan^{-1} \frac{y}{x} & (۷۰-۲) \text{ پ} \end{aligned}$$

مثال ۱۰-۲ موقعیت نقطه P در مختصات کروی (۸, ۱۲۰°, ۳۳۰°) است. موقعیت آن را در (الف) مختصات کارتزین و (ب) مختصات استوانه‌ای مشخص کنید.

حل مختصات کروی نقطه داده شده عبارتند از R = ۸، θ = ۱۲۰° و φ = ۳۳۰°.

الف) در مختصات کارتزین از معادلات (۶۹-۲) الف، ب، پ استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} x &= 8 \sin 120^\circ \cos 330^\circ = 6 \\ y &= 8 \sin 120^\circ \sin 330^\circ = -2\sqrt{3} \\ z &= 8 \cos 120^\circ = -4 \end{aligned}$$

از این رو موقعیت نقطه، P(6, -2√3, -4) و بردار مکانی (برداری که از مبدأ به این نقطه

می‌رود) برابر است با

$$\vec{OP} = a_x 6 - a_y 2\sqrt{3} - a_z 4$$

ب) در مختصات استوانه‌ای. مختصات استوانه‌ای نقطه P، با اعمال معادله‌های (۲-۶۳) الف، ب، پ) به نتایج بخش (الف) بدست می‌آید، اما آنها را می‌توان با استفاده از روابط زیر که با مقایسه شکل‌های ۱۴-۲ و ۱۸-۲ قابل اثبات است، مستقیماً از روی مختصات کروی داده شده، محاسبه نمود:

$$\begin{aligned} r &= R \sin \theta & (۷۱-۲) \text{ الف} \\ \phi &= \phi & (۷۱-۲) \text{ ب} \\ z &= R \cos \theta & (۷۱-۲) \text{ پ} \end{aligned}$$

داریم P(۴√۲, ۳۳۰°, -۴)؛ و بردار مکانی آن در مختصات استوانه‌ای برابر است با

$$\vec{OP} = a_r 4\sqrt{2} - a_z 4$$

در اینجا متذکر می‌شویم که بردار مکانی یک نقطه در مختصات استوانه‌ای، زاویه φ = ۳۳۰° را به‌طور صریح در بر ندارد. اما جهت دقیق a_r به φ بستگی دارد. بردار مکانی برحسب مختصات کروی (برداری از مبدأ به نقطه P) فقط شامل یک جمله است:

$$\vec{OP} = a_R 8$$

در اینجا جهت a_R با مختصات θ و φ نقطه P تغییر می‌کند.

مثال ۱۱-۲ بردار A = a_RA_R + a_θA_θ + a_φA_φ را به مختصات کارتزین تبدیل کنید.

حل در این مسئله می‌خواهیم A را به صورت A = a_xA_x + a_yA_y + a_zA_z بنویسیم. این مطلب با مسئله قبلی، یعنی تبدیل مختصات یک نقطه کاملاً متفاوت است. نخست فرض می‌کنیم، عبارت بردار داده شده A برای تمام نقاط مورد توجه برقرار بوده و هر سه مؤلفه داده شده A_R، A_θ و A_φ می‌توانند توابعی از متغیرهای مختصاتی باشند. دوم اینکه در یک نقطه مشخص، A_R، A_θ و A_φ مقادیر عددی معینی خواهند داشت، اما این مقادیر که جهت A را تعیین می‌کنند، به‌طور کلی کاملاً متفاوت با مقادیر مختصاتی نقطه می‌باشند. با در نظر گرفتن ضرب داخلی A و a_x داریم

$$\begin{aligned} A_x &= A \cdot a_x \\ &= A_R a_R \cdot a_x + A_\theta a_\theta \cdot a_x + A_\phi a_\phi \cdot a_x \end{aligned}$$

۲. آنالیز برداری

با یادآوری اینکه اینکته $a_\theta \cdot a_x$ ، $a_\phi \cdot a_x$ و $a_R \cdot a_x$ به ترتیب مؤلفه بردارهای واحد a_θ ، a_ϕ و a_R را در جهت a_x نتیجه می‌دهد، از شکل ۱۹-۲ و معادلات (۶۹-۲) الف، ب، پ) در می‌یابیم:

$$a_R \cdot a_x = \sin \theta \cos \phi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (۷۲-۲)$$

$$a_\theta \cdot a_x = \cos \theta \cos \phi = \frac{xz}{\sqrt{(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + z^2)}} \quad (۷۳-۲)$$

$$a_\phi \cdot a_x = -\sin \phi = -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (۷۴-۲)$$

از این رو

$$A_x = A_R \sin \theta \cos \phi + A_\theta \cos \theta \cos \phi - A_\phi \sin \phi$$

$$= \frac{A_R x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{A_\theta xz}{\sqrt{(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + z^2)}} - \frac{A_\phi y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (۷۵-۲)$$

به‌طور مشابه

$$A_y = A_R \sin \theta \sin \phi + A_\theta \cos \theta \sin \phi + A_\phi \cos \phi$$

$$= \frac{A_R y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{A_\theta yz}{\sqrt{(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + z^2)}} + \frac{A_\phi x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (۷۶-۲)$$

$$A_z = A_R \cos \theta - A_\theta \sin \theta = \frac{A_R z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \frac{A_\theta \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (۷۷-۲)$$

اگر A_R ، A_θ و A_ϕ خود تابعی از R ، θ و ϕ باشند، لازم است آنها را نیز با استفاده از معادلات (۷۵-۲)، (۷۶-۲) و (۷۷-۲) الف، ب، پ) به تابعی از x ، y و z تبدیل نمود. معادلات (۷۵-۲)، (۷۶-۲) و (۷۷-۲) این حقیقت را آشکار می‌سازند که وقتی برداری در یک دستگاه مختصات شکل ساده‌ای دارد، تبدیل آن به دستگاه مختصات دیگر معمولاً به عبارت پیچیده‌تری منجر می‌گردد.

■ مثال ۱۲-۲ با فرض اینکه ابری از الکترون‌ها محدود به ناحیه بین دو کره به شعاعهای ۲ و ۵ سانتیمتر دارای چگالی یار زیر باشد،

$$\frac{-3 \times 10^{-8}}{R^2} \cos^2 \phi \quad (\text{C/m}^3)$$

کل بار داخل ناحیه را پیدا کنید.

حل داریم

۲-۵. انتگرال‌هایی شامل توابع برداری

$$\rho = -\frac{3 \times 10^{-8}}{R^2} \cos^2 \phi$$

$$Q = \int \rho dv$$

روشن است که شرایط داده شده مسئله به استفاده از مختصات کروی اشاره می‌کند. با استفاده از عبارت dv در معادله (۶۸-۲)، یک انتگرال سه‌گانه تشکیل می‌دهیم:

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_{0.2}^{0.5} \rho R^2 \sin \theta dR d\theta d\phi$$

دو مطلب اینجا اهمیت دارد. نخست، چون ρ بر حسب واحدهای کولمب در مترمکعب داده شده است، حدود انتگرال‌گیری R باید به متر تبدیل شوند. دوم، دامنه کامل انتگرال‌گیری θ از 0 تا π رادیان است نه از 0 تا 2π رادیان. اندکی تأمل ما را متقاعد خواهد ساخت که از چرخش یک نیم دایره (نه یک دایره کامل) به دور محور z ، به اندازه 2π رادیان (ϕ از 0 تا 2π) یک کره بوجود می‌آید. داریم

$$Q = -3 \times 10^{-8} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_{0.2}^{0.5} \frac{1}{R^2} \cos^2 \phi \sin \theta dR d\theta d\phi$$

$$= -3 \times 10^{-8} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left(-\frac{1}{0.5} + \frac{1}{0.2} \right) \sin \theta d\theta \cos^2 \phi d\phi$$

$$= -0.9 \times 10^{-6} \int_0^{2\pi} (-\cos \theta) \Big|_0^\pi \cos^2 \phi d\phi$$

$$= -1.8 \times 10^{-6} \left(\frac{\phi}{2} + \frac{\sin 2\phi}{4} \right) \Big|_0^{2\pi} = -1.8 \pi \quad (\mu\text{C})$$

۲-۵. انتگرال‌هایی شامل توابع برداری

در کارهای الکترومغناطیس موقعیت‌هایی پیش می‌آید که با انتگرال‌هایی شامل توابع برداری روبرو هستیم، مثلاً

$$\int_V \mathbf{F} dv \quad (۷۸-۲)$$

$$\int_C \mathbf{V} dl \quad (۷۹-۲)$$

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} \quad (۸۰-۲)$$

$$\int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \quad (۸۱-۲)$$

انتگرال حجمی (۷۸-۲) را می‌توان به صورت جمع سه انتگرال عددی محاسبه کرد؛ نخست باید بردار F را در دستگاه مختصات مناسب به سه مؤلفه تجزیه نمود. اگر dv نمایانگر یک حجم دیفرانسیلی باشد، آنگاه (۷۸-۲) در واقع نمایش مختصر یک انتگرال سه‌گانه روی سه بعد است. در انتگرال دوم (۷۹-۲) V تابعی عددی از فضا است. dl نمایشگر نمود دیفرانسیلی طول C و مسیر انتگرال‌گیری است. اگر قرار باشد انتگرال‌گیری از نقطه P_1 به نقطه دیگر P_2 انجام شود، می‌نویسیم $\int_{P_1}^{P_2} V dl$. اگر انتگرال‌گیری روی مسیر بسته C انجام شود، آن را با $\oint_C V dl$ نمایش می‌دهیم. در مختصات کارتزین، (۷۹-۲) با استفاده از معادله (۴۴-۲) به صورت زیر می‌تواند نوشته شود

$$\int_C V dl = \int_C V(x, y, z) [a_x dx + a_y dy + a_z dz] \quad (۸۲-۲)$$

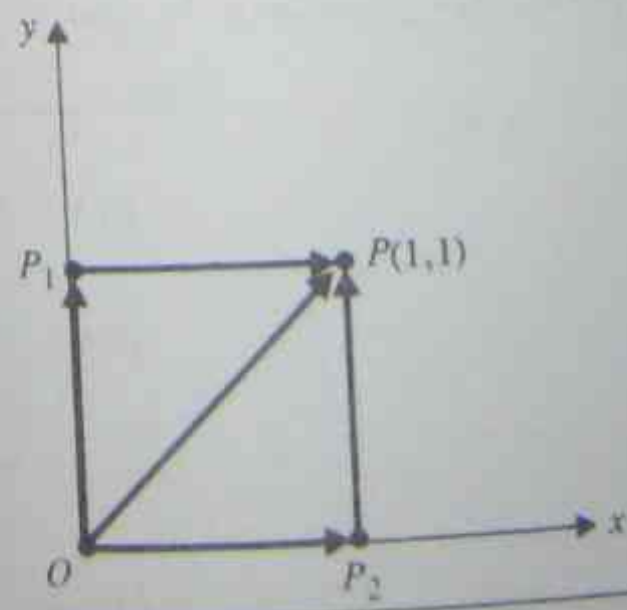
چون بردارهای واحد کارتزین از نظر اندازه و جهت هردو ثابت هستند، می‌توان آنها را از انتگرال بیرون آورد و معادله (۸۲-۲) به صورت زیر درمی‌آید

$$\int_C V dl = a_x \int_C V(x, y, z) dx + a_y \int_C V(x, y, z) dy + a_z \int_C V(x, y, z) dz \quad (۸۳-۲)$$

سه انتگرال سمت راست معادله (۸۳-۲)، انتگرال‌های عددی معمولی هستند؛ و می‌توان آنها را به‌ازای $V(x, y, z)$ داده شده روی مسیر C محاسبه نمود.

■ مثال ۱۳-۲ انتگرال $\int_0^P r^2 dr$ را که در آن $r^2 = x^2 + y^2$ است، از مبدأ تا نقطه $P(1, 1)$ (الف)

در امتداد مسیر مستقیم OP ، (ب) در امتداد مسیر OP_1P ، و (پ) در امتداد مسیر OP_2P مطابق شکل ۲-۲۰ محاسبه کنید.



شکل ۲-۲۰ شرح مثال ۱۳-۲

حل

الف) در امتداد مسیر مستقیم OP :

$$\begin{aligned} \int_0^P r^2 dr &= a_r \int_0^{\sqrt{r}} r^2 dr = a_r \frac{r\sqrt{r}}{3} \\ &= \frac{r\sqrt{r}}{3} (a_x \cos 45^\circ + a_y \sin 45^\circ) \\ &= a_x \frac{r}{3} + a_y \frac{r}{3} \end{aligned}$$

ب) در امتداد مسیر OP_1P :

$$\begin{aligned} \int_0^P (x^2 + y^2) dr &= a_y \int_0^{P_1} y^2 dy + a_x \int_{P_1}^P (x^2 + y^2) dx \\ &= a_y \left. \frac{1}{3} y^3 \right|_0^1 + a_x \left. \left(\frac{1}{3} x^3 + x \right) \right|_0^1 \\ &= a_x \frac{4}{3} + a_y \frac{1}{3} \end{aligned}$$

پ) در امتداد مسیر OP_2P :

$$\begin{aligned} \int_0^P (x^2 + y^2) dr &= a_x \int_0^{P_2} x^2 dx + a_y \int_{P_2}^P (x^2 + y^2) dy \\ &= a_x \left. \frac{1}{3} x^3 \right|_0^1 + a_y \left. \left(y + \frac{1}{3} y^3 \right) \right|_0^1 \\ &= a_x \frac{1}{3} + a_y \frac{4}{3} \end{aligned}$$

روشن است که مقدار انتگرال به مسیر انتگرال‌گیری وابسته است، چون نتیجه بخشهای (الف)، (ب)

و (پ) با هم متفاوت است.

انتگرال‌های (۷۸-۲) و (۸۱-۲) از نظر ریاضی به یک شکل هستند؛ هردو آنها به نتیجه‌ای عددی منتهی می‌شوند. عبارت (۸۰-۲) یک انتگرال خطی است که در آن، مورد انتگرال‌گیری، مؤلفه بردار F در امتداد مسیر انتگرال‌گیری را به نمایش می‌گذارد. این نوع انتگرال خطی عددی هم در فیزیک و هم در الکترومغناطیس دارای اهمیت قابل توجهی است. (اگر F یک نیرو باشد، انتگرال مورد نظر، کار انجام شده به وسیله نیرو برای حرکت دادن جسمی از نقطه ابتدائی P_1 تا نقطه انتهائی P_2 در امتداد مسیر مشخص شده C است؛ اگر F با E شدت میدان الکتریکی، جایگزین شود، آنگاه این انتگرال، کار انجام شده توسط میدان الکتریکی برای حرکت دادن یک بار واحد از P_1 به P_2 را به نمایش می‌گذارد.) با این مسئله در این فصل و بسیاری از

پخشهای این کتاب باز هم مراجعه خواهیم بود.

مثال ۲-۱۴ $F = a_x xy - a_y 2x$ داده شده است، انتگرال خطی عددی

$$\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\ell$$

را در امتداد ربع دایره نشان داده شده در شکل ۲-۲۱ محاسبه کنید.

حل این مسئله را به دو روش حل خواهیم کرد: نخست در مختصات کارتزین، سپس در مختصات استوانه‌ای.

الف) در مختصات کارتزین. بانوجه به F داده شده و عبارت $d\ell$ در معادله (۲-۴۴) داریم

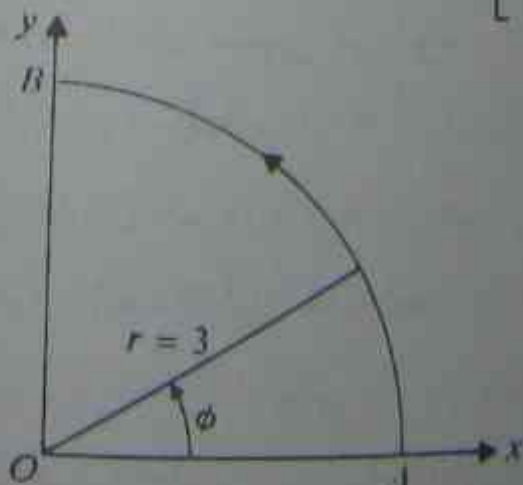
$$\mathbf{F} \cdot d\ell = xy dx - 2x dy$$

معادله ربع دایره $x^2 + y^2 = 9$ ($0 \leq x, y \leq 3$) است. بنابراین،

$$\begin{aligned} \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\ell &= \int_3^0 x \sqrt{9-x^2} dx - 2 \int_0^3 \sqrt{9-y^2} dy \\ &= -\frac{1}{3} (9-x^2)^{3/2} \Big|_3^0 - \left[y\sqrt{9-y^2} + 9 \sin^{-1} \frac{y}{3} \right]_0^3 \\ &= -9 \left(1 + \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

ب) در مختصات استوانه‌ای. در اینجا نخست F را به مختصات استوانه‌ای تبدیل می‌کنیم. با معکوس کردن معادله (۲-۶۱) داریم

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2-81)$$



شکل ۲-۲۱ مسیر انتگرال خطی (مثال ۲-۱۴)

با F داده شده، معادله (۲-۸۴) چنین بدست می‌دهد

$$\begin{bmatrix} F_r \\ F_\phi \\ F_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} xy \\ -2x \\ 0 \end{bmatrix}$$

که به معادله زیر منتهی می‌شود

$$\mathbf{F} = a_r(xy \cos \phi - 2x \sin \phi) - a_\phi(xy \sin \phi + 2x \cos \phi)$$

در مسئله حاضر مسیر انتگرال‌گیری در امتداد ربع دایره‌ای به شعاع ۳ است. هیچ تغییری در r یا z ، در امتداد مسیر روی نمی‌دهد. ($dr = 0$ و $dz = 0$): از این رو معادله (۲-۵۲) به صورت زیر ساده می‌شود

$$d\ell = a_\phi 3 d\phi$$

$$\mathbf{F} \cdot d\ell = -2(xy \sin \phi + 2x \cos \phi) d\phi$$

به دلیل دایره‌ای بودن مسیر، F_r در انتگرال‌گیری فعلی اهمیتی ندارد. در امتداد مسیر، $x = 3 \cos \phi$ و $y = 3 \sin \phi$ بنابراین

$$\begin{aligned} \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\ell &= \int_0^{\pi/2} -2(9 \sin^2 \phi \cos \phi + 6 \cos^2 \phi) d\phi \\ &= -9(\sin^2 \phi + \phi + \sin \phi \cos \phi) \Big|_0^{\pi/2} \\ &= -9 \left(1 + \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

که مانند جواب قبلی است.

در این مثال خاص، F در مختصات کارتزین داده شده است و مسیر دایره‌ای است. هیچ دلیل مجبورکننده برای حل مسئله در یک مختصات یا مختصات دیگر وجود ندارد. ما تبدیل بردارها و روال حل را در هر دو مختصات نشان داده‌ایم.

عبارت (۲-۸۱) $\int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}$ یک انتگرال سطحی است. در واقع یک انتگرال دوگانه در دو بعد است؛ اما برای سادگی با یک علامت انتگرال نوشته شده است. این انتگرال، شار میدان برداری \mathbf{A} را که از سطح S می‌گذرد، اندازه می‌گیرد. در این انتگرال، جزء سطح دیفرانسیلی برداری، $d\mathbf{s} = a_n ds$ ، دارای اندازه ds و جهتی است که با بردار واحد a_n مشخص شده است. قرارداد جهت مثبت ds یا a_n به صورت صفحه بعد است:

۱- اگر سطح انتگرال‌گیری S ، سطح بسته‌ای حاوی یک حجم باشد، آنگاه جهت مثبت a_n همواره به سمت خارج حجم است. این مطلب در شکل ۲-۲۲ (الف) نمایش داده شده است. ملاحظه می‌کنیم که جهت مثبت a_n به محل ds بستگی دارد. در صورتی که انتگرال‌گیری روی یک سطح بسته انجام گیرد، یک دایره کوچک به علامت انتگرال اضافه می‌شود:

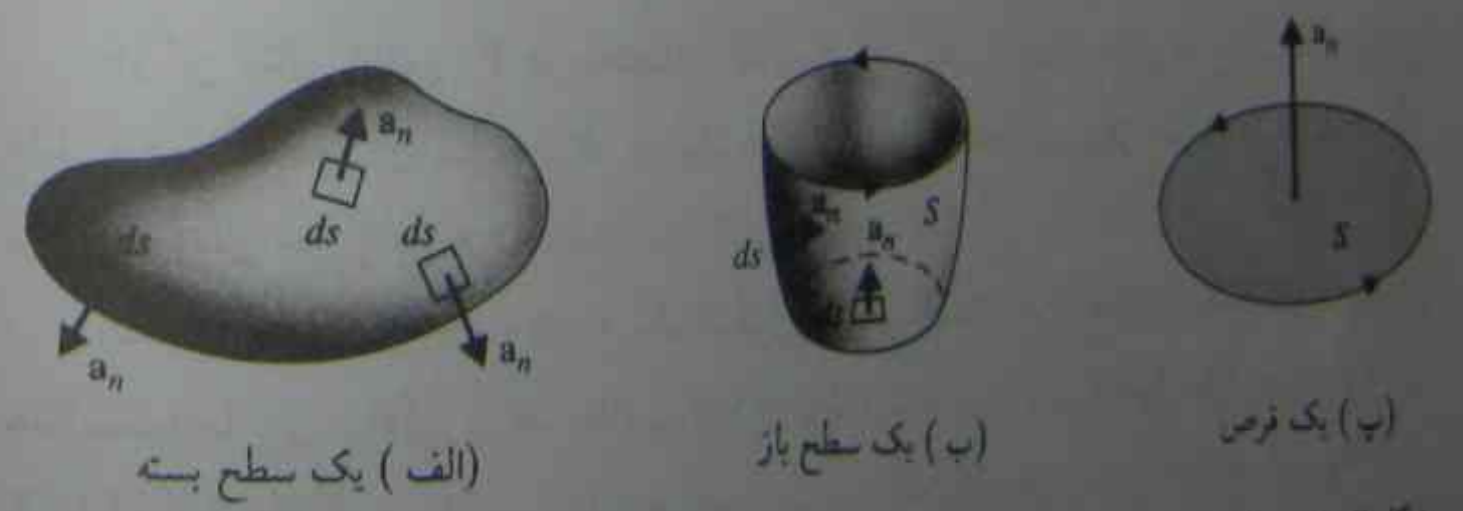
$$\oint_S A \cdot ds = \oint_S A \cdot a_n ds$$

۲- اگر S یک سطح باز باشد، جهت مثبت a_n به جهت حرکت روی حاشیه سطح باز بستگی دارد. این مطلب را در شکل ۲-۲۲ (ب) می‌بینید، در این شکل، یک سطح فنجان‌شکل (بدون سرپوش) نشان داده شده است. قاعده دست راست را بکار می‌بریم: اگر انگشتان دست راست، جهت حرکت به دور حاشیه را دنبال کند، آنگاه شست، جهت مثبت a_n را نشان می‌دهد. در اینجا نیز جهت مثبت دارای a_n به محل ds بستگی دارد. سطحی مثل یک قرص، در شکل ۲-۲۲ (پ)، حالت خاصی از یک سطح باز است که دارای a_n ثابت می‌باشد.

مثال ۱۵-۲ $F = a_r k_r / r + a_z k_z$ داده شده است. انتگرال عددی سطحی

$$\oint_S F \cdot ds$$

را روی سطح استوانه‌ای بسته‌ای حول محور z که با $z = \pm 2$ و $r = 2$ مشخص می‌شود، محاسبه نمایید. حل سطح مشخص شده انتگرال‌گیری S ، سطح استوانه بسته نشان داده شده در شکل ۲-۲۳ است. استوانه سه سطح دارد: سطح بالایی، سطح پایینی، و دیواره جانبی. می‌نویسیم



(الف) یک سطح بسته (ب) یک سطح باز (پ) یک قرص
شکل ۲-۲۲ نمایش جهت مثبت a_n در انتگرال سطحی عددی

$$\begin{aligned} \oint_S F \cdot ds &= \oint_S F \cdot a_n ds \\ &= \int_{\text{بالایی}} F \cdot a_n ds + \int_{\text{پایینی}} F \cdot a_n ds + \int_{\text{دیواره}} F \cdot a_n ds \end{aligned}$$

که در آن، a_n عمود واحد به سمت خارج از سطوح مربوطه است. سه انتگرال سمت راست، به‌طور جداگانه قابل محاسبه هستند.
الف) سطح بالایی، $z = 2$ ، $a_n = a_z$.

$$\begin{aligned} F \cdot a_n &= k_r z = 2k_r \\ ds &= r dr d\phi \quad (\text{از معادله ۲-۵۳ پ}) \end{aligned}$$

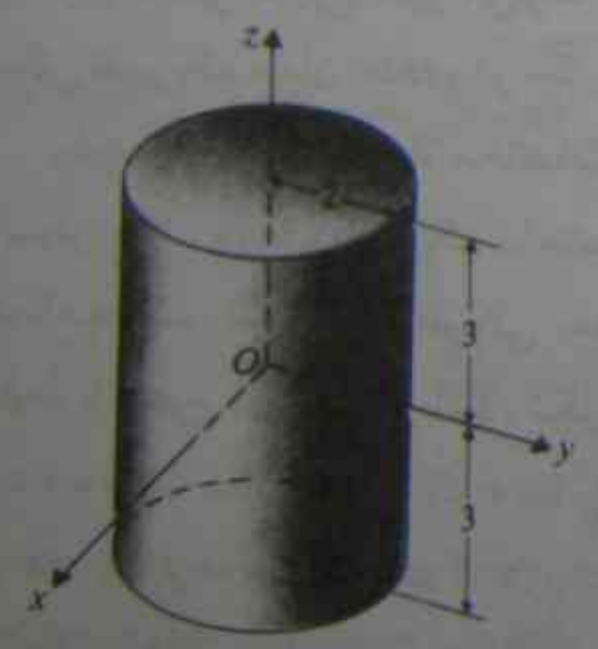
$$\int_{\text{بالایی}} F \cdot a_n ds = \int_0^{2\pi} \int_0^2 2k_r r dr d\phi = 12\pi k_r$$

ب) سطح پایینی، $z = -2$ ، $a_n = -a_z$.

$$\begin{aligned} F \cdot a_n &= -k_r z = 2k_r \\ ds &= r dr d\phi \end{aligned}$$

$$\int_{\text{پایینی}} F \cdot a_n ds = 12\pi k_r$$

که دقیقاً مانند انتگرال روی سطح بالایی است.



شکل ۲-۲۳ یک سطح استوانه‌ای (مثال ۱۵-۲)

پ) دیواره جانبی $a_n = a_r, r = r_0$

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{a}_n = \frac{k_1}{r} = \frac{k_1}{r_0}$$

از معادله ۲-۵۳ الف) $ds = r d\phi dz = r_0 d\phi dz$

$$\int_{\text{دیواره جانبی}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{a}_n ds = \int_{-r_0}^{r_0} \int_0^{2\pi} k_1 d\phi dz = 4\pi k_1 r_0$$

بنابراین

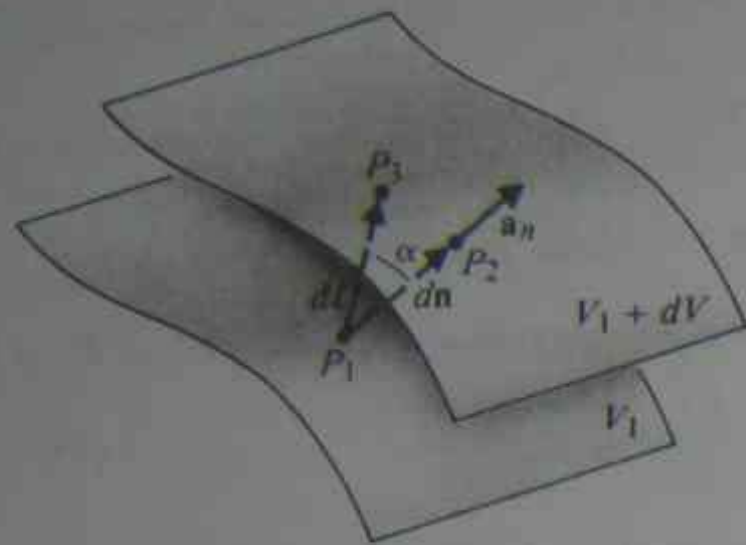
$$\oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 4\pi k_1 r_0 + 4\pi k_2 r_0 + 4\pi k_3 r_0 = 4\pi r_0 (k_1 + k_2 + k_3)$$

این انتگرال سطحی، شار خالص بیرون رونده بردار \mathbf{F} را از سطح بسته استوانه‌ای بدست می‌دهد.

۲-۶ گرادیان یک میدان عددی

در الکترومغناطیس، با کمیتی سروکار داریم که به زمان و مکان هر دو وابسته‌اند. چون سه متغیر مختصاتی در فضای سه‌بعدی وجود دارد، انتظار داریم که با میدانهای عددی و برداری مواجه باشیم که تابعی از چهار متغیر (t, u_1, u_2, u_3) باشند. به‌طورکلی، با تغییر هرکدام از چهار متغیر، میدان می‌تواند تغییر کند. اکنون، روشی را برای تعریف نرخ فضایی تغییرات یک میدان عددی در یک زمان معین، نشان خواهیم داد. مشتقات جزئی نسبت به سه متغیر مختصاتی فضایی وارد خواهند شد، و از آنجائی که نرخ تغییر می‌تواند در جهت‌های مختلف، متفاوت باشد، برای تعریف نرخ فضایی تغییر یک میدان عددی در مکان و زمان معین یک بردار مورد نیاز خواهد بود.

بیاید یک تابع عددی از مختصات فضایی، $V(u_1, u_2, u_3)$ را در نظر بگیریم که می‌تواند نمایشگر، مثلاً، توزیع دما در یک ساختمان، ارتفاع منطقه‌ای کوهستانی، یا پتانسیل الکتریکی در یک تاجه باشد. اندازه V ، به‌طورکلی، به‌موقعیت نقطه در فضا بستگی دارد، اما می‌تواند در طول خطوط یا سطح معینی ثابت باشد. شکل ۲-۲۴ دو سطح را نشان می‌دهد که روی آنها اندازه V ثابت و به‌ترتیب مقادیر $V_1 + dV$ و V_1 را داراست. که در اینجا dV تغییر کوچکی در V را نشان می‌دهد. باید توجه داشته باشیم که لازم نیست سطح V ثابت بر هیچ کدام از سطوحی که دستگاه مختصاتی خاصی را تعریف می‌کنند، منطبق باشد. نقطه P_1 بر سطح V_1 قرار دارد؛



شکل ۲-۲۴ در ارتباط با گرادیان یک مقدار عددی

P_2 ، نقطه متناظر بر روی سطح $V_1 + dV$ در امتداد بردار عمود dn ؛ و P_1 نقطه‌ای نزدیک به P_2 در امتداد بردار دیگر $dl \neq dn$ است. به‌ازای یک تغییر ثابت dV در V ، واضح است که نرخ تغییرات فضایی، dV/dl در امتداد dn بیشترین مقدار را دارد، زیرا dn ، کمترین فاصله بین دو صفحه است. \dagger از آنجائی که اندازه dV/dl به جهت dl بستگی دارد، dV/dl یک مشتق جهت‌دار است. برداری را که اندازه و جهت حداکثر نرخ فضایی افزایش یک کمیت عددی را نمایش می‌دهد؛ گرادیان آن کمیت عددی تعریف می‌کنیم. می‌نویسیم

$$\text{grad } V \triangleq \mathbf{a}_n \frac{dV}{dn} \quad (۲-۸۵)$$

برای اختصار، معمول است که از عملگر del با نماد ∇ استفاده شود و به‌جای $\text{grad } V$ نوشته شود: ∇V . از این رو

$$\nabla V \triangleq \mathbf{a}_n \frac{dV}{dn} \quad (۲-۸۶)$$

فرض کرده‌ایم که dV مثبت است (افزایش در V)؛ اگر dV منفی باشد (کاهش در V از P_1 به P_2)، ∇V در جهت \mathbf{a}_n منفی خواهد بود.

مشتق جهت‌دار در امتداد dl برابر است با

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dl} &= \frac{dV}{dn} \frac{dn}{dl} = \frac{dV}{dn} \cos \alpha \\ &= \frac{dV}{dn} \mathbf{a}_n \cdot \mathbf{a}_l = (\nabla V) \cdot \mathbf{a}_l \end{aligned} \quad (۲-۸۷)$$

\dagger در یک بررسی رسمی‌تر، تغییرات ΔV و Δl بکار می‌رود و کسر $\frac{\Delta V}{\Delta l}$ وقتی به مشتق $\frac{dV}{dl}$ تبدیل می‌شود که Δl به‌سوی صفر میل نماید، به‌دلیل سادگی از این رسمیت اجتناب کرده‌ایم.

معادله (۸۷-۲) بیان می‌کند که نرخ افزایش فضائی V در جهت a_r برابر تصویر (مؤلفه) گرادیان V در آن جهت است. معادله (۸۷-۲) را به صورت زیر نیز می‌توان نوشت:

$$dV = (\nabla V) \cdot d\ell \quad (۸۸-۲)$$

که در آن $d\ell = a_r dl$ حال، dV در معادله (۸۸-۲)، دیفرانسیل کلی V در نتیجه تغییر مکان (از P_1 به P_2 در شکل ۲-۲۴) است؛ و می‌تواند بر حسب تغییرات دیفرانسیلی مختصات بیان شود:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial \ell_1} d\ell_1 + \frac{\partial V}{\partial \ell_r} d\ell_r + \frac{\partial V}{\partial \ell_\varphi} d\ell_\varphi \quad (۸۹-۲)$$

که در آن $d\ell_1$ ، $d\ell_r$ و $d\ell_\varphi$ مؤلفه‌های جابجائی برداری دیفرانسیلی $d\ell$ در دستگاه مختصات انتخاب شده می‌باشند. بر حسب مختصات کلی متعامد منحنی الخط (u_1, u_r, u_φ) ، $d\ell$ (از معادله ۲-۳۱) برابر است با

$$d\ell = a_{u_1} du_1 + a_{u_r} du_r + a_{u_\varphi} du_\varphi = a_{u_1} (h_1 du_1) + a_{u_r} (h_r du_r) + a_{u_\varphi} (h_\varphi du_\varphi) \quad (۹۰-۲)$$

می‌توان dV در معادله (۸۹-۲) را به صورت ضرب داخلی دوبردار به صورت زیر نوشت:

$$dV = \left(a_{u_1} \frac{\partial V}{\partial \ell_1} + a_{u_r} \frac{\partial V}{\partial \ell_r} + a_{u_\varphi} \frac{\partial V}{\partial \ell_\varphi} \right) \cdot (a_{u_1} d\ell_1 + a_{u_r} d\ell_r + a_{u_\varphi} d\ell_\varphi) = \left(a_{u_1} \frac{\partial V}{\partial \ell_1} + a_{u_r} \frac{\partial V}{\partial \ell_r} + a_{u_\varphi} \frac{\partial V}{\partial \ell_\varphi} \right) \cdot d\ell \quad (۹۱-۲)$$

از مقایسه معادله (۹۱-۲) با معادله (۸۸-۲) بدست می‌آوریم

$$\nabla V = a_{u_1} \frac{\partial V}{\partial \ell_1} + a_{u_r} \frac{\partial V}{\partial \ell_r} + a_{u_\varphi} \frac{\partial V}{\partial \ell_\varphi} \quad (۹۲-۲)$$

یا

$$\nabla V = a_{u_1} \frac{\partial V}{h_1 \partial u_1} + a_{u_r} \frac{\partial V}{h_r \partial u_r} + a_{u_\varphi} \frac{\partial V}{h_\varphi \partial u_\varphi} \quad (۹۳-۲)$$

معادله (۹۳-۲)، فرمول مفیدی برای محاسبه گرادیان یک کمیت عددی است در صورتی که کمیت عددی به صورت تابعی از مختصات فضائی داده شده باشد.

در مختصات کارتزین، $(u_1, u_r, u_\varphi) = (x, y, z)$ و $h_1 = h_r = h_\varphi = 1$ داریم

$$\nabla V = a_x \frac{\partial V}{\partial x} + a_y \frac{\partial V}{\partial y} + a_z \frac{\partial V}{\partial z} \quad (۹۴-۲)$$

یا

$$\nabla V = \left(a_x \frac{\partial}{\partial x} + a_y \frac{\partial}{\partial y} + a_z \frac{\partial}{\partial z} \right) V \quad (۹۵-۲)$$

از نظر معادله (۹۵-۲)، راحت‌تر است که ∇ را در مختصات کارتزین به صورت عملگر برداری دیفرانسیلی زیر در نظر بگیریم:

$$\nabla \equiv a_x \frac{\partial}{\partial x} + a_y \frac{\partial}{\partial y} + a_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (۹۶-۲)$$

با ملاحظه معادله (۹۳-۲) ترغیب می‌شویم ∇ را در مختصات کلی متعامد چنین تعریف کنیم

$$\nabla \equiv \left(a_{u_1} \frac{\partial}{h_1 \partial u_1} + a_{u_r} \frac{\partial}{h_r \partial u_r} + a_{u_\varphi} \frac{\partial}{h_\varphi \partial u_\varphi} \right) \quad (۹۷-۲)$$

اما از انجام این کار باید خودداری نمود. درست است که این تعریف جواب صحیحی برای گرادیان یک کمیت عددی بدست می‌دهد، لیکن همین نماد ∇ به صورت متعارفی برای نمایش برخی از عملیات دیفرانسیلی یک بردار بکار رفته است (عملیات دیورژانس و کرل که بعداً در این فصل مورد توجه قرار خواهند گرفت). در این موارد، استفاده از معادله (۹۷-۲) برای عملگر ∇ در مختصات کلی متعامد نادرست خواهد بود.

مثال ۲-۱۶ شدت میدان الکتریکی ساکن E ، به صورت منهای گرادیان پتانسیل الکتریکی عددی V قابل دستیابی است. یعنی $E = -\nabla V$. E را در نقطه $(1, 1, 0)$ بیابید اگر

(الف) $V = E \cdot e^{-x} \sin \frac{\pi y}{4}$

(ب) $V = E \cdot R \cos \theta$

حل از معادله (۹۳-۲) برای محاسبه $E = \nabla V$ ، در قسمت (الف) از مختصات کارتزین و در قسمت (ب) از مختصات کروی استفاده می‌کنیم.

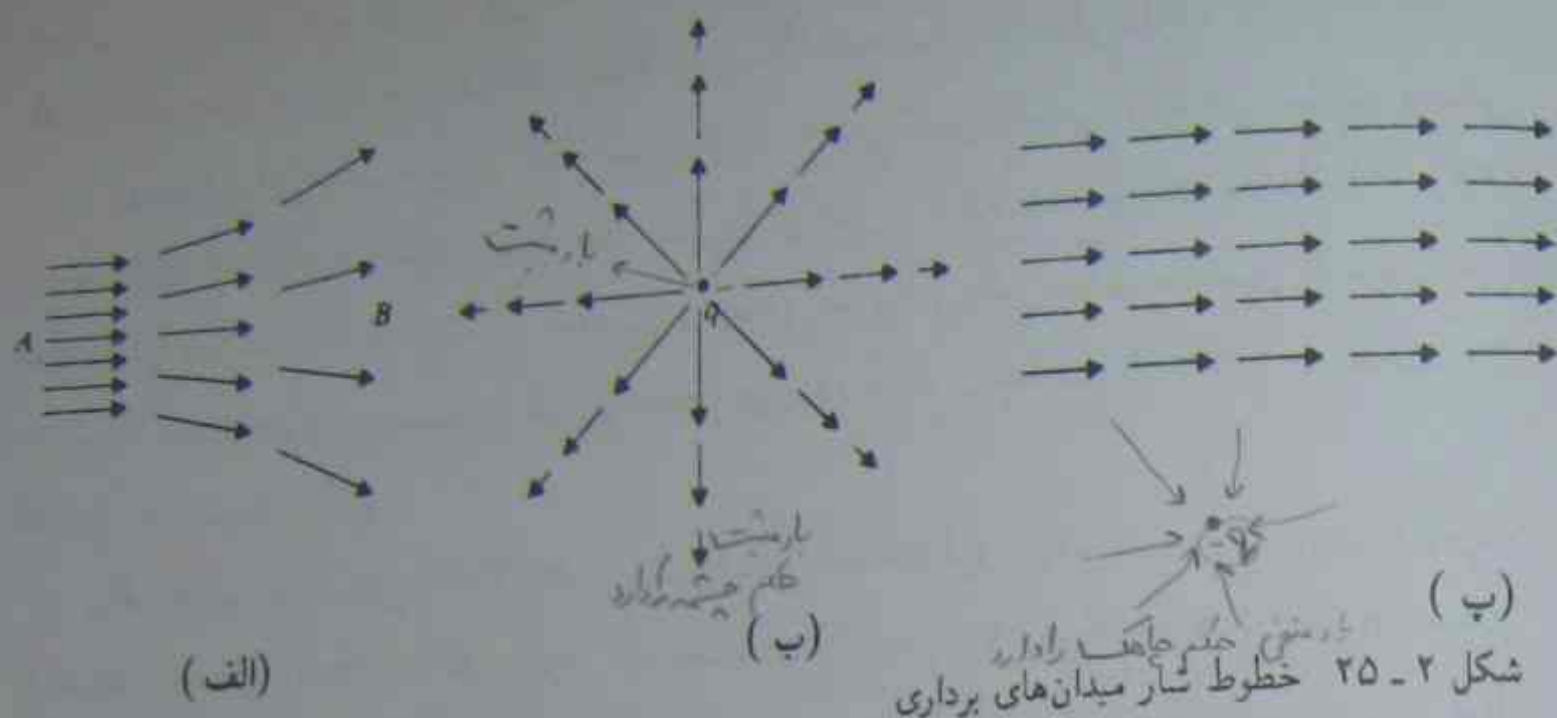
(الف)

$$E = - \left[a_x \frac{\partial}{\partial x} + a_y \frac{\partial}{\partial y} + a_z \frac{\partial}{\partial z} \right] E \cdot e^{-x} \sin \frac{\pi y}{4}$$

$$= \left(a_x \sin \frac{\pi y}{4} - a_y \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi y}{4} \right) E \cdot e^{-x}$$

$$E(1, 1, 0) = \left(a_x - a_y \frac{\pi}{4} \right) \frac{E}{\sqrt{2}e} = a_E E$$

از این رو،



شکل ۲-۲۵ خطوط شار میدان های برداری (ب) (الف)

شدت میدان بر روی شکل ۲-۲۵ (الف) با تعداد خطوط گذرنده از سطح واحد عمود بر بردار سنجیده می شود، شار یک میدان برداری مشابه جریان یک سیال غیرقابل تراکم مثل آب است. در حجمی با یک سطح بسته، تنها وقتی شار اضافی ورودی یا خروجی وجود خواهد داشت که این حجم به ترتیب دارای یک چاه یا یک منبع باشد. یعنی یک دیورژانس خالص مثبت، وجود یک منبع سیال در داخل حجم و یک دیورژانس خالص منفی، وجود یک چاه را مشخص می نماید. در نتیجه جریان خالص سیال در واحد حجم، سنجشی برای قدرت منبع در برگرفته شده می باشد. در میدان یکنواخت نشان داده شده در شکل ۲-۲۵ (ب) مقدار شار ورودی و خروجی مربوط به هر حجم بسته که شامل هیچ منبع یا چاهی نباشد، باهم برابر بوده، به دیورژانس صفر منجر می شود.

دیورژانس میدان برداری A ، در یک نقطه، یا به طور مخفف $div A$ ، را به صورت شار خالص خروجی A در واحد حجم، وقتی که این حجم حول نقطه به سمت صفر میل می کند، تعریف می کنیم:

$$div A \triangleq \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\oint_S A \cdot ds}{\Delta v} \quad (۲-۹۸)$$

صورت معادله (۲-۹۸) که نمایشگر شار خالص خروجی است، انتگرالی روی کل سطح S است که حجم را دربردارد. با این نوع انتگرال سطحی در مثال ۲-۱۵ مواجه شده ایم. معادله (۲-۹۸)

که در آن

$$E = \frac{E_0}{e} \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\pi^2}{16} \right)}$$

$$a_E = \frac{1}{\sqrt{1 + (\pi^2/16)}} \left(a_x - a_y \frac{\pi}{4} \right)$$

$$E = - \left[a_R \frac{\partial}{\partial R} + a_\theta \frac{\partial}{R \partial \theta} + a_\phi \frac{\partial}{R \sin \theta \partial \phi} \right] E_0 R \cos \theta \quad (ب)$$

$$= - (a_R \cos \theta - a_\theta \sin \theta) E_0$$

از نظر معادله (۷۷-۲)، نتیجه فوق بسیار ساده به $E = -a_z E_0$ در مختصات کارتزین تبدیل می شود. این مطلب تعجب آور نیست زیرا بررسی دقیق V داده شده آشکار می سازد که $E_0 R \cos \theta$ در واقع معادل $E_0 z$ است. در مختصات کارتزین،

$$E = -\nabla V = -a_z \frac{\partial}{\partial z} (E_0 z) = -a_z E_0$$

۷-۲ دیورژانس یک میدان برداری

در بخش قبل، مشتقات فضائی یک میدان عددی را در نظر گرفتیم که به تعریف گرادیان منجر گردید. حال توجه خود را به مشتقات فضائی یک میدان برداری معطوف می داریم. این کار به تعریف دیورژانس و کرل یک بردار منجر خواهد شد. مفهوم دیورژانس را در این بخش و مفهوم کرل را در بخش ۲-۹ بررسی می نماییم. هر دو آنها در مطالعه الکترومغناطیس بسیار اهمیت دارند.

در مطالعه میدانهای برداری، راحت تر است که تغییرات میدان را به صورت ترسیمی توسط خطوط و میدان جهت دار که خطوط شار یا خطوط جریانی نامیده می شوند، نمایش دهیم. اینها، خطوط یا منحنی های جهت داری هستند که در هر نقطه جهت میدان برداری را به صورت نشان داده شده در شکل ۲-۲۵ مشخص می کنند. اندازه میدان در یک نقطه به وسیله چگالی یا طول خطوط جهت دار در نزدیکی آن نقطه تعیین می گردد. شکل ۲-۲۵ (الف) نشان می دهد که میدان در ناحیه A قوی تر از میدان در ناحیه B است، زیرا چگالی زیادتری از خطوط جهت دار با طولهای مساوی در ناحیه A وجود دارد. در شکل ۲-۲۵ (ب)، طول های کم شونده پیکانها در محل های دورتر از نقطه q ، یک میدان شعاعی را نشان می دهد که در نزدیکترین ناحیه به q قوی ترین است. شکل ۲-۲۵ (پ)، یک میدان یکنواخت را نشان می دهد.

۲-۲ دیورانس یک میدان برداری

به صورت زیر بسط داده شود:

$$A_x \left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z \right) = A_x(x, y, z) + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial A_x}{\partial x} \Big|_{(x, y, z)} + \dots \quad (101-2)$$

که در آن، جملات مرتبه بالاتر (ج. م. ب.) شامل ضرایب $(\Delta x/2)^2, (\Delta x/2)^3$ و غیره است. به طور مشابه، در وجه عقبی،

$$\int_{\text{وجه عقبی}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \mathbf{A} \cdot \text{وجه عقبی} \cdot \Delta s = \mathbf{A} \cdot (-\mathbf{a}_x \Delta y \Delta z) \quad (102-2)$$

$$= -A_x \left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z \right) \Delta y \Delta z$$

بسط سری تیلور $A_x \left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z \right)$ برابر است با

$$A_x \left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z \right) = A_x(x, y, z) - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial A_x}{\partial x} \Big|_{(x, y, z)} + \dots \quad (103-2)$$

با جایگذاری معادله (101-2) در معادله (100-2) و معادله (103-2) در معادله (102-2) و جمع اثرات خواهیم داشت

$$\left[\int_{\text{وجه جلو}} + \int_{\text{وجه عقبی}} \right] \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \dots \right) \Big|_{(x, y, z)} \Delta x \Delta y \Delta z \quad (104-2)$$

در اینجا یک Δx از ج. م. ب. معادلات (101-2) و (103-2) فاکتورگیری شده، ولی تمام جملات موجود در ج. م. ب. معادله (104-2) هنوز دارای توان‌هایی از Δx هستند.

با پیروی از همین روش در مورد وجوه راست و چپ، که در آن تغییرات مختصاتی به ترتیب $+\Delta y/2$ و $-\Delta y/2$ هستند و $\Delta s = \Delta x \Delta z$ خواهیم داشت

$$\left[\int_{\text{وجه چپ}} + \int_{\text{وجه راست}} \right] \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \left(\frac{\partial A_y}{\partial y} + \dots \right) \Big|_{(x, y, z)} \Delta x \Delta y \Delta z \quad (105-2)$$

در اینجا جملات مرتبه بالاتر شامل Δy ، $(\Delta y)^2$ و غیره است. در مورد وجوه بالا و پایین داریم

$$\left[\int_{\text{وجه بالا}} + \int_{\text{وجه پایین}} \right] \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial z} + \dots \right) \Big|_{(x, y, z)} \Delta x \Delta y \Delta z \quad (106-2)$$

که در آن جملات مرتبه بالاتر شامل Δz ، $(\Delta z)^2$ و غیره است. اکنون نتایج حاصل از معادلات (104-2)، (105-2) و (106-2) در معادله (99-2) با هم ترکیب شده و نتیجه می‌دهند:

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \Big|_{(x, y, z)} \Delta x \Delta y \Delta z + \dots$$

جملات مرتبه بالاتر از $+\Delta z, \Delta y, \Delta x$

۲ آنالیز برداری

تعریف کلی $\text{div } \mathbf{A}$ است: کمیتی عددی که اندازه‌اش از نقطه‌ای به نقطه دیگر تغییر می‌کند، همان طوری که خود \mathbf{A} تغییر می‌کند. این تعریف برای هر دستگاه مختصاتی صادق است؛ البته عبارت $\text{div } \mathbf{A}$ همچون عبارت مربوط به \mathbf{A} به انتخاب دستگاه مختصات بستگی دارد.

در ابتدای این بخش، با این جمله شروع کردیم که دیورانس یک بردار، نوعی مشتق فضایی است. شاید خواننده در مورد حضور یک انتگرال در عبارت داده شده توسط معادله (98-2) تعجب کرده باشد؛ اما یک انتگرال سطحی دوبعدی تقسیم بر یک حجم سه‌بعدی با میل کردن حجم به سمت صفر، به مشتقات فضایی منجر می‌گردد. اکنون عبارت $\text{div } \mathbf{A}$ را در مختصات کارتزین بدست می‌آوریم.

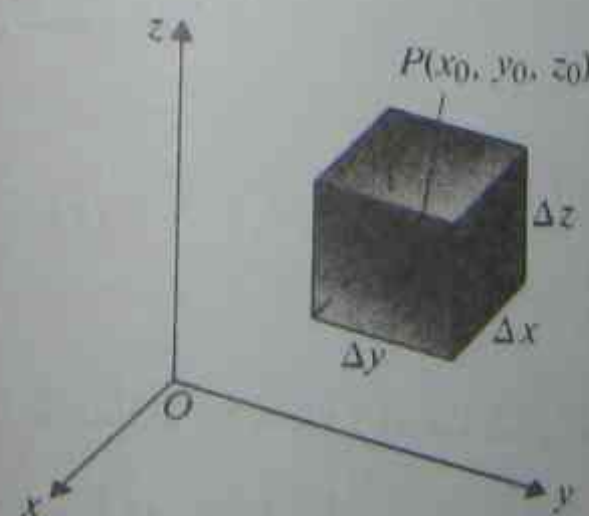
یک حجم دیفرانسیلی با اضلاع $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ را با نقطه مرکزی $P(x_0, y_0, z_0)$ در میدان بردار $\mathbf{A} = a_x A_x + a_y A_y + a_z A_z$ ، در نظر بگیرید. در مختصات کارتزین، چون حجم دیفرانسیلی شش وجه دارد، انتگرال سطحی $\text{div } \mathbf{A}$ را در نقطه (x_0, y_0, z_0) بیابیم. چون حجم دیفرانسیلی شش وجه دارد، انتگرال سطحی صورت معادله (98-2) به شش قسمت قابل تجزیه است.

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \left[\int_{\text{وجه پایین}} + \int_{\text{وجه بالا}} + \int_{\text{وجه چپ}} + \int_{\text{وجه راست}} + \int_{\text{وجه عقبی}} + \int_{\text{وجه جلویی}} \right] \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \quad (99-2)$$

روی وجه جلویی

$$\int_{\text{وجه جلویی}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \mathbf{A} \cdot \text{وجه جلویی} \cdot \Delta s_{\text{جلویی}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_x (\Delta y \Delta z) = A_x \left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z \right) \Delta y \Delta z \quad (100-2)$$

کمیت $A_x \left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z \right)$ می‌تواند به صورت سری تیلور حول مقدار خود در (x_0, y_0, z_0)



شکل ۲-۲۶ یک حجم دیفرانسیلی در مختصات کارتزین

چون $\Delta v = \Delta x \Delta y \Delta z$ ، جایگذاری معادله (۲-۱۰۷) در معادله (۲-۱۸) عبارت $\text{div } \mathbf{A}$ را در مختصات کارتزین نتیجه می‌دهد:

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (2-108)$$

جملات مرتبه بالاتر، با نزدیک صفر شدن حجم دیفرانسیلی $\Delta x \Delta y \Delta z$ ، حذف خواهند شد. در حالت کلی، مقدار $\text{div } \mathbf{A}$ به محل نقطه‌ای که در آن محاسبه می‌شود بستگی دارد. ما نماد (x, y, z) در معادله (۲-۱۰۸) را حذف کرده‌ایم زیرا این معادله در مورد هر نقطه‌ای که \mathbf{A} و مشتقات جزئی آن تعریف شده باشند، صادق است.

با استفاده از عملگر دیفرانسیلی برداری ∇ ، del ، تعریف شده با معادله (۲-۹۶) در مورد مختصات کارتزین، معادله (۲-۱۰۸) به صورت دیگر $\nabla \cdot \mathbf{A}$ نیز قابل نوشتن است. هر چند که نماد $\nabla \cdot \mathbf{A}$ از روی عادت برای نمایش $\text{div } \mathbf{A}$ در تمام دستگاههای مختصاتی بکار رفته است، یعنی

$$\nabla \cdot \mathbf{A} \equiv \text{div } \mathbf{A} \quad (2-109)$$

باید بخاطر داشته باشیم که در تمام مختصات، بجز مختصات کارتزین، ∇ تنها یک نماد است و نه یک عملگر دیفرانسیلی به یک شکل ثابت.

در مختصات متعامد کلی منحنی الخط (u_1, u_2, u_3) معادله (۲-۹۸) به معادله زیر منجر می‌گردد:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} (h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial u_2} (h_1 h_3 A_2) + \frac{\partial}{\partial u_3} (h_1 h_2 A_3) \right] \quad (2-110)$$

مثال ۱۷-۲ دیورژانس بردار مکانی یک نقطه دلخواه را بیابید.

حل جواب را در مختصات کارتزین و همچنین کروی پیدا می‌کنیم.

الف) مختصات کارتزین. عبارت بردار مکانی در نقطه دلخواه (x, y, z) برابر است با

$$\vec{OP} = a_x x + a_y y + a_z z \quad (2-111)$$

با استفاده از معادله (۲-۱۰۸)، داریم

$$\nabla \cdot (\vec{OP}) = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$$

ب) مختصات کروی. در اینجا بردار مکانی تنها

$$\vec{OP} = a_R R \quad (2-112)$$

است. دیورژانس آن در مختصات کروی (R, θ, ϕ) از معادله (۲-۱۱۰) با استفاده از جدول ۱-۲ به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} (R^2 A_R) + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta \sin \theta) + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \quad (2-113)$$

با جایگذاری معادله (۲-۱۱۲) در معادله (۲-۱۱۳)، دوباره مطابق انتظار خواهیم داشت:

$$\nabla \cdot (\vec{OP}) = 3$$

مثال ۱۸-۲ چگالی شار مغناطیسی \mathbf{B} در بیرون یک سیم بسیار طویل حامل جریان به صورت دایره‌ای و متناسب با معکوس فاصله از محور سیم می‌باشد. $\nabla \cdot \mathbf{B}$ را بیابید.

حل فرض کنید سیم طویل بر محور z در دستگاه مختصات استوانه‌ای منطبق باشد. مسئله بیان می‌دارد که:

$$\mathbf{B} = a_\phi \frac{k}{r}$$

دیورژانس میدان برداری در مختصات استوانه‌ای (r, ϕ, z) را می‌توان از معادله (۲-۱۱۰) بدست آورد:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \quad (2-114)$$

اکنون $B_r = B_z = 0$ و $B_\phi = k/r$. معادله (۲-۱۱۴) نتیجه می‌دهد

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

در اینجا برداری داریم که ثابت نیست ولی دیورژانس آن صفر است. این ویژگی نشان می‌دهد که خطوط شار در یکدیگر بسته می‌شوند و دیگر اینکه منبع یا چاه مغناطیسی وجود ندارد. یک میدان بدون دیورژانس را یک میدان سلونوئیدی می‌نامند. بعداً در این کتاب، مطالب بیشتری راجع به این نوع میدانها گفته خواهد شد.

۸-۲ قضیه دیورژانس

در بخش پیشین دیورژانس یک میدان برداری را به صورت شار خالص خروجی در واحد حجم تعریف کردیم. ممکن است به طور حسی انتظار داشته باشیم که انتگرال حجمی دیورژانس یک میدان برداری با شار کل خروجی بردار از سطح در برگیرنده حجم برابر باشد؛ یعنی،

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dv = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \quad (۲-۱۱۵)$$

این اتحاد که در پاراگراف بعدی اثبات خواهد شد، قضیه دیورژانس نام دارد. این قضیه در مورد هر حجم V که توسط سطح S محصور است، بکار می‌رود. جهت ds همیشه عمود و به سمت بیرون است. یعنی عمود بر سطح ds و در جهت خارج حجم می‌باشد.

در مورد جزء کوچک حجمی دیفرانسیلی Δv_j که توسط سطح s_j محصور شده است، تعریف $\nabla \cdot \mathbf{A}$ در معادله (۲-۱۱۸) مستقیماً چنین نتیجه می‌دهد

$$(\nabla \cdot \mathbf{A})_j \Delta v_j = \oint_{s_j} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \quad (۲-۱۱۶)$$

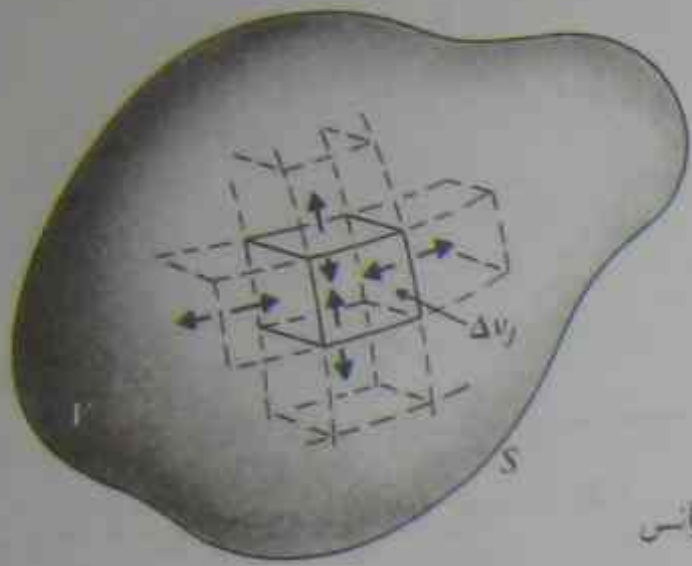
در مورد حجم دلخواه V ، می‌توان آن را به تعداد زیادی، مثلاً N ، حجم دیفرانسیلی کوچک که Δv_j یک نمونه از آنهاست، تقسیم نمود. این را در شکل ۲-۲۷ می‌بینید. اکنون سهم هر یک از این حجم‌های دیفرانسیلی را در دو طرف معادله (۲-۱۱۶) باهم ترکیب می‌کنیم. داریم

$$\lim_{\Delta v_j \rightarrow 0} \left[\sum_{j=1}^N (\nabla \cdot \mathbf{A})_j \Delta v_j \right] = \lim_{\Delta v_j \rightarrow 0} \left[\sum_{j=1}^N \oint_{s_j} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \right] \quad (۲-۱۱۷)$$

سمت چپ معادله (۲-۱۱۷)، طبق تعریف، انتگرال حجمی $\nabla \cdot \mathbf{A}$ است:

$$\lim_{\Delta v_j \rightarrow 0} \left[\sum_{j=1}^N (\nabla \cdot \mathbf{A})_j \Delta v_j \right] = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{A}) dv \quad (۲-۱۱۸)$$

انتگرال‌های سطحی سمت راست معادله (۲-۱۱۷)، روی کل وجوه تمام اجزاء کوچک حجمی دیفرانسیلی با هم جمع می‌شوند. اما سهم‌های سطوح داخلی اجزاء کوچک مجاور یکدیگر را خنثی می‌کنند؛ زیرا در یک سطح داخلی مشترک، عمودهای به سمت بیرون اجزاء کوچک همسایه به جهت‌های مخالف هم اشاره دارند. از این رو، سهم خالص سمت راست معادله (۲-۱۱۷)، تنها آن نسیه‌گوس نیز نامیده می‌شود.



شکل ۲-۲۷ حجم تقسیم‌شده برای اثبات قضیه دیورژانس

به سطح خارجی S که حجم V را احاطه کرده است مربوط می‌گردد؛ یعنی،

$$\lim_{\Delta v_j \rightarrow 0} \left[\sum_{j=1}^N \oint_{s_j} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \right] = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \quad (۲-۱۱۹)$$

جایگذاری معادلات (۲-۱۱۸) و (۲-۱۱۹) در معادله (۲-۱۱۷)، قضیه دیورژانس در معادله (۲-۱۱۵) را نتیجه می‌دهد.

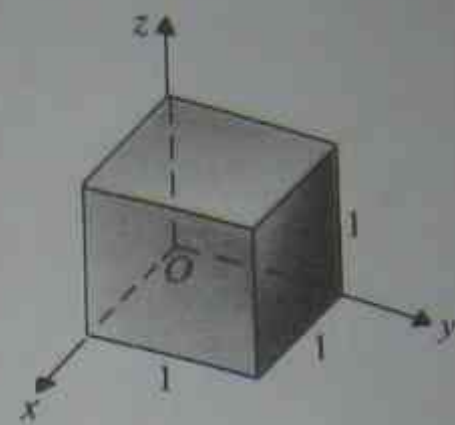
اعتبار فرآیند حدگیری که به اثبات قضیه دیورژانس منجر گردید، لازم می‌دارد که میدان برداری \mathbf{A} و همین طور مشتقات اول آن موجود بوده، هم در V و هم روی S پیوسته باشند. قضیه دیورژانس، اتحاد مهمی در آنالیز برداری است. این قضیه، انتگرال حجمی دیورژانس یک بردار را به انتگرال سطح بسته یک بردار تبدیل می‌نماید و برعکس. این قضیه را اغلب در پی‌ریزی قضایا و دیگر روابط الکترومغناطیس بکار خواهیم برد. متذکر می‌شویم که اگرچه برای سادگی تنها یک علامت انتگرال در دو طرف معادله (۲-۱۱۵) بکار رفته است، انتگرال‌های حجمی و سطحی به ترتیب نمایشگر انتگرال‌گیری‌های سه‌گانه و دوگانه هستند.

مثال ۲-۱۹ $\mathbf{A} = a_x x^2 + a_y xy + a_z yz$ داده شده است. قضیه دیورژانس را روی یک مکعب با ضلع واحد تحقیق نمایید. این مکعب در یک هشتم اول دستگاه مختصات کارتزین قرار داشته، یک رأس آن در مبدأ است.

حل به شکل ۲-۲۸ مراجعه کنید. نخست انتگرال سطحی را روی شش وجه محاسبه می‌کنیم.

۱- وجه روبرو: $x = 1$ ، $ds = a_x dy dz$ ؛

$$\int_{\text{وجه روبرو}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 \int_0^1 dy dz = 1$$



شکل ۲-۲۸ مکعب واحد (مثال ۲-۱۱)

۲- وجه عقبی: $x = 0$: $ds = -a_x dy dz$

$$\int_{\text{وجه عقبی}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

۳- وجه چپ: $y = 0$: $ds = -a_y dx dz$

$$\int_{\text{وجه چپ}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

۴- وجه راست: $y = 1$: $ds = a_y dx dz$

$$\int_{\text{وجه راست}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 \int_0^1 x dx dz = \frac{1}{2}$$

۵- وجه بالا: $z = 1$: $ds = a_z dx dy$

$$\int_{\text{وجه بالا}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 \int_0^1 y dx dy = \frac{1}{2}$$

۶- وجه پایین: $z = 0$: $ds = -a_z dx dy$

$$\int_{\text{وجه پایین}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

از جمع شش مقدار فوق داریم:

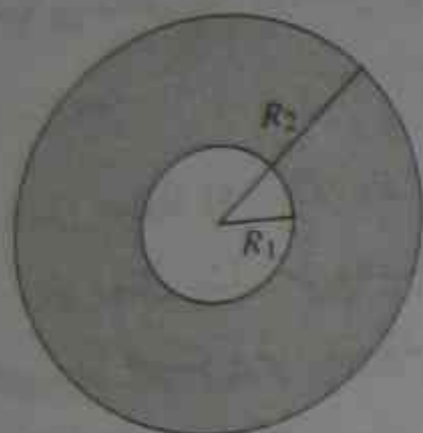
$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = 1 + 0 + 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0 = 2 \quad (2-112)$$

اکنون دیورژانس \mathbf{A} برابر است با

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2) + \frac{\partial}{\partial y}(xy) + \frac{\partial}{\partial z}(yz) = 2x + y$$

از این رو

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dv = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (2x + y) dx dy dz = 2 \quad (2-113)$$



شکل ۲-۲۹ یک ناحیه پوسته‌ای کروی (مثال ۲-۲۰)

که همان نتیجه انتگرال سطح بسته در (۲-۱۲۰) است. بنابراین قضیه دیورژانس تحقیق شده است.

مثال ۲-۲۰ $\mathbf{F} = a_R kR$ داده شده است. اعتبار قضیه دیورژانس را در مورد ناحیه پوسته‌ای محصور به سطوح کروی در $R = R_1$ و $R = R_2$ ($R_2 > R_1$) به مرکز مبدأ مختصات. مطابق شکل ۲-۲۹ تحقیق نمایید.

حل در اینجا ناحیه مشخص شده دارای دو سطح در $R = R_1$ و $R = R_2$ است.

در سطح بیرونی: $R = R_2$ و $ds = a_R R_2^2 \sin \theta d\theta d\phi$

$$\int_{\text{سطح بیرونی}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (kR_2) R_2^2 \sin \theta d\theta d\phi = 4\pi k R_2^3$$

در سطح درونی: $R = R_1$: $ds = -a_R R_1^2 \sin \theta d\theta d\phi$

$$\int_{\text{سطح درونی}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = - \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (kR_1) R_1^2 \sin \theta d\theta d\phi = -4\pi k R_1^3$$

درواقع چون مورد انتگرال‌گیری در هر دو حالت مستقل از θ یا ϕ است، انتگرال یک ثابت روی یک سطح کروی، بسادگی حاصلضرب آن ثابت در مساحت سطح خواهد بود ($4\pi R_2^2$ در سطح بیرونی و $4\pi R_1^2$ در سطح درونی). و به انتگرال‌گیری نیازی نیست. با جمع دو نتیجه داریم:

$$\oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 4\pi k (R_2^3 - R_1^3) \quad (2-122)$$

برای یافتن انتگرال حجمی، نخست $\nabla \cdot \mathbf{F}$ را برای \mathbf{F} ای که تنها دارای مؤلفه F_R است، تعیین

می‌کنیم. از معادله (۲-۱۱۳) داریم

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} (R^2 F_R) = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} (kR^3) = 3k$$

چون $\nabla \cdot \mathbf{F}$ یک ثابت است، انتگرال حجمی آن برابر حاصلضرب ثابت و حجم است. حجم ناحیه پوسته‌ای بین دو سطح کروی به شعاعهای R_1 و R_2 برابر $\frac{4\pi}{3}(R_2^3 - R_1^3)$ است. بنابراین،

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dv = (\nabla \cdot \mathbf{F})V = 4\pi k(R_2^3 - R_1^3) \quad (122-2)$$

که همان معادله (۱۲۲-۲) است. این مثال نشان می‌دهد که قضیه دیورژانس حتی در مواردی که حجم دارای سوراخ‌های درونی نیز هست برقرار می‌باشد - یعنی حتی وقتی که حجم توسط یک سطح چندگانه بهم پیوسته محصور است.

۹-۲ کرل یک میدان برداری

در بخش ۲-۷ بیان گردید که شار خالص خروجی بردار \mathbf{A} از سطحی که حجمی را احاطه کرده است نمایشگر وجود یک منبع می‌باشد. این منبع، ممکن است یک منبع جریان نامیده شود و $\text{div } \mathbf{A}$ سنجشی از قدرت منبع جریان است. نوع دیگری از منبع، به نام منبع گردایی^۱ وجود دارد که باعث گردش یک میدان برداری به دور آن می‌گردد. گردش خالص (یا فقط گردش^۲) یک میدان برداری به دور یک مسیر بسته، به عنوان انتگرال عددی خطی بردار، روی آن مسیر تعریف می‌شود. داریم

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \triangleq \text{گردش } \mathbf{A} \text{ بدور مسیر } C \quad (124-2)$$

معادله (۱۲۴-۲) یک تعریف ریاضی است. معنای فیزیکی گردش به نوع میدانی که بردار \mathbf{A} نمایش می‌دهد بستگی دارد. اگر \mathbf{A} نیروی وارد بر یک جسم باشد، گردش آن، کار انجام شده توسط نیرو، برای یک بار حرکت دادن جسم به دور مسیر خواهد بود؛ اگر \mathbf{A} نمایش دهنده شدت میدان الکتریکی باشد، آنگاه گردش، به طوری که بعداً در این کتاب خواهیم دید، نیروی الکتروموتوری در طول مسیر بسته خواهد بود. پدیده آشنای چرخش رو به پایین آب از تخلیه‌گاه دستشویی مثالی از یک چاه گردایی است که باعث گردش سرعت سیال می‌شود. گردش \mathbf{A} ممکن است موجود باشد حتی اگر $\text{div } \mathbf{A} = 0$ باشد (وقتی که منبع جریان وجود ندارد).

چون گردش تعریف شده در معادله (۱۲۴-۲) انتگرال خطی یک حاصلضرب داخلی است، مقدار آن بوضوح به جهت مسیر C نسبت به بردار \mathbf{A} وابسته است. برای تعریف یک تابع

۱- Flow source

۲- Vortex source

۳- Circulation

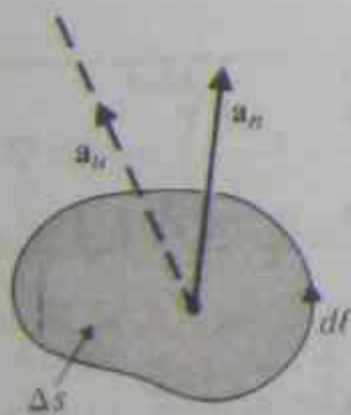
۴- Contour

نقطه‌ای، که سنجشی از قدرت منبع گردایی باشد، باید C را بسیار کوچک کرده و آن را در جهتی قرار دهیم که گردش حداکثر مقدار را داشته باشد. تعریف می‌کنیم^۱:

$$\text{curl } \mathbf{A} \equiv \nabla \times \mathbf{A} \triangleq \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta s} \left[\mathbf{a}_n \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \right]_{\max} \quad (125-2)$$

معادله (۱۲۵-۲) بیانگر این مطلب است که کرل میدان برداری \mathbf{A} ، که با $\text{curl } \mathbf{A}$ یا $\nabla \times \mathbf{A}$ نمایش داده می‌شود، برداری است که اندازه آن حداکثر گردش خالص \mathbf{A} در واحد سطح است وقتی که سطح به سوی صفر میل می‌کند و جهت آن جهت عمود سطح است زمانی که سطح طوری جهت داده شده باشد که گردش خالص را حداکثر نماید. چون عمود بر یک سطح می‌تواند به دو جهت مخالف اشاره نماید، به قاعده دست راست متوسل می‌شویم. به طوری که وقتی انگشتان دست راست جهت $d\mathbf{l}$ را دنبال می‌کنند، شست به جهت \mathbf{a}_n اشاره نماید. این را در شکل ۲-۳۰ ملاحظه می‌نمایید. $\text{curl } \mathbf{A}$ یک تابع برداری و نقطه‌ای است و به طور قراردادی به صورت $\nabla \times \mathbf{A}$ (del ضربدر \mathbf{A}) نوشته می‌شود. هر چند که بجز در مختصات کارتزین^۲ نباید به صورت یک عملگر برداری در نظر گرفته شود. مؤلفه $\nabla \times \mathbf{A}$ در هر جهت دیگر \mathbf{a}_u برابر است با $(\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{a}_u$ ، که می‌تواند از روی گردش در واحد سطح عمود بر \mathbf{a}_u وقتی که سطح به سوی صفر میل می‌نماید، تعیین شود.

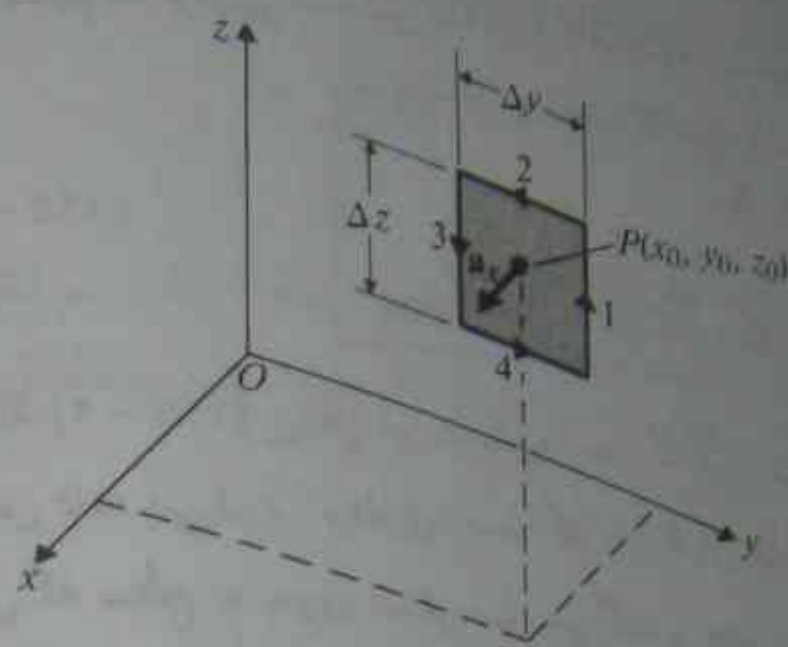
$$(\nabla \times \mathbf{A})_u = \mathbf{a}_u \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = \lim_{\Delta S_u \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S_u} \left(\oint_{C_u} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \right) \quad (126-2)$$



شکل ۲-۳۰ رابطه میان \mathbf{a}_n و $d\mathbf{l}$ در تعریف کرل

^۱ در کتب منتشره در اروپا، کرل \mathbf{A} اغلب روتاسیون^۱ \mathbf{A} خوانده شده و به صورت $\text{rot } \mathbf{A}$ نوشته می‌شود.

۱- Rotation



شکل ۲-۳۱ تعیین $(\nabla \times \mathbf{A})_x$

که در آن جهت انتگرال گیری خطی به دور مسیر C_u که سطح ΔS_u را احاطه کرده است و جهت a_u از قاعده دست راست پیروی می کنند.

اکنون از معادله (۲-۲۶) برای یافتن سه مؤلفه $\nabla \times \mathbf{A}$ در مختصات کارتزین استفاده می کنیم. به شکل ۲-۳۱ مراجعه کنید که در آن سطح دیفرانسیلی مستطیلی به موازات صفحه yz به اضلاع Δy و Δz حول نقطه نمونه $P(x_0, y_0, z_0)$ ترسیم گشته است. داریم $a_u = a_x$ و $\Delta S_u = \Delta y \Delta z$ و مسیر C_u شامل ۴ ضلع ۱، ۲، ۳، ۴ است. از این رو:

$$(\nabla \times \mathbf{A})_x = \lim_{\Delta y \Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta y \Delta z} \left(\oint_{\text{اضلاع } 1,2,3,4} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \right) \quad (2-127)$$

در مختصات کارتزین $\mathbf{A} = a_x A_x + a_y A_y + a_z A_z$. سهم چهار وجه در انتگرال خطی عبارتند از:

$$\text{ضلع ۱: } d\mathbf{l} = a_z \Delta z, \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = A_z \left(x_0, y_0 + \frac{\Delta y}{2}, z_0 \right) \Delta z$$

که در آن $A_z \left(x_0, y_0 + \frac{\Delta y}{2}, z_0 \right)$ به صورت سری تیلور بسط داده می شود:

$$A_z \left(x_0, y_0 + \frac{\Delta y}{2}, z_0 \right) = A_z(x_0, y_0, z_0) + \frac{\Delta y}{2} \frac{\partial A_z}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0, z_0)} + \dots \quad (2-128)$$

که در آن ج.م.ب دارای عوامل $(\Delta y)^2$ ، $(\Delta y)^3$ و غیره است. از این رو:

$$\int_{\text{ضلع ۱}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \left\{ A_z(x_0, y_0, z_0) + \frac{\Delta y}{2} \frac{\partial A_z}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0, z_0)} + \dots \right\} \Delta z \quad (2-129)$$

$$\text{ضلع ۳: } d\mathbf{l} = -a_z \Delta z, \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = A_z \left(x_0, y_0 - \frac{\Delta y}{2}, z_0 \right) \Delta z$$

که در آن

$$A_z \left(x_0, y_0 - \frac{\Delta y}{2}, z_0 \right) = A_z(x_0, y_0, z_0) - \frac{\Delta y}{2} \frac{\partial A_z}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0, z_0)} + \dots \quad (2-130)$$

$$\int_{\text{ضلع ۳}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \left\{ A_z(x_0, y_0, z_0) - \frac{\Delta y}{2} \frac{\partial A_z}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0, z_0)} + \dots \right\} (-\Delta z) \quad (2-131)$$

ترکیب معادلات (۲-۱۲۹) و (۲-۱۳۱) نتیجه می دهد:

$$\int_{\text{اضلاع } 1,2,3,4} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} + \dots \right) \Delta y \Delta z \quad (2-132)$$

ج.م.ب. در معادله (۲-۱۳۲) هنوز شامل توان هائی از Δy است. به طور مشابه می توان نشان داد

$$\int_{\text{اضلاع } 1,2,3,4} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \left(-\frac{\partial A_y}{\partial z} + \dots \right) \Delta y \Delta z \quad (2-133)$$

جایگذاری معادلات (۲-۱۳۲) و (۲-۱۳۳) در معادله (۲-۱۲۷) و توجه به اینکه جملات مرتبه بالاتر با $\Delta y \rightarrow 0$ به سمت صفر میل می نمایند، مؤلفه x $\nabla \times \mathbf{A}$ را به صورت زیر به دست می آوریم:

$$(\nabla \times \mathbf{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \quad (2-134)$$

بررسی دقیق معادله (۲-۱۳۴) یک ترتیب چرخشی را در x, y, z آشکار می سازد و ما را قادر می کند که از روی آن بتوانیم مؤلفه های y و z را برای $\nabla \times \mathbf{A}$ بنویسیم. عبارت کامل کرل \mathbf{A} در مختصات کارتزین عبارت است از

$$\nabla \times \mathbf{A} = a_x \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + a_y \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + a_z \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \quad (2-135)$$

در مقایسه با عبارت $\nabla \cdot \mathbf{A}$ در معادله (۲-۱۰۸)، معادله (۲-۱۳۵) در مورد $\nabla \times \mathbf{A}$ همان طوری که انتظار می رفت، پیچیده تر است زیرا کرل برداری با سه مؤلفه می باشد، در حالی که $\nabla \cdot \mathbf{A}$ یک کمیت عددی است. خوشبختانه معادله (۲-۱۳۵) را می توان با استفاده از شکل دترمینانی آن، به صورت ضرب خارجی نشان داده شده در معادله (۲-۴۲) به شکل ساده ای بخاطر سپرد.

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \quad (136-2)$$

استخراج $\nabla \times \mathbf{A}$ در دستگاه‌های مختصات دیگر، از همین روش پیروی می‌کند، لیکن قدری پیچیده‌تر است زیرا در مختصات منحنی الخط نه تنها \mathbf{A} ، بلکه $d\ell$ نیز به هنگام انتگرال‌گیری $\mathbf{A} \cdot d\ell$ روی اضلاع مقابل مستطیل منحنی الخط تغییر اندازه می‌دهد. عبارت $\nabla \times \mathbf{A}$ در مختصات متعامد کلی منحنی الخط (u_1, u_2, u_3) ، به صورت زیر داده می‌شود:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} a_{u_1} h_1 & a_{u_2} h_2 & a_{u_3} h_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix} \quad (137-2)$$

از معادله (137-2) پیداست که در اینجا نماد ∇ را به صورت یک عملگر نمی‌توان چنان نشان داد که $\nabla \times \mathbf{A}$ یک حاصلضرب خارجی باشد. عبارت $\nabla \times \mathbf{A}$ در مختصات استوانه‌ای و کروی ساده‌گی از روی معادله (137-2) و بکارگیری مقادیر مناسب u_1, u_2, u_3 و ضرایب متریک آنها، h_1, h_2, h_3 حاصل می‌گردند، و در جدول ۱-۲ درج شده‌اند.

مثال ۲۱-۲ نشان دهید $\nabla \times \mathbf{A} = 0$ ، اگر

الف) $\mathbf{A} = a_\phi(k/r)$ در مختصات استوانه‌ای، که در آن k یک ثابت است، یا

ب) $\mathbf{A} = a_R f(R)$ در مختصات کروی که در آن $f(R)$ هر تابعی از فاصله شعاعی R است.

حل

الف) در مختصات استوانه‌ای مقادیر زیر بکار می‌روند: $(r, \phi, z) = (u_1, u_2, u_3)$ و $h_1 = r, h_2 = 1, h_3 = 1$ از معادله (137-2) داریم

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} a_r & a_\phi r & a_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_r & r A_\phi & A_z \end{vmatrix} \quad (138-2)$$

که در مورد \mathbf{A} داده شده چنین نتیجه می‌دهد.

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} a_r & a_\phi r & a_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \cdot & k & \cdot \end{vmatrix} = 0$$

۱۰-۲ قضیه استوکس

ب) در مختصات کروی، مقادیر زیر بکار می‌روند: $(R, \theta, \phi) = (u_1, u_2, u_3)$ و $h_1 = R, h_2 = R \sin \theta$ از این رو،

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{R^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} a_R & a_\theta R & a_\phi R \sin \theta \\ \frac{\partial}{\partial R} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ A_R & R A_\theta & R \sin \theta A_\phi \end{vmatrix} \quad (139-2)$$

و در مورد \mathbf{A} داده شده

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{R^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} a_R & a_\theta R & a_\phi R \sin \theta \\ \frac{\partial}{\partial R} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ f(R) & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = 0$$

یک میدان برداری بدون کرل، میدان غیرگردشی یا میدان ذخیره شونده نامیده می‌شود. در فصل آینده خواهیم دید که میدان الکتریکی ساکن، غیرگردشی (یا ابقائی) است. روابط مربوط به $\nabla \times \mathbf{A}$ در معادلات (138-2) و (139-2) به ترتیب برای مختصات استوانه‌ای و کروی برای مراجعه آتی مفید خواهند بود.

۱۰-۲ قضیه استوکس

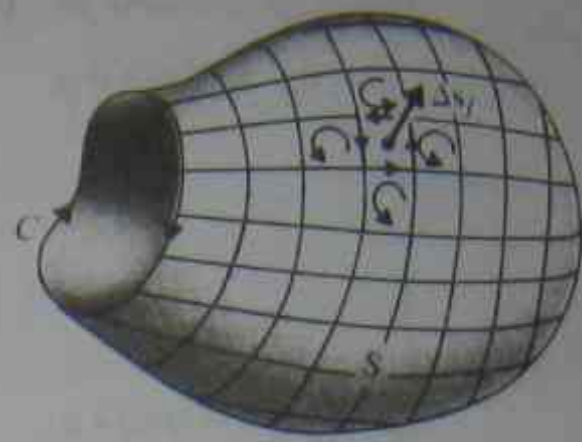
در مورد سطح کوچک دیفرانسیلی Δs_j که توسط مسیر C_j احاطه شده است، تعریف $\nabla \times \mathbf{A}$ در معادله (125-2) به عبارت زیر منجر می‌گردد

$$(\nabla \times \mathbf{A})_j \cdot (\Delta s_j) = \oint_{C_j} \mathbf{A} \cdot d\ell \quad (140-2)$$

برای بدست آوردن معادله (140-2) ضرب داخلی دو طرف معادله (125-2) را با $a_{r_j} \Delta s_j$ یا Δs_j نوشته‌ایم. می‌توان سطح دلخواه S را به تعداد زیادی، مثلاً N ، سطح دیفرانسیلی کوچک تقسیم نمود. شکل ۲-۳۲، چنین طرحی را با جزء کوچک دیفرانسیلی نمونه، Δs_j ، نشان می‌دهد. طرف چپ معادله (140-2)، شار بردار $\nabla \times \mathbf{A}$ از سطح Δs_j است. با افزودن سهم‌های تمام سطوح دیفرانسیلی به شار داریم

$$\sum_{j=1}^N (\nabla \times \mathbf{A})_j \cdot (\Delta s_j) = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot ds \quad (141-2)$$

اکنون انتگرال‌های خطی دورادور مسیرهای تمام اجزاء کوچک دیفرانسیلی را که با سمت راست



شکل ۲-۲۴ سطح تقسیم شده برای اثبات قضیه استوکس

معادله (۲-۱۴۰) نمایش داده شده‌اند با هم جمع می‌کنیم. چون بخش مشترک مسیرهای دو جزء کوچک مجاور توسط دو مسیر در جهات مخالف طی می‌شود، سهم خالص تمامی بخش‌های مشترک درونی در کل انتگرال خطی صفر است و تنها سهم مسیر خارجی C که کل سطح S را احاطه کرده است، پس از جمع باقی می‌ماند:

$$\lim_{\Delta S_j \rightarrow 0} \sum_{j=1}^N \left(\oint_{C_j} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \right) = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (2-142)$$

ترکیب معادلات (۲-۱۴۱) و (۲-۱۴۲)، قضیه استوکس را بدست می‌دهد:

$$\boxed{\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s} = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}} \quad (2-143)$$

که بیانگر این است که انتگرال سطحی کرل یک میدان برداری، روی یک سطح باز برابر انتگرال خطی بسته بردار روی مسیری است که سطح را در بر می‌گیرد.

مانند قضیه دیورژانس، اعتبار فرآیندهای حدگیری که منجر به قضیه استوکس می‌گردد، لازم می‌دارد که میدان برداری \mathbf{A} و همچنین مشتقات اول آن موجود و روی S و در امتداد C پیوسته باشند. قضیه استوکس انتگرال سطحی کرل یک بردار را به انتگرال خطی آن بردار و برعکس تبدیل می‌کند. همانند قضیه دیورژانس، قضیه استوکس اتحاد مهمی در آنالیز برداری است و اغلب آن را در بنا نهادن قضایا و روابط دیگر در الکترومغناطیس بکار خواهیم برد.

اگر انتگرال سطحی $\nabla \times \mathbf{A}$ روی یک سطح بسته انجام پذیرد، هیچ مسیر بیرونی در برگیرنده برای سطح وجود نخواهد داشت و معادله (۲-۱۴۳) بیان می‌دارد که در هر سطح بسته S

$$\oint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (2-144)$$

هندسه شکل ۲-۲۲ بدقت طوری انتخاب شده است که براین حقیقت تأکید نماید که کاربرد غیربدیهی قضیه استوکس همواره یک سطح باز یا لبه را ایجاد می‌کند. ساده‌ترین سطح باز، یک

صفحه یا قرص دوبعدی است که بیرامون آن همان مسیر آن است. در اینجا به یاد می‌آوریم که جهت‌های $d\mathbf{l}$ و $d\mathbf{s}(\mathbf{a}_n)$ از قاعده دست راست پیروی می‌کنند.

مثال ۲-۲۲ $\mathbf{F} = a_x xy - a_y zx$ داده شده است. قضیه استوکس را روی یک چهارم قرص مدوری به شعاع ۳ در ربع اول مطابق شکل ۲-۲۱ (مثال ۲-۱۴، صفحه ۴۸) تحقیق کنید. حل نخست انتگرال سطحی $\nabla \times \mathbf{F}$ را پیدا می‌کنیم. از معادله (۲-۱۳۶)،

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & -zx & 0 \end{vmatrix} = -a_z(z+x)$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{s} &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{1-y^2}} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot (\mathbf{a}_z dx dy) \\ &= \int_0^{\pi/2} \left[\int_0^{\sqrt{1-y^2}} -(z+x) dx \right] dy \\ &= - \int_0^{\pi/2} \left[z\sqrt{1-y^2} + \frac{1}{2}(1-y^2) \right] dy \\ &= - \left[y\sqrt{1-y^2} + \sin^{-1} \frac{y}{2} + \frac{1}{2}y - \frac{y^2}{6} \right] \Big|_0^{\pi/2} \\ &= -1 \left(1 + \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

استفاده از حدود صحیح در مورد دو متغیر انتگرال‌گیری مهم است. ترتیب انتگرال‌گیری را می‌توانیم به صورت زیر جابجا کنیم

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{\pi/2} \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} -(z+x) dy \right] dx$$

و همان نتیجه را بدست آوریم. اما کاملاً غلط خواهد بود اگر حدود ۰ تا $\pi/2$ به عنوان حدود انتگرال‌گیری هردوی x و y بکار رود. (می‌دانید چرا؟)

در انتگرال خطی به دور $ABOA$ ، قبلاً بخش دو کمان A تا B را در مثال ۲-۱۴ محاسبه

کرده‌ایم.

$$\text{از } B \text{ تا } O: \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \mathbf{F} \cdot (-a_y dy) = zxy dy = 0, \text{ و } x = 0$$

از O تا A : $y = 0$ و x از 0 تا 1 است. $F \cdot d\ell = F \cdot (a_x dx) = xy dx = 0$. از این رو از مثال ۲ - ۱۴،

$$\oint_{ABO A} F \cdot d\ell = \int_A^B F \cdot d\ell = -1 \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)$$

و قضیه استوکس تحقیق گردیده است.

البته، قضیه استوکس در معادله (۲ - ۱۴۳) به عنوان یک اتحاد کلی بنا نهاده شده است؛ هیچ مثال خاصی برای اثبات آن مورد نیاز نیست. مثال بالا را برای تمرینی در مورد انتگرال‌های سطحی و خطی حل کردیم. (توجه می‌کنیم که در اینجا هم میدان برداری و هم مشتقات فضائی مرتبه اول آن روی سطح و مسیر مورد نظر معین و پیوسته هستند.)

۱۱-۲ دو اتحاد صفر

دو اتحاد شامل عملیات مکرر del در مطالعه الکترومغناطیس اهمیت قابل ملاحظه‌ای دارند، بخصوص وقتی که توابع پتانسیل را معرفی می‌نماییم. این دو اتحاد را به‌طور جداگانه در زیر مورد بحث قرار خواهیم داد.

۱ - ۱۱ - ۲ اتحاد I

$$\nabla \times (\nabla V) \equiv 0$$

(۲ - ۱۴۵)

به عبارت دیگر، کرل گرادیان هر میدان عددی متحد با صفر است. (وجود V و مشتقات اول آن در تمام نقاط بطور ضمنی فرض می‌شوند.)

در مختصات کارتزین، معادله (۲ - ۱۴۵)، بسادگی می‌تواند با استفاده از معادله (۲ - ۹۶) در مورد ∇ و انجام عملیات مشخص شده اثبات شود. به‌طور کلی اگر انتگرال سطحی $\nabla \times (\nabla V)$ را روی هر سطحی حساب کنیم به‌طوری که در قضیه استوکس بیان گردید، نتیجه، معادل انتگرال خطی ∇V دور مسی بسته در برگیرنده سطح خواهد بود:

$$\int_S [\nabla \times (\nabla V)] \cdot ds = \oint_C (\nabla V) \cdot d\ell \quad (۲ - ۱۴۶)$$

اما از معادله (۲ - ۸۸) داریم

$$\oint_C (\nabla V) \cdot d\ell = \oint_C dV = 0 \quad (۲ - ۱۴۷)$$

ترکیب معادلات (۲ - ۱۴۶) و (۲ - ۱۴۷) بیان می‌دارد که انتگرال سطحی $\nabla \times (\nabla V)$ روی هر سطح صفر است. بنابراین جمله مورد انتگرال‌گیری خود باید صفر باشد، که به اتحاد معادله

(۲ - ۱۴۵) منجر می‌شود. از آنجائی که در استخراج نتایج، دستگاه مختصات مشخص نشده است، اتحاد کلی است و با انتخاب دستگاه مختصات تغییر نخواهد کرد. بیان وارونه اتحاد I به صورت زیر می‌تواند انجام گیرد: اگر یک میدان برداری بدون کرل

باشد، آنگاه می‌تواند به صورت گرادیان یک میدان عددی بیان شود. فرض کنید E میدان برداری باشد. آنگاه اگر $\nabla \times E = 0$ باشد، می‌توانیم میدان عددی V را چنان تعریف کنیم که

$$E = -\nabla V \quad (۲ - ۱۴۸)$$

مادامی که اتحاد I مورد نظر است، علامت منفی در اینجا اهمیتی ندارد. (علامت منفی در معادله (۲ - ۱۴۸) بدین جهت منظور شده است که این رابطه با رابطه اساسی میان شدت میدان الکتریکی E و پتانسیل عددی الکتریکی V در الکتریسیته ساکن، که در فصل آینده مورد بررسی قرار خواهند گرفت، مطابقت داشته باشد.) از بخش ۲ - ۹ می‌دانیم که یک بردار بدون کرل، یک میدان ذخیره شونده است. از این رو، یک میدان برداری غیرگردشی (ابقائی) همواره می‌تواند به صورت گرادیان یک میدان عددی بیان شود.

۲ - ۱۱ - ۲ اتحاد II

$$\nabla \cdot (\nabla \times A) \equiv 0$$

(۲ - ۱۴۹)

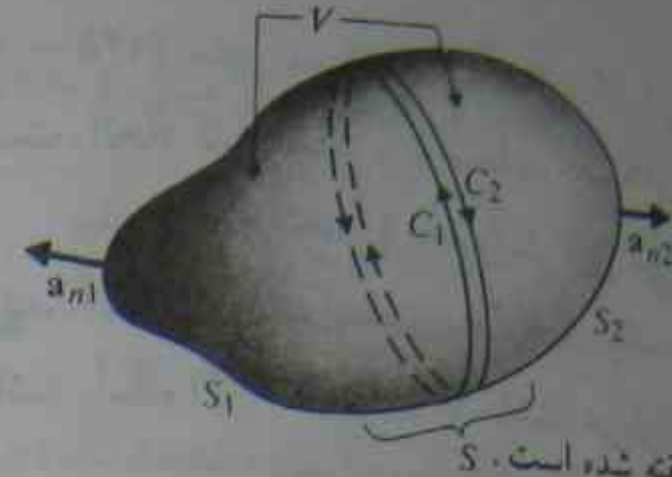
به عبارت دیگر، دیورژانس کرل هر میدان برداری متحد با صفر است.

معادله (۲ - ۱۴۹) نیز بسادگی با استفاده از معادله (۲ - ۹۶) در مورد ∇ و انجام عملیات مشخص شده در مختصات کارتزین اثبات می‌شود. می‌توانیم این معادله را در حالت کلی بدون توجه به دستگاه مختصات، با گرفتن انتگرال حجمی از $\nabla \cdot (\nabla \times A)$ در طرف چپ ثابت نماییم. با بکارگیری قضیه دیورژانس داریم

$$\int_V \nabla \cdot (\nabla \times A) dv = \oint_S (\nabla \times A) \cdot ds \quad (۲ - ۱۵۰)$$

برای مثال حجم دلخواه V را که توسط سطح S در شکل ۲ - ۳۳ در بر گرفته شده است انتخاب نماییم. سطح بسته S را می‌توان به دو سطح باز S_1 و S_2 که توسط مرز مشترکی که دوبار به صورت C_1 و C_2 ترسیم شده است تقسیم نمود. آنگاه قضیه استوکس را در مورد سطح S_1 با مرز C_1 و سطح S_2 با مرز C_2 بکار برده، سمت راست معادله (۲ - ۱۵۰) را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} \oint_S (\nabla \times A) \cdot ds &= \int_{S_1} (\nabla \times A) \cdot a_{n_1} ds + \int_{S_2} (\nabla \times A) \cdot a_{n_2} ds \\ &= \oint_{C_1} A \cdot d\ell + \oint_{C_2} A \cdot d\ell \end{aligned} \quad (۲ - ۱۵۱)$$



شکل ۲-۲ یک حجم دلخواه V که توسط سطح S در بر گرفته شده است. S

عمودهای a_{n1} و a_{n2} بر سطوح S_1 و S_2 به سمت خارج بوده، رابطه آنها با جهت مسیره‌های C_1 و C_2 از قاعده دست راست پیروی می‌کند. از آنجائی که مسیره‌های C_1 و C_2 در واقع یکی هستند و مرز مشترک میان S_1 و S_2 را تشکیل می‌دهند، دو انتگرال خطی طرف راست معادله (۱۵۱-۲) مسیر مشابهی را در جهات مخالف طی می‌کنند. در نتیجه جمع آنها صفر است و انتگرال حجمی $\nabla \cdot (\nabla \times A)$ در سمت چپ معادله (۱۵۰-۲) صفر می‌شود. چون این مطلب برای هر حجم دلخواه صادق است، عبارت مورد انتگرال‌گیری، آن طوری که توسط اتحاد در معادله (۱۴۹-۲) نشان داده شده است، باید صفر باشد.

بیان وارونه اتحاد II به صورت زیر است: اگر یک میدان برداری بدون دیورژانس باشد، آنگاه می‌توان آن را به صورت کرل میدان برداری دیگری بیان کرد. فرض کنید این میدان برداری B باشد. این بیان وارونه مشخص می‌کند که اگر $\nabla \cdot B = 0$ باشد، میدان برداری A را می‌توان چنان تعریف نمود که

$$B = \nabla \times A \quad (152-2)$$

در بخش ۲-۷ متذکر شدیم که یک میدان بدون دیورژانس، یک میدان سلونوئیدی نیز نامیده می‌شود. میدانهای سلونوئیدی منبع یا جابه جریان را به همراه ندارند. شار خالص خروجی یک میدان سلونوئیدی از هر سطح بسته صفر است، و خطوط شار روی خود بسته می‌شوند. خطوط مدور شار مغناطیسی یک سلونوئید یا یک سلف را یادآور می‌شویم. به طوری که در فصل ۶ خواهیم دید چگالی شار مغناطیسی B سلونوئیدی است و می‌تواند به صورت کرل میدان برداری دیگری که پتانسیل مغناطیسی برداری، A نامیده می‌شود، بیان گردد.

۱۲-۲ قضیه هلم هولتز

در بخش‌های پیشین متذکر شدیم که یک میدان بدون دیورژانس، سلونوئیدی است و یک میدان

بدون کرل غیرگردشی می‌باشد. میدان‌های برداری را می‌توان براساس سلونوئیدی و/یا غیرگردشی بودن آنها طبقه‌بندی نمود. میدان برداری F

۱- سلونوئیدی و غیرگردشی است اگر

$$\nabla \cdot F = 0 \quad \text{و} \quad \nabla \times F = 0$$

مثال: میدان الکتریکی ساکن در ناحیه‌ای تهی از بار.

۲- سلونوئیدی اما گردشی است اگر

$$\nabla \cdot F = 0 \quad \text{و} \quad \nabla \times F \neq 0$$

مثال: میدان مغناطیسی دائم در یک هادی حامل جریان.

۳- غیرگردشی اما غیر سلونوئیدی است اگر

$$\nabla \cdot F \neq 0 \quad \text{و} \quad \nabla \times F = 0$$

مثال: میدان الکتریکی ساکن در ناحیه‌ای باردار.

۴- گردشی و غیر سلونوئیدی اگر

$$\nabla \cdot F \neq 0 \quad \text{و} \quad \nabla \times F \neq 0$$

مثال: میدان الکتریکی در ناحیه باردار به همراه یک میدان مغناطیسی متغیر با زمان.

از این رو کلی‌ترین میدان برداری، هم دیورژانس غیرصفر و هم کرل غیرصفر دارد، و می‌تواند به صورت حاصل جمع یک میدان سلونوئیدی و یک میدان غیرگردشی در نظر گرفته شود.

قضیه هلم هولتز: یک میدان برداری (تابع برداری نقطه‌ای) تا حد یک ثابت افزودنی تعیین می‌شود، اگر هم دیورژانس و هم کرل آن در تمام نقاط مشخص شده باشند. در یک ناحیه

بدون مرز، فرض می‌شود که هم دیورژانس و هم کرل میدان برداری در بینهایت صفر می‌شوند. اگر میدان برداری به ناحیه‌ای محصور توسط یک سطح، محدود شده باشد، وقتی تعیین می‌شود که دیورژانس و کرل آن در سرتاسر ناحیه، همچنین مؤلفه عمودی بردار روی سطح مرزی، داده شده باشند. در اینجا فرض می‌کنیم که تابع برداری تک مقداری و مشتقات آن معین و پیوسته هستند.

قضیه هلم هولتز را می‌توان به عنوان یک قضیه ریاضی در حالت کلی اثبات نمود. برای

منظور خود به یاد می‌آوریم (بخش ۲-۹ را ببینید) که دیورژانس یک بردار، سنجشی از قدرت منبع جریان و کرل یک بردار، سنجشی از قدرت منبع گردابی است. هنگامی که قدرت‌های منبع جریان و منبع گردابی هر دو مشخص شده باشند، انتظار داریم که میدان برداری تعیین شده باشد. از

† برای مثال، کتاب G. Arfken, *Mathematical Methods for Physicists*, Academic press, New York (۱۹۶۶). بخش ۱-۱۵ را ببینید.

این رو می توان میدان برداری کلی F را به یک بخش غیرگردشی F_i و یک بخش سلونوئیدی F_s تجزیه نمود:

$$F = F_i + F_s \quad (۱۵۳-۲)$$

یا

$$\begin{cases} \nabla \times F_i = 0 \\ \nabla \cdot F_i = g \end{cases} \quad \begin{matrix} (۲-۱۵۴ \text{ الف}) \\ (۲-۱۵۴ \text{ ب}) \end{matrix}$$

و

$$\begin{cases} \nabla \cdot F_s = 0 \\ \nabla \times F_s = G \end{cases} \quad \begin{matrix} (۲-۱۵۵ \text{ الف}) \\ (۲-۱۵۵ \text{ ب}) \end{matrix}$$

که در آن g و G معلوم فرض می شوند. داریم:

$$\nabla \cdot F = \nabla \cdot F_i = g \quad (۱۵۶-۲)$$

و

$$\nabla \times F = \nabla \times F_s = G \quad (۱۵۷-۲)$$

قضیه هلم هولتز بیان می دارد که هرگاه g و G مشخص باشند، تابع برداری F تعیین می شود. چون $\nabla \times$ ، عملگرهای دیفرانسیلی هستند، F باید از انتگرال گیری g و G به طریقی حاصل شده باشد، که به ثابت های انتگرال گیری منجر می گردد. تعیین این ثابت های اضافی به اطلاعاتی از شرایط مرزی نیاز دارد. روش بدست آوردن F از روی g و G در این مرحله روشن نیست، و در فصول آینده بنا نهاده خواهد شد.

این حقیقت که F_i غیرگردشی است، از نظر اتحاد (۲-۱۴۵) ما را به تعریف تابع (پتانسیل) عددی V چنان قادر می سازد که

$$F_i = -\nabla V \quad (۱۵۸-۲)$$

به طریق مشابه، اتحاد (۲-۱۴۹) و معادله (۲-۱۵۵ الف) تعریف تابع (پتانسیل) برداری A را مجاز می دارد به طوری که

$$F_s = \nabla \times A \quad (۱۵۹-۲)$$

قضیه هلم هولتز بیان می دارد که تابع برداری کلی F را می توان به صورت جمع گرادیان یک تابع

عددی و کرل یک تابع برداری نوشت. از این رو

$$F = -\nabla V + \nabla \times A \quad (۱۶۰-۲)$$

در فصل های آینده، در توسعه اصل موضوعی الکترومغناطیس، به قضیه هلم هولتز به عنوان عنصر اصلی متکی خواهیم بود.

مثال ۲۳-۲ تابع برداری زیر مفروض است:

$$F = a_x(ry - cz) + a_y(cx - rz) - a_z(cy + z)$$

الف) اگر F غیرگردشی باشد، ثابت های c_1 ، c_2 و c_3 را تعیین کنید.

ب) تابع پتانسیل عددی V را چنان بیابید که منفی گرادیان آن معادل F باشد.

حل

الف) برای اینکه F غیرگردشی باشد، $\nabla \times F = 0$ ، یعنی

$$\begin{aligned} \nabla \times F &= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ ry - cz & cx - rz & -(cy + z) \end{vmatrix} \\ &= a_x(-c_2 + r) - a_y c_1 + a_z(c_2 - r) = 0 \end{aligned}$$

تمام مؤلفه های $\nabla \times F$ باید صفر شوند. از این رو $c_1 = 0$ ، $c_2 = r$ و $c_3 = r$.

ب) چون F غیرگردشی است، می تواند به صورت منفی گرادیان یک تابع عددی V بیان شود؛ یعنی

$$\begin{aligned} F &= -\nabla V = -a_x \frac{\partial V}{\partial x} - a_y \frac{\partial V}{\partial y} - a_z \frac{\partial V}{\partial z} \\ &= a_x ry + a_y(rx - rz) - a_z(ry + z) \end{aligned}$$

سه معادله بدست می آید:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -ry, \quad (۲-۱۶۱)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -rx + rz, \quad (۲-۱۶۲)$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = ry + z. \quad (۲-۱۶۳)$$

انتگرال گیری معادله (۲-۱۶۱) نسبت به x نتیجه می دهد

$$V = -rxy + f_1(y, z) \quad (۱۶۴-۲)$$

که در آن $f_1(y, z)$ تابعی است از y و z که باید تعیین شود. به طور مشابه، انتگرال گیری معادله

(۲-۱۶۲) نسبت به z و معادله (۲-۱۶۳) نسبت به z نتیجه می‌دهد

$$V = -3xy + 2yz + f_z(x, z) \quad (2-165)$$

$$V = 2yz + \frac{z^2}{2} + f_z(x, y) \quad (2-166)$$

بررسی معادلات (۲-۱۶۴)، (۲-۱۶۵) و (۲-۱۶۶) ما را قادر می‌سازد تا تابع پتانسیل عددی را به صورت زیر بنویسیم

$$V = -3xy + 2yz + \frac{z^2}{2} \quad (2-167)$$

هر ثابتی که به معادله (۲-۱۶۷) افزوده شود، کماکان V را یک جواب نگاه خواهد داشت. ثابت فوق از روی شرایط مرزی یا شرایط در بینهایت تعیین می‌گردد.

پرسش‌های دوره‌ای

۱-۲. د. بردار A ، B و C به صورت انتها به ابتدا ترسیم شده و سه ضلع مثلثی را تشکیل می‌دهند. $A+B+C$ و $A+B-C$ را تعیین کنید.

۲-۲. د. تحت چه شرایطی ضرب داخلی دو بردار می‌تواند منفی شود؟

۳-۲. د. نتیجه $A \cdot B$ و $A \times B$ را بنویسید، اگر (الف) $A \parallel B$ و (ب) $A \perp B$.

۴-۲. د. کدام یک از ضربهای برداری زیر معنی ندارد؟ توضیح دهید.

(الف) $(A \cdot B) \times C$

(ب) $A(B \cdot C)$

(پ) $A \times B \times C$

(ت) A/B

(ث) A/a_A

(ج) $(A \times B) \cdot C$

۵-۲. د. آیا $(A \cdot B)C$ معادل $A(B \cdot C)$ است؟

۶-۲. د. آیا $A \cdot B = A \cdot C$ ، $A \cdot B = C$ ، $B = C$ را ایجاب می‌کند؟ توضیح دهید.

۷-۲. د. آیا $A \times B = A \times C$ ، $B = C$ را ایجاب می‌کند؟ توضیح دهید.

۸-۲. د. دو بردار A و B داده شده‌اند، چگونه (الف) مؤلفه A در جهت B و (ب) مؤلفه B در جهت A را پیدا می‌کنید؟

۹-۲. د. چه عاملی باعث می‌شود، یک دستگاه مختصات (الف) متعامد، (ب) منحنی الخط و (پ) بیرو قاعده دست راست باشد؟

پرسش‌های دوره‌ای

۱۰-۲. د. بردار F در دستگاه مختصات متعامد منحنی‌الخط (u_1, u_2, u_3) داده شده است. توضیح دهید چگونه (الف) F و (ب) a_F را تعیین نماییم.

۱۱-۲. د. ضرایب متری چه هستند؟

۱۲-۲. د. دو نقطه $P_1(1, 2, 3)$ و $P_2(-1, 0, 2)$ در مختصات کارتزین داده شده‌اند. روابط مربوط به بردارهای $\overrightarrow{P_1P_2}$ و $\overrightarrow{P_2P_1}$ را بنویسید.

۱۳-۲. د. روابط مربوط به $A \cdot B$ و $A \times B$ در مختصات کارتزین چه هستند؟

۱۴-۲. د. اختلاف میان یک کمیت عددی و یک میدان عددی چیست؟ اختلاف میان یک کمیت برداری و یک میدان برداری چیست؟

۱۵-۲. د. معنای فیزیکی گرادیان یک میدان عددی چیست؟

۱۶-۲. د. نرخ تغییر فضائی یک کمیت عددی را در جهت مشخص برحسب گرادیان آن بیان کنید.

۱۷-۲. د. عملگر ∇ در مختصات کارتزین بیانگر چه رابطه‌ای است؟

۱۸-۲. د. معنای فیزیکی دیورژانس یک میدان برداری چیست؟

۱۹-۲. د. یک میدان برداری با شار منحصراً شعاعی نمی‌تواند سلونوئیدی باشد. درست است یا غلط؟ توضیح دهید.

۲۰-۲. د. یک میدان برداری با شار منحصراً منحنی شکل می‌تواند دیورژانس غیرصفر داشته باشد. درست است یا غلط؟ توضیح دهید.

۲۱-۲. د. قضیه دیورژانس را با جملات بیان کنید.

۲۲-۲. د. معنای فیزیکی کرل یک میدان برداری چیست؟

۲۳-۲. د. یک میدان برداری با خطوط شار منحصراً منحنی شکل، نمی‌تواند غیرگردشی باشد. درست است یا غلط؟ توضیح دهید.

۲۴-۲. د. یک میدان برداری با خطوط شار منحصراً مستقیم می‌تواند سلونوئیدی باشد. درست است یا غلط؟ توضیح دهید.

۲۵-۲. د. قضیه استوکس را به صورت جملات بیان کنید.

۲۶-۲. د. تفاوت میان یک میدان غیرگردشی و یک میدان سلونوئیدی چیست؟

۲۷-۲. د. قضیه هلم هولتز را به صورت جملات بیان کنید.

۲۸-۲. د. توضیح دهید چگونه یک تابع برداری کلی را می‌توان برحسب تابع پتانسیل عددی و تابع پتانسیل برداری بیان نمود.

۱۰۲. م. سه بردار A, B, C به صورت زیر داده شده‌اند،

$$A = a_x + a_y + a_z,$$

$$B = -a_y + a_z,$$

$$C = a_x + a_z,$$

مطلوب است

الف) a_A

ب) $A \cdot B$

ت) مؤلفه A در جهت C

ب) $|A - B|$

ت) θ_{AB}

ج) $A \times C$

د) $(A \times B) \cdot C$ و $A \cdot (B \times C)$ و $(A \times B) \times C$ و $A \times (B \times C)$

۲۰۲. م. بردارهای زیر داده شده‌اند،

$$A = a_x - a_y + a_z$$

$$B = a_x + a_y - a_z$$

عبارتی برای بردار واحد C که هم بر A و هم بر B عمود است، پیدا کنید.

۲۰۲. م. دو میدان برداری با $A = a_x A_x + a_y A_y + a_z A_z$ و $B = a_x B_x + a_y B_y + a_z B_z$ داده شده است که در آن، تمام مؤلفه‌ها می‌توانند توابعی از مختصات فضائی باشند. اگر این دو میدان در تمام نقاط بایکدیگر موازی باشند، چه رابطه‌ای باید بین مؤلفه‌های آنها برقرار باشد؟

۲۰۲. م. نشان دهید اگر $A \cdot B = A \cdot C$ و $A \times B = A \times C$ ، که در آنها A بردار صفر نیست، آنگاه $B = C$.

۵۰۲. م. یک بردار مجهول را می‌توان تعیین کرد، اگر هم ضرب عددی و هم ضرب برداری آن با یک بردار معلوم داده شده باشد، با فرض اینکه A یک بردار معلوم است، بردار مجهول X را تعیین کنید اگر هم p و هم B داده شده باشند $p = A \cdot X$ و $B = A \times X$.

۶۰۲. م. سه رأس مثلثی عبارتند از $P_1(0, 1, -2)$ ، $P_2(4, 1, -2)$ و $P_3(6, 2, 5)$.

الف) تعیین کنید آیا $\Delta P_1 P_2 P_3$ قائم الزاویه است یا نه.

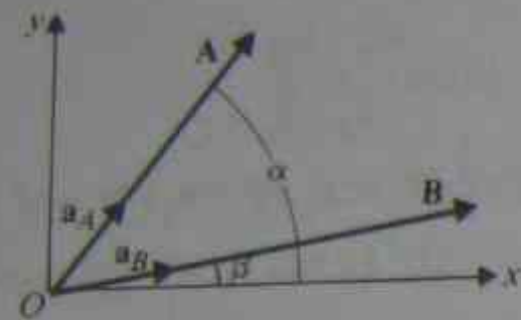
ب) سطح مثلث را بدست آورید.

۷۰۲. م. نشان دهید که قطرهای یک لوزی برهم عمودند. (لوزی یک متوازی الاضلاع با اضلاع متساوی است.)

۸۰۲. م. ثابت کنید خطی که نقاط وسط دو ضلع مثلثی را بهم وصل می‌کند، موازی ضلع سوم و

مساوی نصف آن است.

۹۰۲. م. بردارهای واحد a_A و a_B جهت‌های بردارهای دو بعدی A و B را نشان می‌دهند که مطابق شکل ۲-۳۴ با محور مرجع x ، به ترتیب زاویه α و β را می‌سازند. الف) با در نظر گرفتن ضرب عددی $A \cdot a_B$ ، فرمولی برای بسط کسینوس اختلاف دو زاویه، $\cos(\alpha - \beta)$ بیابید. ب) فرمولی برای $\sin(\alpha - \beta)$ بدست آورید.



شکل ۲-۳۴ نمودار مسئله ۹۰۲-۲.

۱۰۰۲. م. قانون سینوس‌ها را در یک مثلث اثبات کنید.

۱۱۰۲. م. ثابت کنید زاویه محاطی در یک نیم دایره قائمه است.

۱۲۰۲. م. درستی قاعده back-cab را در مورد ضرب سه‌گانه برداری سه بردار، طبق معادله $(20 - 2)$ در مختصات کارتزین تحقیق نمایید.

۱۳۰۲. م. با روابط برداری ثابت کنید که دو خط در صفحه xy ($L_1: b_1x + b_2y = c$) با روابط $L_2: b'_1x + b'_2y = c'$ برهم عمود هستند اگر شیب آنها منفی معکوس یکدیگر باشد.

۱۴۰۲. م.

الف) ثابت کنید که معادله هر صفحه در فضا را می‌توان به صورت $b_1x + b_2y + b_3z = c$ نوشت. (راهنمایی: ثابت کنید ضرب نقطه‌ای بردار مکان به هر نقطه از صفحه و یک بردار عمودی، ثابت است.)

ب) عبارتی را برای عمود واحد گذرنده از مبدأ بیابید.

پ) در مورد صفحه $3x - 2y + 6z = 5$ ، فاصله عمودی از مبدأ تا صفحه را پیدا کنید.

۱۵۰۲. م. مؤلفه بردار $A = -a_y z + a_z y$ را در نقطه $P_1(0, -2, 3)$ که به سمت نقطه $P_2(\sqrt{3}, -60^\circ, 1)$ جهت گرفته است، بیابید.

۱۶۰۲. م. موقعیت یک نقطه در مختصات استوانه‌ای توسط $(4, 2\pi/3, 3)$ مشخص شده است. محل نقطه را در حالت‌های زیر تعیین کنید.

الف) در مختصات کارتزین؟

ب) در مختصات کروی؟

۱۷-۲. م یک میدان در مختصات کروی توسط $E = a_R(25/R^2)$ توصیف شده است.

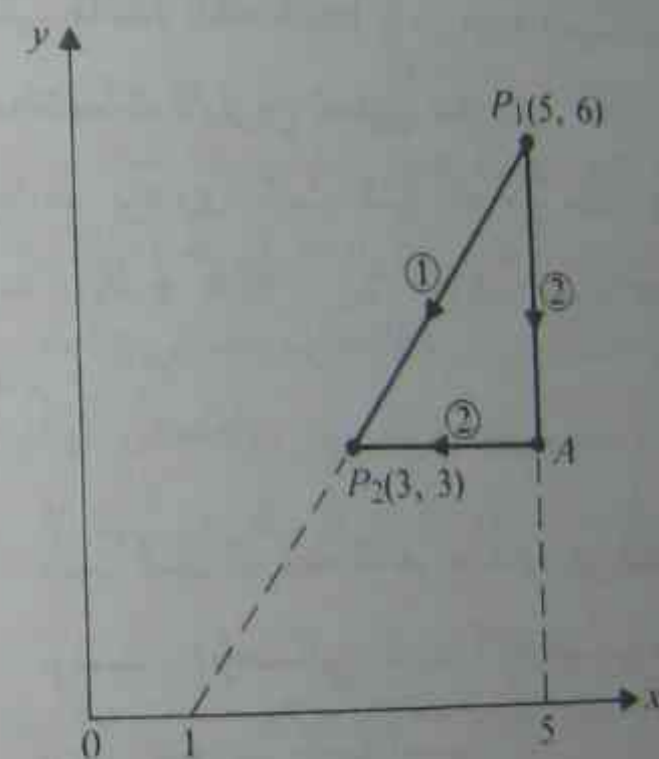
الف) $|E|$ و E_x را در نقطه $P(-2, 4, -5)$ بیابید.
 ب) زاویه‌ای را که E با بردار a_x یا a_y یا a_z در نقطه P می‌سازد بدست آورید.

۱۸-۲. م بردارهای پایه a_R, a_θ, a_ϕ دستگاه مختصات کروی را در مختصات کارتزین بیان کنید.

- الف) $a_x \cdot a_\theta$
- ب) $a_\theta \cdot a_\phi$
- ت) $a_R \cdot a_x$
- ج) $a_R \cdot a_z$
- د) $a_x \times a_z$
- ه) $a_x \times a_\theta$
- و) $a_\theta \cdot a_x$
- ز) $a_\theta \cdot a_R$
- ح) $a_x \cdot a_\theta$
- ط) $a_\theta \cdot a_z$

۲۰-۲. م تابع برداری $F = a_x xy + a_y(3x - y^2)$ داده شده است، انتگرال $\int F \cdot dl$ را از $P_1(5, 6)$ تا $P_2(3, 3)$ در شکل ۲-۳۵ محاسبه کنید.

- الف) در امتداد مسیر مستقیم $P_1 P_2$.
- ب) در امتداد مسیر $P_1 A P_2$.



شکل ۲-۳۵ مسیرهای انتگرال‌گیری مسئله ۲۰-۲

۲۱-۲. م تابع برداری $E = a_x y + a_y x$ داده شده است. انتگرال خطی عددی $\int E \cdot dl$ را از نقطه $P_1(2, 1, -1)$ تا نقطه $P_2(8, 2, -1)$ محاسبه کنید.

- الف) در امتداد سهمی $x = 2y^2$.
- ب) در امتداد خط راست رابط دو نقطه.

۲۲-۲. م برای E در مسئله ۲۱-۲، $\int E \cdot dl$ را از $P_1(2, 4, -1)$ تا $P_2(4, -3, -1)$ با تبدیل E و نیز موقعیت‌های P_1 و P_2 به مختصات استوانه‌ای، محاسبه کنید.

۲۳-۲. م تابع عددی

$$V = \left(\sin \frac{\pi}{4} x\right) \left(\sin \frac{\pi}{4} y\right) e^{-z}$$

داده شده است.

الف) اندازه و جهت حداکثر نرخ افزایش V را در نقطه $P(1, 2, 3)$ تعیین کنید.

ب) نرخ افزایش V در P را در جهت مبدأ تعیین کنید.

۲۴-۲. م انتگرال

$$\oint_S (a_R r \sin \theta) \cdot ds$$

را روی سطح کره‌ای به شعاع ۵ و مرکز مبدأ مختصات محاسبه کنید.

۲۵-۲. م معادله صفحه‌ای در فضا که نقطه (x_1, y_1, z_1) را در خود داراست، به صورت زیر قابل نوشتن است

$$l(x - x_1) + m(y - y_1) + p(z - z_1) = 0$$

که در آن l, m, p و کسینوس‌های جهتی عمود واحد بر سطح هستند:

$$a_n = a_x l + a_y m + a_z p$$

میدان برداری $F = a_x + a_y^2 + a_z^2$ داده شده است. انتگرال $\int_S F \cdot ds$ را روی سطح مسطح مربعی شکلی که رئوس آن در $(0, 0, 2), (2, 0, 2), (2, 2, 0)$ و $(0, 2, 0)$ هستند، محاسبه کنید.

۲۶-۲. م دیورژانس میدانهای برداری شعاعی زیر را پیدا کنید:

الف) $f_1(R) = a_R R^n$

ب) $f_2(R) = a_R \frac{k}{R^3}$

۲۷-۲. م نشان دهید $\frac{1}{r} \oint_S R \cdot ds = V$ ؛ که در آن R بردار شعاعی و V حجم ناحیه دربرگرفته شده توسط S است.

۲۸-۲. م برای تابع عددی f و تابع برداری A ، رابطه

$$\nabla \cdot (fA) = f \nabla \cdot A + A \cdot \nabla f$$

را در مختصات کارتزین ثابت کنید.

۲۹-۲. م برای تابع برداری $A = a_r r^2 + a_z z$ ، قضیه دیورژانس را در مورد ناحیه مدور استوانه‌ای محصور توسط $r = 5$ و $z = 0$ و $z = 4$ تحقیق نمایید.

۳۰-۲. م در مورد تابع برداری $F = a_r k_1/r + a_z k_2 z$ ، داده شده در مثال ۲-۱۵، (صفحه ۵۰)

۵۰) $\int \nabla \cdot F dv$ را روی حجم توصیف شده در آن مثال محاسبه نمایید، توضیح دهید

چرا قضیه دیورژانس در می ماند.
 ۳۱-۲.۴ از تعریف معادله (۲-۱۸) برای نتیجه گرفتن عبارت $\nabla \cdot \mathbf{A}$ در مورد میدان برداری $\mathbf{A} = a_x \mathbf{A}_x + a_y \mathbf{A}_y + a_z \mathbf{A}_z$ در مختصات استوانه‌ای استفاده کنید.
 ۳۲-۲.۴ میدان برداری $\mathbf{D} = a_R (\cos^2 \phi) / R^2$ در ناحیه‌ای بین دو پوسته کروی توصیف شده توسط $R=1$ و $R=2$ موجود است.

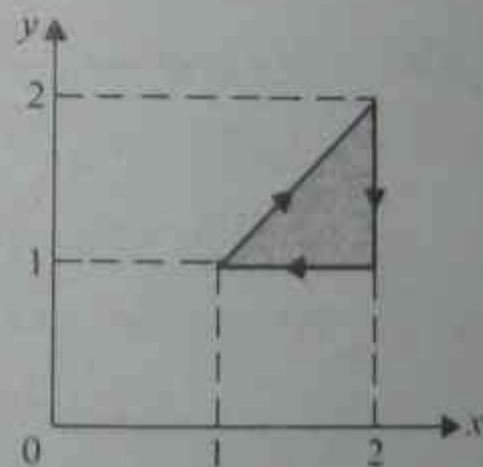
الف) $\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s}$
 ب) $\int \nabla \cdot \mathbf{D} dv$
 را محاسبه کنید.

۳۳-۲.۴ در مورد توابع برداری دیفرانسیل پذیر \mathbf{E} و \mathbf{H} ثابت کنید:

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H})$$

۳۴-۲.۴ تابع برداری $\mathbf{A} = a_x 2x^2 y^2 - a_y x^2 y^2$ را در نظر بگیرید.

الف) $\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$ را به دور مسیر مثلثی شکل نشان داده شده در شکل ۲-۳۶ بیابید.
 ب) $\int (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s}$ را روی سطح مثلثی فوق محاسبه کنید.
 پ) آیا \mathbf{A} می‌تواند به صورت گرادیان یک کمیت عددی بیان شود؟ توضیح دهید.



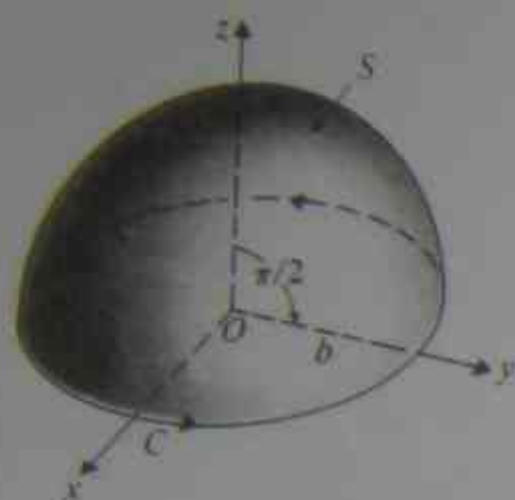
شکل ۲-۳۶ نمودار مسئله ۳۴-۲.۴

۳۵-۲.۴ با استفاده از تعریف معادله (۲-۱۲۶) عبارتی برای مؤلفه $a_R \nabla \times \mathbf{A}$ در مختصات کروی، در مورد میدان برداری $\mathbf{A} = a_R \mathbf{A}_R + a_\theta \mathbf{A}_\theta + a_\phi \mathbf{A}_\phi$ نتیجه بگیرید.

۳۶-۲.۴ تابع برداری $\mathbf{A} = a_\phi \sin(\phi/2)$ داده شده است. قضیه استروکس را روی سطح نیم کروی و مسیر دایره‌ای آن طبق شکل ۲-۳۷ تحقیق نمایید.

۳۷-۲.۴ در مورد تابع عددی f و تابع برداری \mathbf{G} ، رابطه زیر را در مختصات کارتزین ثابت کنید.

$$\nabla \times (f\mathbf{G}) = f\nabla \times \mathbf{G} + (\nabla f) \times \mathbf{G}$$



شکل ۲-۳۷ نمودار مسئله ۳۶-۲.۴

۳۸-۲.۴ اتحادهای صفر زیر را با بسط در مختصات کلی منحنی الخط متعامد ثابت کنید.

الف) $\nabla \times (\nabla V) \equiv 0$

ب) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \equiv 0$

۳۹-۲.۴ تابع برداری $\mathbf{F} = a_x(x + c_1 z) + a_y(c_2 x - cz) + a_z(x + c_3 y + c_4 z)$ داده شده است.

الف) اگر \mathbf{F} غیرگردشی باشد، ثابت‌های c_1, c_2, c_3 را تعیین کنید.

ب) اگر \mathbf{F} غیر سلونوئیدی نیز باشد، ثابت c_4 را نیز تعیین کنید.

پ) تابع پتانسیل عددی V را که منفی گرادیان آن برابر \mathbf{F} است، تعیین کنید.

میدانهای الکتریکی ساکن

۱-۳ مقدمه

در بخش ۱-۲ متذکر شدیم که سه گام اساسی در بنا نهادن یک نظریهٔ قیاسی به منظور مطالعهٔ موضوعات علمی مطرح می‌شود. آنها عبارتند از: تعریف کمیات اصلی، بی‌ریزی قواعد عملیاتی، و فرض روابط بنیادی. در فصل ۱، کمیات منبع و میدان را در یک مدل الکترومغناطیسی تعریف و در فصل ۲، اصول جبر و حساب برداری را مطرح نمودیم. حال آماده‌ایم تا فرضیات اصلی مطالعهٔ روابط منبع-میدان را در الکتروسیستهٔ ساکن معرفی نماییم.

میدان یک توزیع فضائی از کمیت‌های برداری و عددی است که ممکن است تابعی از زمان باشد یا نباشد. مثالی از یک کمیت عددی، ارتفاع محلی بر روی یک کوه نسبت به سطح دریاست. اگر از سایش درازمدت و اثرات زلزله صرف‌نظر شود، ارتفاع یک کمیت عددی است که تابعی از زمان نمی‌باشد. محل‌های مختلف بر روی یک کوه، ارتفاع‌های متفاوتی دارند که یک میدان ارتفاع را تشکیل می‌دهند: گرادیان ارتفاع، برداری است که جهت و اندازهٔ حداکثر شدت افزایش ارتفاع (شیب بسمت بالا) را بدست می‌دهد. در بالای یک کوه هموار یا یک زمین تخت، ارتفاع ثابت است و گرادیان آن صفر است. میدان ثقل زمین که نیروی وارد بر واحد جرم را نشان می‌دهد، یک میدان برداری است که جهت آن به سوی مرکز زمین است و اندازهٔ آن به ارتفاع جرم بستگی دارد. شدت میدانهای الکتریکی و مغناطیسی، میدانهای برداری هستند.

در الکتروسیستهٔ ساکن، بارهای الکتریکی (منابع) در حال سکون هستند و میدانهای الکتریکی

با زمان تغییر نمی‌کنند. میدانهای مغناطیسی موجود نیستند: از این رو با موقعیت نسبتاً ساده‌ای سروکار داریم. پس از مطالعه رفتار میدانهای الکتریکی ساکن و یافتن مهارت در روشهای حل مسائل مقدار مرزی الکتریسیته ساکن، به موضوع میدانهای مغناطیسی و میدانهای الکترومغناطیسی تغییر پذیر با زمان خواهیم پرداخت. اگرچه الکتریسیته ساکن در مقایسه با شمای الکترومغناطیسی نسبتاً ساده است، یادگیری آن در درک مدل‌های پیچیده‌تر الکترومغناطیس جنبه اساسی دارد. بعلاوه، بیان بسیاری از پدیده‌های طبیعی (مانند آذرخش، کرونا، آتش سنت‌المو^۱ و انفجار ذره) و اصول بعضی از کاربردهای مهم صنعتی (مانند نوسان‌نگار، چاپگر با جریان مرکب^۲، اگزروگرافی^۳ و میکروفن الکتریکی) بر مبنای الکتریسیته ساکن قرار دارند. مقاله‌های متعددی در کاربردهای خاص الکتریسیته ساکن در نوشته‌ها ظاهر می‌شود و در این زمینه تعدادی کتاب نیز به چاپ رسیده است.^۴

توسعه الکتریسیته ساکن در فیزیک مقدماتی، عموماً با قانون تجربی کولمب (به فرمول درآمده در سال ۱۷۸۵) در مورد نیروی بین دو بار نقطه‌ای آغاز می‌شود. این قانون بیان می‌دارد که نیروی بین دو جسم باردار q_1 و q_2 که در مقایسه با فاصله آنها R_{12} بسیار کوچک هستند، متناسب با حاصلضرب بارهاست و با مربع فاصله نسبت معکوس دارد. جهت نیرو در امتداد خط واصل دو بار است. بعلاوه، کولمب دریافت که بارهای نامتشابه یکدیگر را جذب و بارهای متشابه همدیگر را دفع می‌کنند. با استفاده از طرز نمایش برداری، قانون کولمب به صورت ریاضی به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$F_{12} = a_{R_{12}} k \frac{q_1 q_2}{R_{12}^2} \quad (1-3)$$

که در آن F_{12} نیروی برداری وارد بر q_2 توسط q_1 بردار واحد در جهت q_1 به q_2 و k ثابت تناسب وابسته به محیط و دستگاه واحدهاست. دقت کنید که اگر q_1 و q_2 هم علامت باشند (هر دو مثبت یا منفی)، F_{12} مثبت (دافعه)؛ و اگر q_1 و q_2 مختلف‌العلامه باشند، F_{12} منفی (جاذبه) خواهد بود. الکتریسیته ساکن می‌تواند از قانون کولمب به تعریف شدت میدان الکتریکی E ، پتانسیل الکتریکی عددی V ، و چگالی شار الکتریکی D پیش رود و سپس به قانون گوس و

† A. Klinkenberg and J. L. van der Minne, *Electrostatics in the Petroleum Industry*, Elsevier, Amsterdam, 1958. J. H. Dessauer and H. E. Clark, *Xerography and Related Processes*, Focal Press, London, 1965. A. D. Moore (Ed.), *Electrostatics and its Applications*, John Wiley, New York, 1973. C. E. Jewett, *Electrostatics in the Electronics Environment*, John Wiley, New York, 1976. J. C. Crowley, *Fundamentals of Applied Electrostatics*, John Wiley, New York, 1986.

۲- St. Elmo's fire

۱- Corona

۳- Xerography

۴- Ink jet printer

سایر روابط منجر گردد. این پیشروی به عنوان "روش منطقی" پذیرفته شده است، شاید به این دلیل که با یک قانون تجربی قابل مشاهده در آزمایشگاه و نه با برخی فرضیات مجرد آغاز می‌شود. با این وجود ادعا می‌کنیم که قانون کولمب، اگرچه بر اساس ظواهر تجربی است، در واقع یک اصل موضوعی می‌باشد. دو شرط قانون کولمب را در نظر بگیرید: اینکه اجسام باردار در مقایسه با فاصله بین آنها بسیار کوچک هستند و دیگر اینکه نیرو با مربع فاصله نسبت معکوس دارد. سؤالی در ارتباط با نخستین شرط مطرح می‌شود. اجسام باردار چقدر کوچک باشند تا اینکه در مقایسه با فاصله "بسیار کوچک" در نظر گرفته شوند؟ در عمل، اجسام باردار نمی‌توانند دارای ابعاد صفر باشند (بارهای نقطه‌ای ایده‌آل)، و در تعیین فاصله "واقعی" بین دو جسم با ابعاد معین مشکلاتی پیش می‌آید. برای اندازه‌های مشخص یک جسم، دقت نسبی در اندازه‌گیری فاصله، وقتی که فاصله بیشتر است بهتر می‌باشد. اما ملاحظات عملی (ضعف نیرو، وجود اجسام باردار فرعی و غیره) فاصله قابل استفاده را در آزمایشگاه محدود می‌سازند و خطاهای تجربی، کاملاً قابل اجتناب نخواهند بود. این مسئله به سؤال مهمتر دیگری در ارتباط با رابطه مربع معکوس در شرط دوم منتهی می‌گردد. حتی اگر اجسام باردار دارای اندازه‌های صفر باشند، اندازه‌گیری‌های تجربی دارای دقت نامحدود نخواهند بود، صرف‌نظر از اینکه تجربه و دقت آزمایشگر در چه حدی است. پس چگونه برای کولمب ممکن بود که بفهمد نیرو دقیقاً متناسب با مربع (و نه توان 2.000001 یا 1.999999) فاصله است؟ این سؤال نمی‌تواند از نظر تجربی پاسخ داده شود زیرا بنظر نمی‌رسد که در دوره کولمب آزمایشها می‌توانستند تا هفت رقم صحیح باشند.^۱ بنابراین باید نتیجه بگیریم که قانون کولمب خود یک فرضیه است و رابطه دقیق فرض شده توسط معادله (۱-۳) یک قانون طبیعت است که توسط کولمب و بر اساس آزمایشهای با صحت محدود او کشف و پذیرفته شده است. ما به جای دنبال کردن پیشرفت تاریخی الکتریسیته ساکن، موضوع را با فرض دیورژانس و کرل شدت میدان الکتریکی در فضای آزاد معرفی می‌نماییم. از قضیه هلم هولتز در بخش ۲-۱۲ می‌دانیم که یک میدان برداری، معین است اگر دیورژانس و کرل آن مشخص شده باشد. ما قوانین گوس و کولمب را از روی روابط دیورژانس و کرل استخراج می‌کنیم و آنها را به صورت فرضیات جداگانه مطرح نمی‌نماییم. مفهوم پتانسیل عددی طبیعتاً از یک اتحاد برداری نتیجه خواهد شد. رفتار میدان در محیط‌های مادی مطالعه شده و عبارات مربوط به انرژی و نیروهای الکتریسیته ساکن توسعه خواهد یافت.

† توان فاصله در قانون کولمب، با استفاده از آزمایش غیرمستقیم تا دقت یک واحد در 10^{16} برابر عدد ۲ بدست آمده است. (صفحه ۷۲۱، E. R. Williams, *phys. Rev. Letters*, Vol. 26. J. E. Faller, and H. A. Hall, چاپ ۱۹۷۱ را ببینید.)

۲-۳ فرضیات اصلی الکتریسیته ساکن در فضای آزاد

مطالعه الکترومغناطیس را با در نظر گرفتن میدانهای الکتریکی ناشی از بارهای الکتریکی مانا (ساکن) در فضای آزاد آغاز می‌کنیم. الکتریسیته ساکن در فضای آزاد ساده‌ترین حالت خاص الکترومغناطیس است. تنها لازم است یکی از چهار کمیت اصلی میدان برداری مدل الکترومغناطیس، مورد بحث در بخش ۱-۲ را در نظر بگیریم، یعنی شدت میدان الکتریکی E . علاوه از سه ثابت جهانی ذکر شده در بخش ۱-۳، تنها گذردهی فضای آزاد، ϵ_0 ، به فرمول‌بندی ما وارد می‌شود.

شدت میدان الکتریکی به صورت نیرو بر واحد بار، وارد بر بار ساکن آزمونی بسیار کوچک تعریف می‌شود، در صورتی که این بار در ناحیه‌ای که یک میدان الکتریکی وجود دارد قرار داده شود. یعنی:

$$E = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{F}{q} \quad (\text{V/m}) \quad (2-3)$$

در نتیجه، شدت میدان الکتریکی E ، متناسب و هم‌جهت نیروی F است. اگر F برحسب نیوتون (N) و بار q برحسب کولمب (C) بیان شود، آنگاه E برحسب نیوتون بر کولمب (N/C) که معادل ولت بر متر (V/m) است، اندازه‌گیری می‌شود. البته بار آزمونی q نمی‌تواند در عمل صفر باشد؛ در واقع نمی‌تواند کمتر از بار یک الکترون باشد. هر چند که محدود بودن بار الکتریکی باعث نمی‌شود مقدار اندازه‌گیری شده E اختلاف قابل ملاحظه‌ای با مقدار محاسبه شده آن داشته باشد، به شرطی که بار آزمونی آنقدر کوچک باشد که توزیع بار منبع را تغییر ندهد. رابطه معکوس معادله (۲-۳) نیروی F وارد بر یک بار ساکن q در میدان الکتریکی E را بدست می‌دهد:

$$F = qE \quad (N) \quad (3-3)$$

دو فرض اصلی الکتریسیته ساکن در فضای آزاد، دیورژانس و کرل E را مشخص می‌کنند:

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (4-3)$$

$$\nabla \times E = 0 \quad (5-3)$$

در معادله (۴-۳) ρ چگالی حجمی بار (C/m^3) و ϵ_0 گذردهی فضای آزاد، یک ثابت

۲-۳ فرضیات اصلی الکتریسیته ساکن در فضای آزاد

جهانی است. معادله (۳-۵) بیان می‌دارد که میدان الکتریکی ساکن، غیرگردشی است. در حالی که معادله (۳-۴) ایجاب می‌کند که میدان الکتریکی ساکن، سلونوئیدی نمی‌باشد مگر اینکه $\rho = 0$ باشد. این دو فرضیه، مختصر و مفید، ساده و مستقل از هر دستگاه مختصات هستند؛ و برای استخراج تمامی روابط، قوانین و قضایای دیگر الکتریسیته ساکن مورد استفاده قرار می‌گیرند! این زیبایی روش مبتنی بر فرضیات قیاسی است.

معادلات (۳-۴) و (۳-۵) روابط نقطه‌ای هستند؛ یعنی در هر نقطه از فضا برقرار می‌باشند. آنها را شکل دیفرانسیلی اصول موضوعی الکتریسیته ساکن می‌گویند، زیرا عملیات دیورژانس و کرل شامل مشتقات فضایی هستند. در کاربردهای عملی، معمولاً علاقه‌مندیم میدان کل ناشی از یک توده یا توزیع بار را پیدا کنیم. این کار توسط شکل انتگرالی معادله (۳-۴) به طور راحت‌تری انجام می‌گیرد. گرفتن انتگرال حجمی از دو طرف معادله (۳-۴) روی یک حجم دلخواه V نتیجه می‌دهد:

$$\int_V \nabla \cdot E \, dv = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho \, dv \quad (6-3)$$

از نظر قضیه دیورژانس در معادله (۲-۱۱۵)، معادله (۳-۶) به صورت زیر در می‌آید:

$$\oint_S E \cdot ds = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (7-3)$$

که در آن Q کل بار موجود در حجم V است که توسط سطح S احاطه شده است. معادله (۳-۷) شکلی از قانون گوس است، با این بیان که: شار کل خروجی شدت میدان الکتریکی از هر سطح بسته، در فضای آزاد، برابر کل بار داخل سطح تقسیم بر ϵ_0 است. قانون گوس، یکی از مهمترین روابط الکتریسیته ساکن است. بعداً در بخش ۲-۴، با مثالهای روشنگرانه‌ای آن را مورد بحث قرار خواهیم داد.

در مورد رابطه کرل معادله (۳-۵) نیز با انتگرال‌گیری $\nabla \times E$ روی یک سطح باز و بکارگیری قضیه استوکس به صورت بیان شده در معادله (۲-۱۴۳)، می‌توان شکل انتگرالی آن را بدست آورد. داریم

$$\oint_C E \cdot dl = 0 \quad (8-3)$$

انتگرال خطی روی یک مسیر بسته C که سطح دلخواهی را دربردارد گرفته می‌شود؛ بنابراین خود

† گذردهی فضای آزاد $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} \text{ (F/m)}$. معادله (۱۱-۱) را ببینید.

C نیز اختیاری است. در واقع خود سطح اصلاً در معادله (۸-۳) وارد نمی‌شود، بدین معنی که انتگرال خطی عددی شدت میدان الکتریکی ساکن دور هر مسیر بسته صفر است. حاصلضرب عددی $E \cdot dl$ که بر روی هر مسیر انتگرال‌گیری شود، ولتاژ در امتداد آن مسیر است. معادله (۸-۳) بیانی برای قانون ولتاژ کیرشوف در نظریه مدار است که بیان می‌دارد مجموع جبری افت ولتاژهای اطراف هر مسیر بسته صفر است. این مطلب بار دیگر در بخش ۵-۳ مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

معادله (۸-۳) راه دیگری برای بیان این مطلب است که E غیرگردشی (ذخیره‌شونده) است. با مراجعه به شکل ۳-۱ می‌بینیم که اگر انتگرال خطی عددی E روی مسیر بسته دلخواه C_1, C_2 صفر باشد، آنگاه

$$\int_{C_1} E \cdot dl + \int_{C_2} E \cdot dl = 0 \quad (۹-۳)$$

یا

$$\int_{P_1}^{P_2} E \cdot dl = - \int_{P_2}^{P_1} E \cdot dl \quad (۱۰-۳)$$

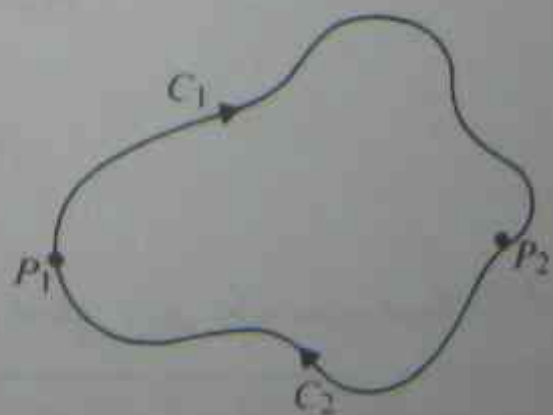
در امتداد C_1 در امتداد C_2

یا

$$\int_{P_1}^{P_2} E \cdot dl = \int_{P_1}^{P_2} E \cdot dl \quad (۱۱-۳)$$

در امتداد C_1 در امتداد C_2

معادله (۱۱-۳) بیان می‌دارد که انتگرال‌های خطی عددی میدان غیرگردشی E مستقل از مسیر است و تنها به نقاط انتهایی بستگی دارد. به طوری که در بخش ۵-۳ خواهیم دید، انتگرال معادله (۱۱-۳) بیانگر کار انجام شده توسط میدان الکتریکی برای حرکت دادن یک بار واحد از نقطه P_1 به نقطه P_2 است؛ از این رو معادلات (۸-۳) و (۹-۳) بیانی برای ذخیره‌سازی کار یا انرژی در یک میدان الکتریکی ساکن می‌باشند.



شکل ۳-۱ یک مسیر دلخواه

دو اصل موضوعی اساسی الکتریسیته ساکن در فضای آزاد را در زیر تکرار می‌نماییم، زیرا اینها شالوده‌ای را می‌سازند که بر روی آنها ساختار الکتریسیته ساکن را بنا خواهیم نهاد.

اصول موضوعی الکتریسیته ساکن در فضای آزاد	
شکل دیفرانسیلی	شکل انتگرالی
$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\oint_S E \cdot ds = \frac{Q}{\epsilon_0}$
$\nabla \times E = 0$	$\oint_C E \cdot dl = 0$

ما این اصول موضوعی را مانند اصل بقای بار به عنوان نمایی از قوانین طبیعت در نظر می‌گیریم. در بخش بعدی قانون کولمب را استخراج خواهیم کرد.

۳-۳ قانون کولمب

ساده‌ترین مسئله ممکن الکتریسیته ساکن را در نظر می‌گیریم. بار نقطه‌ای منفرد q در فضای آزاد بدون مرز در حال سکون است. برای یافتن شدت میدان الکتریکی ناشی از q ، سطح کروی فرضی به شعاع R و مرکز q را رسم می‌کنیم. چون بار نقطه‌ای دارای هیچ جهت خاصی نیست، میدان الکتریکی آن باید در همه جا شعاعی بوده و در همه نقاط روی سطح کره دارای شدت یکسان باشد. بکارگیری معادله (۷-۳) در شکل ۳-۲ (الف) نتیجه می‌دهد:

$$\oint_S E \cdot ds = \oint_S (a_R E_R) \cdot a_R ds = \frac{q}{\epsilon_0}$$

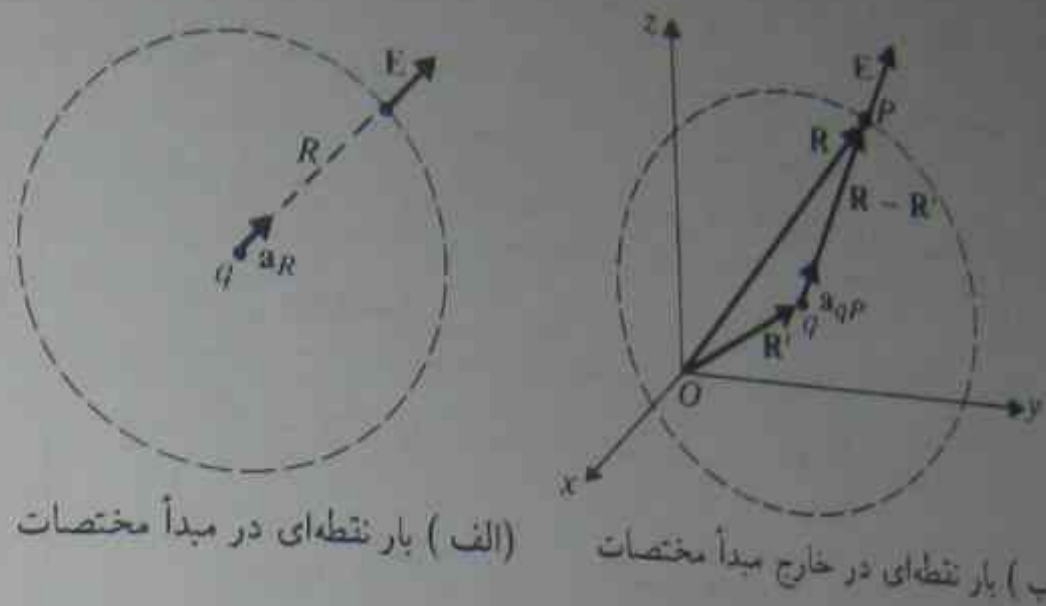
یا

$$E_R \oint_S ds = E_R (4\pi R^2) = \frac{q}{\epsilon_0}$$

بنابراین،

$$E = a_R E_R = a_R \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \quad (V/m) \quad (۱۲-۳)$$

معادله (۱۲-۳) بیان می‌دارد که شدت میدان الکتریکی یک بار نقطه‌ای مثبت در جهت شعاعی و به سمت خارج بوده، اندازه‌ای متناسب با بار و متناسب با معکوس مربع فاصله از بار دارد. این فرمول بسیار مهم و اساسی الکتریسیته ساکن است. با بکارگیری معادله (۲-۱۳۹) بسادگی تحقیق



شکل ۳-۲ شدت میدان الکتریکی ناشی از یک بار نقطه‌ای

می‌شود که در مورد E داده شده در معادله (۳-۱۲) داریم $\nabla \times E = 0$. نمودار خط شار شدت میدان الکتریکی یک بار نقطه‌ای مثبت به صورت شکل ۲-۲۵ (ب) خواهد بود. اگر بار q در مبدأ دستگاه مختصات انتخاب شده قرار نداشته باشد، تغییرات مناسبی در بردار واحد a_R و فاصله R باید صورت گیرد تا محل بار و موقعیت نقطه‌ای را که E در آن باید تعیین شود، منعکس نماید. فرض کنید مطابق شکل ۳-۲ (ب) بردار مکانی q برابر R' و بردار مکانی نقطه P برابر R باشد. آنگاه از معادله (۳-۱۲)،

$$E_P = a_{qP} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |R - R'|^2} \quad (3-13)$$

که در آن بردار واحد ترسیم شده از q به P است. چون

$$a_{qP} = \frac{R - R'}{|R - R'|} \quad (3-14)$$

داریم:

$$E_P = \frac{q(R - R')}{4\pi\epsilon_0 |R - R'|^3} \quad (\text{V/m}) \quad (3-15)$$

مثال ۳-۱ شدت میدان الکتریکی ناشی از بار نقطه‌ای $+5(\text{nC})$ واقع در محل $Q(0, 2, 0, 1, -2, 5)$ در هوا را در نقطه $P(-0, 2, 0, 1, -2, 3)$ تعیین کنید. تمام ابعاد بر حسب متر هستند. حل بردار مکانی نقطه P

$$R = \overline{OP} = -a_x \cdot 2 - a_z \cdot 2$$

بردار مکانی بار نقطه‌ای Q

$$R' = \overline{OQ} = a_x \cdot 2 + a_y \cdot 1 - a_z \cdot 2, 5$$

تفاضل آنها

$$R - R' = -a_x \cdot 2 - a_y \cdot 1 + a_z \cdot 2, 5$$

و اندازه آن برابر است با

$$|R - R'| = [(-2)^2 + (-1)^2 + (2,5)^2]^{1/2} = 3,458(\text{m})$$

جاگذاری در معادله (۳-۱۵) چنین بدست می‌دهد

$$E_P = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{q(R - R')}{|R - R'|^3} \\ = (9 \times 10^9) \frac{5 \times 10^{-9}}{3,458^3} (-a_x \cdot 2 - a_y \cdot 1 + a_z \cdot 2,5) \\ = 214,5(-a_x \cdot 1,873 - a_y \cdot 0,937 + a_z \cdot 1,427) \quad (\text{V/m})$$

کمیت داخل پرانتز، بردار واحد $a_{QP} = (R - R')/|R - R'|$ و E_P دارای اندازه $214,5(\text{V/m})$ است.

توجه: گذردهی هوا، تقریباً همان گذردهی فضای آزاد است. ضریب $1/(4\pi\epsilon_0)$ بدفعات در الکتریسیته ساکن ظاهر می‌شود. از معادله (۱-۱۱) می‌دانیم که $\epsilon_0 = 1/(c^2 \mu_0)$ اما در دستگاه واحدهای SI، $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}(\text{H/m})$ بنابراین، به‌طور دقیق داریم

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = \frac{\mu_0 c^2}{4\pi} = 10^{-7} c^2 \quad (\text{m/F}) \quad (3-16)$$

اگر از مقدار تقریبی $c = 3 \times 10^8(\text{m/s})$ استفاده کنیم، آنگاه $1/4\pi\epsilon_0 = 9 \times 10^9(\text{m/F})$. هنگامی که بار نقطه‌ای q_1 در میدان الکتریکی بار نقطه‌ای دیگر q_2 در مبدأ قرار می‌گیرد، نیروی F_{12} ناشی از E_{12} شدت میدان الکتریکی q_1 در محل q_2 به q_2 وارد می‌شود. ترکیب معادلات (۳-۲) و (۳-۱۲)، نتیجه می‌دهد

$$F_{12} = q_2 E_{12} = a_R \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 R^2} \quad (\text{N}) \quad (3-17)$$

معادله (۳-۱۷)، شکل ریاضی قانون کولمب است که قبلاً در بخش ۳-۱ در ارتباط با معادله (۳-۱) بیان گردیده بود. توجه کنید که توان R در نتیجه اصل موضوعی اساسی معادله (۳-۴)، دقیقاً برابر ۲ است. در دستگاه واحدهای SI، ضریب تناسب k برابر $1/(4\pi\epsilon_0)$ و نیرو

بر حسب نیوتون (N) می باشد.

مثال ۳-۳ بار کل Q بر روی پوسته کروی نازکی به شعاع b قرار داده شده است. شدت میدان الکتریکی را در نقطه دلخواهی در داخل پوسته تعیین کنید.

حل این مسئله را از دو طریق حل می کنیم.
الف) در هر نقطه ای چون P در داخل پوسته توخالی نشان داده شده در شکل ۳-۳، یک سطح بسته فرضی دلخواه (یک سطح گوسی) قابل ترسیم است که قانون گوس، معادله (۳-۷) را روی آن اعمال خواهیم نمود. چون هیچ باری در داخل پوسته وجود ندارد و سطح نیز اختیاری است، بسادگی نتیجه می شود که در تمام نقاط داخل پوسته، $E = 0$ است.

ب) حال بیایید مسئله را با جزئیات بیشتری مورد بررسی قرار دهیم. یک جفت مخروط جزئی به زاویه کنج $d\Omega$ ، با رأس هائی در نقطه دلخواه P را ترسیم کنید. این دو مخروط از دو طرف امتداد داشته و پوسته را در مساحت های ds_1 و ds_2 ، به ترتیب در فواصل r_1 و r_2 از نقطه P قطع می کنند. چون بار Q به طور یکنواختی بر روی پوسته کروی پراکنده است، چگالی بار سطحی، یکنواخت می باشد

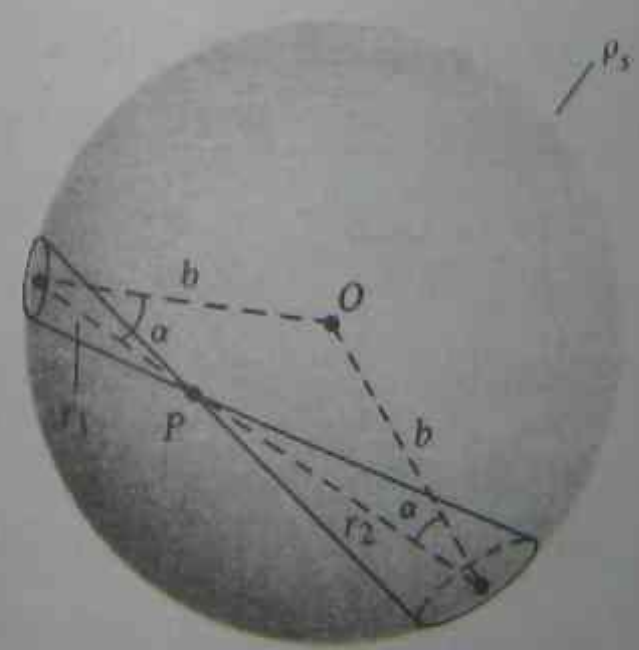
$$\rho_s = \frac{Q}{4\pi b^2} \quad (۱۸-۳)$$

اندازه شدت میدان الکتریکی در نقطه P ، ناشی از بارهای روی سطوح جزئی ds_1 و ds_2 با استفاده از معادله (۳-۱۲) برابر است با،

$$dE = \frac{\rho_s}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{ds_1}{r_1^2} - \frac{ds_2}{r_2^2} \right) \quad (۱۹-۳)$$

اما زاویه کنج $d\Omega$ برابر است با

$$d\Omega = \frac{ds_1}{r_1^2} \cos \alpha = \frac{ds_2}{r_2^2} \cos \alpha \quad (۲۰-۳)$$



شکل ۳-۳ یک پوسته باردار (مثال ۳-۳)

با ترکیب عبارات مربوط به dE و $d\Omega$ در می یابیم که

$$dE = \frac{\rho_s}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{d\Omega}{\cos \alpha} - \frac{d\Omega}{\cos \alpha} \right) = 0 \quad (۲۱-۳)$$

چون نتیجه فوق در هر جفت از مخروط های جزئی صادق است، نتیجه می گیریم که همچون گذشته، در داخل پوسته هادی هم جا $E = 0$ است.

توجه می شود که اگر قانون کولمب آن طوری که در معادله (۳-۱۲) بیان گردید و در معادله (۳-۱۹) بکار رفت، اندکی متفاوت با رابطه مربع معکوس می بود، جاگذاری معادله (۳-۲۰) که یک رابطه هندسی است، در معادله (۳-۱۹) به نتیجه $dE = 0$ منجر نمی گردید. در نتیجه، شدت میدان الکتریکی داخل پوسته صفر نمی بود؛ و در واقع، با محل نقطه P تغییر می کرد. در ابتدا کولمب با استفاده از یک ترازوی پیچشی^۱، که لزوماً دارای دقت محدودی بود، آزمایش خود را به انجام رسانید. با وجود این، وی آنقدر باهوش بود که قانون مربع معکوس را به عنوان یک اصل موضوعی فرض نماید. بسیاری از دانشمندان پس از او، از میدان صفر داخل پوسته کروی که در این مثال بیان گردید، برای اثبات قانون مربع معکوس استفاده کردند. میدان داخل یک پوسته کروی، در صورت وجود، می توانست با دقت بسیار بالائی توسط یک پروب از طریق حفرة کوچکی که در روی پوسته بوجود آورده می شود، آشکار شود.

مثال ۳-۳ سیستم انحراف الکترواستاتیکی یک نوسان نگار پرتو کاتدی را در شکل ۳-۴ ملاحظه می کنید. به الکترون های خارج شده از کاتد گرم، توسط آند با بار مثبت (نشان داده نشده است) سرعت اولیه $u_x = a_x u_0$ داده می شود. الکترون ها در نقطه $z = 0$ وارد ناحیه صفحات انحراف دهنده می شوند که در این ناحیه میدان الکتریکی یکنواخت $E_d = -a_y E_0$ در عرض w نگه داشته می شود. از اثرات جاذبه ای صرف نظر نموده، انحراف عمودی الکترون ها را روی پرده فلورسانت در $z = L$ بیابید.

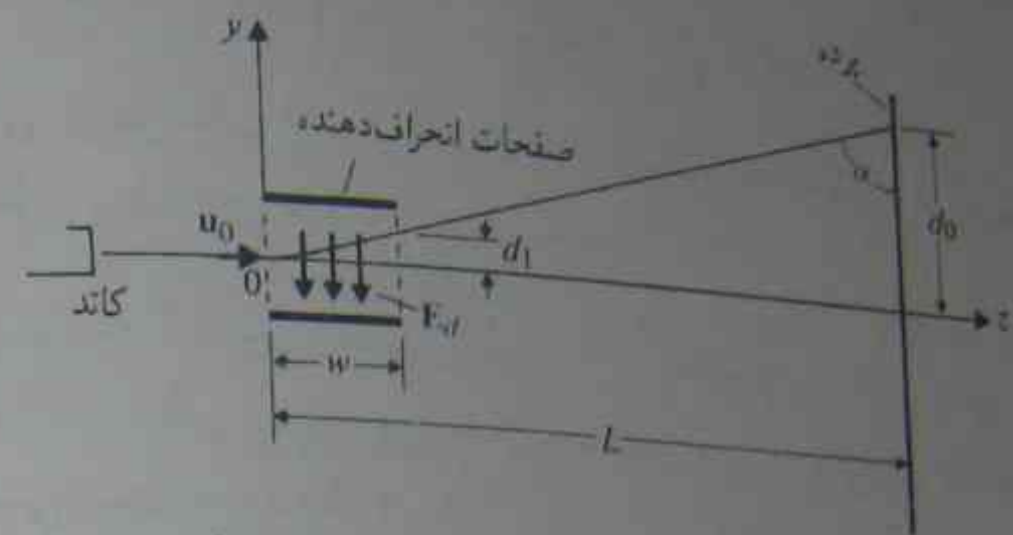
حل چون در ناحیه $z > 0$ ، نیروی در جهت z وجود ندارد، سرعت افقی u_x حفظ می شود. میدان E_d بر الکترون هائی که هر یک حامل بار $-e$ هستند نیروی وارد می کند و انحرافی در جهت y بوجود می آورد:

$$\mathbf{F} = (-e)\mathbf{E}_d = a_y e E_d$$

از قانون دوم حرکت نیوتون در جهت عمودی داریم

$$m \frac{du_y}{dt} = e E_d$$

۱. Torsion balance



شکل ۳-۴ سیستم انحراف الکترواستاتیکی یک نوسان‌نگار پرتو کاتدی (مثال ۳-۳)

که در آن جرم یک الکترون است. انتگرال‌گیری از دو طرف تساوی فوق نتیجه می‌دهد

$$u_y = \frac{dy}{dt} = \frac{e}{m} E_d t$$

که ثابت انتگرال‌گیری در آن صفر است زیرا در $t = 0$ ، $u_y = 0$ می‌باشد. با انتگرال‌گیری دوباره خواهیم داشت

$$y = \frac{e}{2m} E_d t^2$$

ثابت انتگرال‌گیری دوباره صفر است زیرا در $t = 0$ ، $y = 0$ می‌باشد. دقت کنید که مسیر حرکت الکترون بین صفحات انحراف‌دهنده سهمی شکل است. در نقطه خروج از صفحات انحراف‌دهنده، $t = w/u_x$.

$$d_1 = \frac{e E_d}{2m} \left(\frac{w}{u_x} \right)^2$$

$$u_{y1} = u_y \left(t = \frac{w}{u_x} \right) = \frac{e E_d}{m} \left(\frac{w}{u_x} \right)$$

وقتی الکترون‌ها به برده می‌رسند، فاصله افقی دیگری را به اندازه $(L - w)$ در مدت زمان $(L - w)/u_x$ طی کرده‌اند. در طول این فاصله زمانی انحراف عمودی دیگری به اندازه

$$d_2 = u_{y1} \left(\frac{L - w}{u_x} \right) = \frac{e E_d w (L - w)}{m u_x^2}$$

وجود داشته است. از این رو انحراف روی برده برابر است با

$$d_s = d_1 + d_2 = \frac{e E_d w (L - w)}{m u_x^2}$$

چاپگرهای یا جریان مرکب، که در خروجی کامپیوترها بکار برده می‌شوند، مانند نوسان‌نگار پرتو کاتدی، ادواتی هستند که بر اساس اصول انحراف الکترواستاتیکی سیلی از ذرات باردار عمل می‌کنند. قطرات بسیار ریزی از مرکب از طریق ارتعاش یک شیوره که توسط یک مبدل پیزوالکتریک کنترل شده است، تحت تأثیر قرار می‌گیرند. خروجی کامپیوتر مقادیر متغیری از بارها را روی قطرات بسیار ریز مرکب تقسیم می‌کند، که سپس از میان یک جفت صفحه انحراف‌دهنده که میدان الکتریکی ساکن یکنواختی در آنجا وجود دارد، عبور می‌کنند. مقدار انحراف قطرات بسیار ریز به بار حامل آنها بستگی دارد و موجب می‌شود که جریان پرفشار مرکب به صفحه چاپی بخورد و با پیشروی سر چاپگر در جهت افقی، تصویری بوجود بیاورد.

۳-۳-۱ میدان الکتریکی ناشی از مجموعه بارهای گسسته

فرض کنید یک میدان الکتریکی ساکن توسط مجموعه‌ای از n بار نقطه‌ای گسسته q_1, q_2, \dots, q_n واقع در محل‌های متفاوت بوجود آمده باشد. چون شدت میدان الکتریکی، تابعی خطی از (متناسب با) a_{Rq}/R^2 است، اصل جمع آثار برقرار می‌باشد و میدان کل E در هر نقطه جمع برداری میدانهای ناشی از بارهای منفرد است. با استفاده از معادله (۳-۱۵)، شدت میدان الکتریکی در یک نقطه میدان با بردار مکانی R به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^n \frac{q_k (R - R'_k)}{|R - R'_k|^3} \quad (V/m) \quad (۳-۲۲)$$

اگرچه معادله (۳-۲۲) یک عبارت فشرده و مختصر است، استفاده از آن قدری مشکل می‌باشد، زیرا لازم است بردارهایی را با اندازه و جهت متفاوت با هم جمع کنیم.

فرض کنید حالت ساده یک دوقطبی الکتریکی را در نظر بگیریم که از یک جفت بار مساوی و مختلف‌العلامت $+q$ و $-q$ به فاصله کوچک d از یکدیگر مطابق شکل ۳-۵ تشکیل می‌شود. مرکز دوقطبی را منطبق بر مبدأ دستگاه مختصات کروی در نظر بگیرید. در این صورت میدان E در نقطه P ، جمع سهم‌های میدانهای ناشی از $+q$ و $-q$ است. از این رو،

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{R - \frac{d}{2}\hat{y}}{\left| R - \frac{d}{2}\hat{y} \right|^2} - \frac{R + \frac{d}{2}\hat{y}}{\left| R + \frac{d}{2}\hat{y} \right|^2} \right\} \quad (۳-۲۳)$$

اگر $d \ll R$ باشد، نخستین جمله سمت راست معادله (۳-۲۳) می‌تواند ساده شود. می‌نویسیم

$$\begin{aligned} \left| R - \frac{d}{\gamma} \right|^{-\tau} &= \left[\left(R - \frac{d}{\gamma} \right) \cdot \left(R - \frac{d}{\gamma} \right) \right]^{-\tau/2} \\ &= \left[R^2 - R \cdot d + \frac{d^2}{\gamma^2} \right]^{-\tau/2} \\ &\cong R^{-\tau} \left[1 - \frac{R \cdot d}{R^2} \right]^{-\tau/2} \\ &\cong R^{-\tau} \left[1 + \frac{\tau R \cdot d}{R^2} \right] \end{aligned} \quad (24-3)$$

که در آن از بسط دو جمله‌ای استفاده شده و از توان‌های دوم و بالاتر (d/R) صرف‌نظر شده است. به‌طور مشابه، در مورد جمله دوم طرف راست معادله (۲۳-۳) داریم

$$\left| R + \frac{d}{\gamma} \right|^{-\tau} \cong R^{-\tau} \left[1 - \frac{\tau R \cdot d}{R^2} \right] \quad (25-3)$$

جاگذاری معادلات (۲۴-۳) و (۲۵-۳) در معادله (۲۳-۳) نتیجه می‌دهد

$$E \cong \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \left[\tau \frac{R \cdot d}{R^2} R - d \right] \quad (26-3)$$

استخراج و تفسیر معادله (۲۶-۳) به عملیات کمیات برداری نیاز دارد. می‌توان انتظار داشت که تعیین میدان الکتریکی ناشی از سه بار گسسته یا بیشتر مشکل‌تر باشد. در بخش ۳-۵، مفهوم پتانسیل الکتریکی عددی را معرفی خواهیم کرد، و با استفاده از آن، شدت میدان الکتریکی ناشی از هر توزیع بار به شکل ساده‌تری بدست خواهد آمد.

دوقطبی الکتریکی در مطالعه میدان الکتریکی محیط‌های دی‌الکتریک (عایق)، عنصر مهمی است. حاصلضرب بار q و بردار d (از $-q$ به $+q$) را گشتاور دوقطبی الکتریکی p می‌نامیم:

$$p = qd \quad (27-3)$$

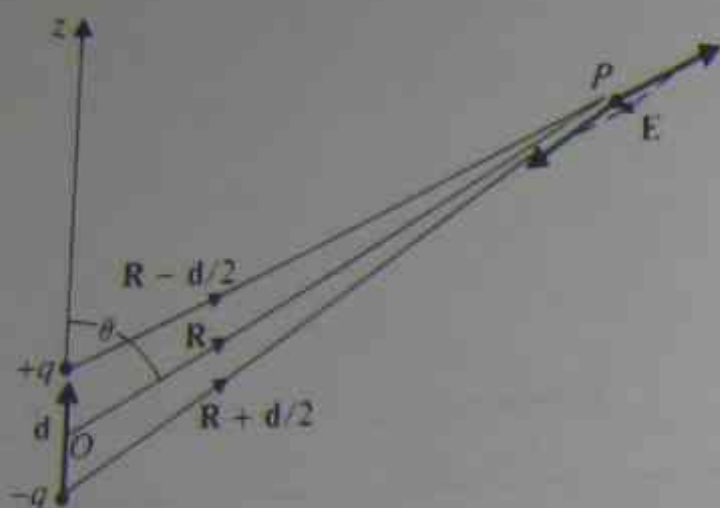
از این رو معادله (۲۶-۳) می‌تواند به صورت زیر نوشته شود

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^2} \left[\tau \frac{R \cdot p}{R^2} R - p \right] \quad (28-3)$$

که در آن علامت تقریب (\sim) روی علامت مساوی، جهت سادگی حذف شده است. اگر دوقطبی، مطابق شکل ۵-۳ در امتداد محور z قرار داشته باشد، آنگاه (معادله ۲-۷۷ را ببینید)

$$p = a_z p = p(a_R \cos \theta - a_\theta \sin \theta) \quad (29-3)$$

$$R \cdot p = Rp \cos \theta \quad (30-3)$$



شکل ۳-۵ میدان الکتریکی یک دوقطبی

و معادله (۲۸-۳) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$E = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 R^3} (a_R \tau \cos \theta + a_\theta \sin \theta) \quad (V/m) \quad (31-3)$$

معادله (۳۱-۳) شدت میدان الکتریکی یک دوقطبی الکتریکی را در مختصات کروی بدست می‌دهد. می‌بینیم که E در یک دوقطبی با مکعب فاصله R نسبت معکوس دارد. این نتیجه منطقی است زیرا با افزایش R ، میدان ناشی از بارهای کم فاصله $+q$ و $-q$ تمایل به حذف کامل یکدیگر دارند. از این رو سریع‌تر از میدان یک بار نقطه‌ای منفرد کاهش می‌یابد.

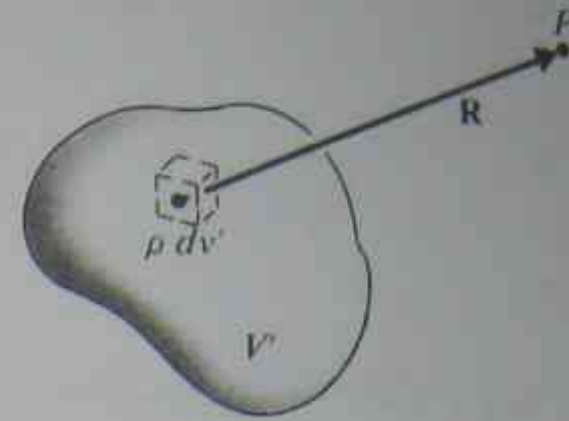
۳-۳-۲ میدان الکتریکی ناشی از توزیع پیوسته بار

میدان الکتریکی ناشی از یک توزیع پیوسته بار، می‌تواند با انتگرال‌گیری (جمع آثار) سهم میدان یک جزء کوچک بار روی توزیع بار بدست آید. به شکل ۳-۶ که در آن یک توزیع بار حجمی نشان داده شده است مراجعه کنید. توزیع بار حجمی ρ (C/m^3)، تابعی از مختصات است. چون یک جزء کوچک دیفرانسیلی بار مانند یک بار نقطه‌ای رفتار می‌کند، سهم بار $\rho dv'$ موجود در جزء کوچک حجمی دیفرانسیلی dv' ، در شدت میدان الکتریکی نقطه میدان P به صورت زیر است

$$dE = a_R \frac{\rho dv'}{4\pi\epsilon_0 R^2} \quad (32-3)$$

داریم

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V a_R \frac{\rho}{R^2} dv' \quad (V/m) \quad (33-3)$$



شکل ۳-۶ میدان الکتریکی ناشی از توزیع بیوسه بار

یا چون $a_R = R/R$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \rho \frac{R}{R^3} dv' \quad (V/m) \quad (22-3)$$

گرفتن انتگرال سه گانه برداری معادله (۲۳-۳) یا (۲۴-۳)، مگر در چند مورد خاص ساده، بسادگی قابل انجام نمی باشد. زیرا به طور کلی هر سه کمیت عبارت مورد انتگرال گیری (R و $\rho \cdot a_R$) با محل حجم دیفرانسیلی dv' تغییر می کنند.

اگر بار روی یک سطح با چگالی بار سطحی $\rho_s (C/m^2)$ توزیع شده باشد، انتگرال گیری باید روی سطح (نه لزوماً مسطح) انجام گیرد. از این رو،

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S'} a_R \frac{\rho_s}{R^2} ds' \quad (V/m) \quad (25-3)$$

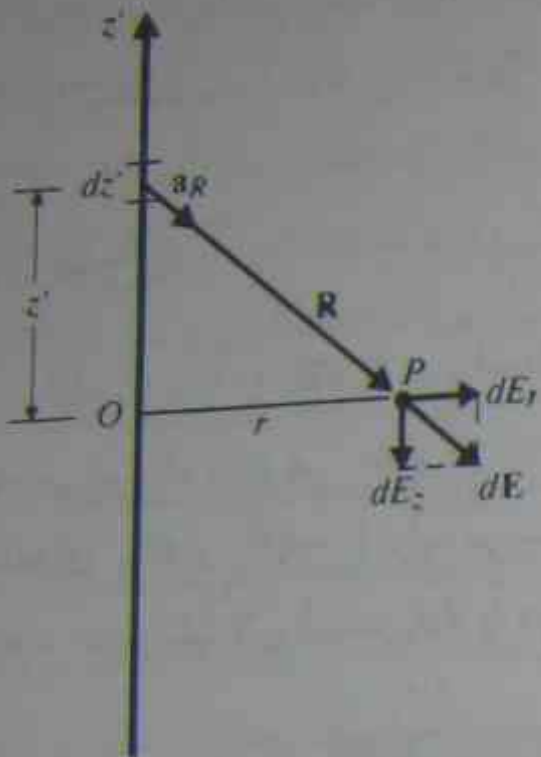
در مورد بار خطی داریم

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{L'} a_R \frac{\rho_l}{R^2} dl' \quad (V/m) \quad (26-3)$$

که $\rho_l (C/m)$ در آن چگالی بار خطی و L' خط (نه لزوماً مستقیم) توزیع بار است.

مثال ۴-۳ شدت میدان الکتریکی یک بار خطی مستقیم و به طول بینهایت را با چگالی یکنواخت ρ_l در هوا تعیین نمایید.

حل فرض کنید بار خطی مطابق شکل ۷-۲ در امتداد محور z' قرار داشته باشد. (در انجام این



شکل ۳-۷ یک بار خطی مستقیم و بینهایت طول

فرض کاملاً آزاد هستیم زیرا روشن است که میدان به چگونگی انتخاب خط بستگی ندارد. به صورت یک قرارداد چنین پذیرفته شده است که هر وقت احتمال اشتباه وجود دارد، مختصات پریم دار را برای نقاط منابع و مختصات بدون پریم را برای نقاط میدان بکار می بریم. مسئله از ما می خواهد که شدت میدان الکتریکی را در نقطه P ، به فاصله r از خط بیابیم. چون مسئله دارای تقارن استوانه ای است (یعنی میدان الکتریکی مستقل از زاویه سمت ϕ' است)، کار کردن در مختصات استوانه ای راحت تر خواهد بود. معادله (۲۶-۳) را به صورت زیر بازنویسی می کنیم

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{L'} \rho_l \frac{R}{R^3} dl' \quad (V/m) \quad (27-3)$$

در مسئله حاضر، ρ_l ثابت بوده، و جزء کوچک خطی $dl' = dz'$ در فاصله دلخواه z' از مبدأ انتخاب می شود. اهمیت بسیار دارد که بخاطر داشته باشیم R بردار فاصله از منبع به سمت نقطه میدان است، نه در سمت دیگر. داریم

$$R = a_r r - a_z z' \quad (28-3)$$

میدان الکتریکی dE ناشی از جزء کوچک بار خطی دیفرانسیلی، $\rho_l dz' = \rho_l dl'$ برابر است با

$$dE = \frac{\rho_l dz'}{4\pi\epsilon_0} \frac{a_r r - a_z z'}{(r^2 + z'^2)^{3/2}} \quad (29-3)$$

$$= a_r dE_r + a_z dE_z$$

که در آن

$$dE_r = \frac{\rho_l r dz'}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + z'^2)^{3/2}} \quad (۳-۳۹ \text{ الف})$$

و

$$dE_z = \frac{-\rho_l z' dz'}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + z'^2)^{3/2}} \quad (۳-۳۹ \text{ ب})$$

در معادله (۳-۳۹) dE_r را به مؤلفه‌های آن در جهت‌های a_r و a_z تجزیه نموده‌ایم. بسادگی دیده می‌شود که برای هر $\rho_l dz'$ در $+z'$ جزء کوچک بار $\rho_l dz'$ در $-z'$ وجود دارد، که dE_r با مؤلفه‌های dE_r و $-dE_z$ را تولید می‌نماید. از این رو مؤلفه‌های a_z در فرآیند انتگرال‌گیری حذف خواهند شد و تنها لازم است dE_r را در معادله (۳-۳۹ الف) مورد انتگرال‌گیری قرار دهیم:

$$E = a_r E_r = a_r \frac{\rho_l r}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz'}{(r^2 + z'^2)^{3/2}}$$

یا

$$E = a_r \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0 r} \quad (\text{V/m}) \quad (۳-۴۰)$$

معادله (۳-۴۰) در مورد خط بار بینهایت، نتیجه مهمی است. البته هیچ خط بار فیزیکی دارای طول بینهایت نیست؛ با این وجود، معادله (۳-۴۰) تقریبی برای میدان E یک بار خطی مستقیم طولی در نقطه‌ای نزدیک بار خطی است.

۴-۳ قانون گوس و کاربردهای آن

با بکارگیری قضیه دیورژانس در مورد اصل موضوعی دیورژانس الکتریسیته ساکن (معادله ۳-۲)، قانون گوس مستقیماً نتیجه می‌شود. این کار قبلاً در بخش ۳-۲ به صورت معادله (۳-۷) انجام شده و به دلیل اهمیت، دوباره آن را تکرار می‌کنیم:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (۳-۴۱)$$

قانون گوس بیان می‌دارد که، شار کل خروجی میدان E از هر سطح بسته در فضای آزاد، برابر کل بار داخل سطح، تقسیم بر ϵ_0 است. توجه می‌کنیم که سطح S می‌تواند هر سطح بسته فرضی (ریاضی) باشد که به دلیل راحتی انتخاب شده است و لازم نیست که یک سطح فیزیکی باشد، و اغلب هم همین‌طور است.

قانون گوس در تعیین میدان E توزیع بارهائی که دارای برخی شرایط تقارنی هستند، سودمندی خاصی دارد. مثلاً اگر مؤلفه عمودی شدت میدان الکتریکی روی سطح بسته‌ای ثابت باشد. در چنین مواردی، انتگرال سطحی سمت چپ معادله (۳-۴۱) بسادگی قابل محاسبه است، و قانون گوس روش بسیار مؤثرتری برای یافتن شدت میدان الکتریکی نسبت به معادلات (۳-۳) تا (۳-۲۷) خواهد بود. از سوی دیگر، وقتی شرایط تقارنی وجود ندارد، قانون گوس کمک زیادی نخواهد کرد. جوهره بکارگیری قانون گوس نخست در تشخیص شرایط تقارنی و دوم در انتخاب مناسب سطحی که روی آن مؤلفه عمودی E ناشی از یک توزیع بار مشخص ثابت است، قرار دارد. چنین سطحی را سطح گوسی می‌نامند. این اصل اساسی برای بدست آوردن معادله (۳-۱۲) در مورد بار نقطه‌ای دارای تقارن کروی بکار گرفته می‌شود؛ در نتیجه، سطح گوسی مناسب آن، سطح کره‌ای به مرکز بار نقطه‌ای است. قانون گوس در استخراج معادله (۳-۲۶) یا (۳-۳۱) مربوط به یک دوقطبی الکتریکی کمکی نمی‌توانست بکند، زیرا سطحی حول یک جفت بار مجزای مساوی و مختلف‌العلامه به طوری که روی آن مؤلفه عمودی E ثابت باشد، شناخته شده نبود.

مثال ۳-۵ با استفاده از قانون گوس، شدت میدان الکتریکی یک بار خطی مستقیم و بینهایت طولی را با چگالی یکنواخت ρ_l در هوا، تعیین کنید.

حل این مسئله را در مثال ۳-۴ با استفاده از معادله (۳-۳۶) حل کردیم. چون بار خطی، بینهایت طولی است، میدان برآیند E باید شعاعی و عمود بر بار خطی باشد ($E = a_r E_r$)، و مؤلفه E در امتداد خط نمی‌تواند وجود داشته باشد. با استفاده از تقارن واضح استوانه‌ای، سطح گوسی استوانه‌ای به شعاع r و طول دلخواه L را با محور بار خطی مطابق شکل ۳-۸ تشکیل می‌دهیم. روی این سطح E_r ثابت است، و $ds = a_r r d\phi dz$ (از معادله ۳-۵۲ الف) داریم.

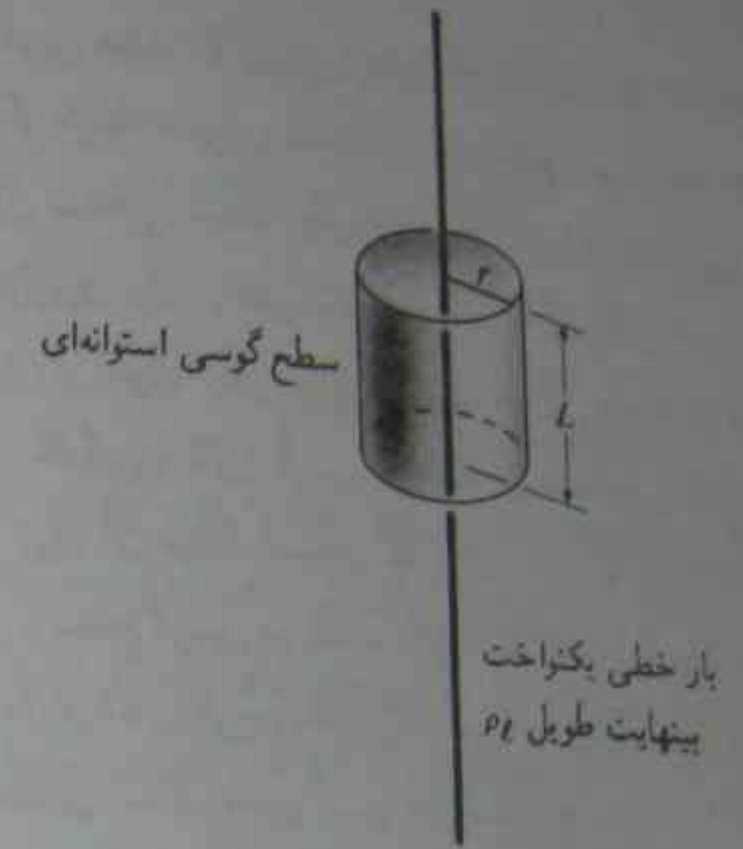
$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^L \int_0^{2\pi} E_r r d\phi dz = 2\pi r L E_r$$

سطوح بالا یا پایین استوانه سهمی نخواهند داشت، زیرا روی سطح بالایی $ds = a_z r dr d\phi$ اما E در آنجا مؤلفه z نداشته و $E \cdot ds = 0$ ، روی سطح پایین به‌طور مشابه همین مطلب برقرار است. کل بار محصور در استوانه $Q = \rho_l L$ است. جاگذاری در معادله (۳-۴۱) فوراً نتیجه می‌دهد

$$2\pi r L E_r = \frac{\rho_l L}{\epsilon_0}$$

یا

$$E = a_r E_r = a_r \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0 r}$$



شکل ۸-۳ بکارگیری قانون گوس در مورد یک بار خطی بینهایت طولی (مثال ۵-۳)

البته این نتیجه همان معادله (۳-۴۰) است که در اینجا به صورت بسیار ساده‌تری بدست آمده است. توجه می‌کنیم که طول L سطح گوسی استوانه‌ای در رابطه نهائی ظاهر نمی‌شود؛ از این رو می‌توانیم استوانه‌ای به طول واحد اختیار کنیم.

مثال ۶-۳ شدت میدان الکتریکی یک بار مسطح بینهایت با چگالی بار سطحی یکنواخت ρ_s را تعیین کنید.

حل روشن است که میدان E ناشی از یک صفحه بار بینهایت عمود بر صفحه است. از معادله (۳-۳۵) می‌توان برای یافتن E استفاده کرد. اما این کار شامل یک انتگرال‌گیری دوگانه بین حدود بینهایت از عبارت کلی $1/R^2$ خواهد بود. در اینجا از قانون گوس با امتیازات بسیاری می‌توان سود برد.

به عنوان سطح گوسی، از یک جعبه مستطیلی با دو سطح بالا و پایینی که دارای مساحت دلخواه A بوده و از بار صفحه‌ای مطابق شکل ۹-۳ هم فاصله هستند، استفاده می‌کنیم. وجوه جانبی جعبه عمود بر صفحه باردار هستند. اگر صفحه باردار بر صفحه xy منطبق باشد، آنگاه روی سطح بالائی داریم.

$$E \cdot ds = (a_z E_z) \cdot (a_z ds) = E_z ds$$

و روی سطح پایینی

$$E \cdot ds = (-a_z E_z) \cdot (-a_z ds) = E_z ds$$

از آنجائی که سطوح جانبی اثری ندارند، داریم

$$\oint_S E \cdot ds = \int_A \rho_s ds = \rho_s A$$

کل بار محصور در جعبه برابر $Q = \rho_s A$ است. بنابراین

$$\rho_s A = \epsilon_0 \int_A E_z ds$$

و از روی آن داریم

$$E = a_z E_z = a_z \frac{\rho_s}{\epsilon_0} \quad z > 0$$

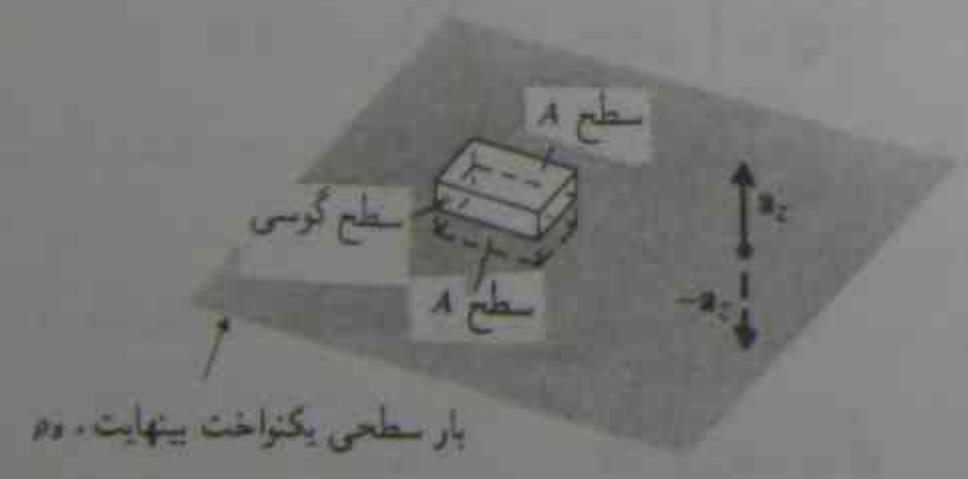
(۳-۴۲ الف)

$$E = -a_z E_z = -a_z \frac{\rho_s}{\epsilon_0} \quad z < 0$$

(۳-۴۲ ب)

البته ممکن است صفحه باردار بر صفحه xy منطبق نباشد. (در این صورت راجع به بالا و پایین صفحه صحبت نمی‌کنیم) اما اگر ρ_s مثبت باشد، میدان E همیشه به سمت خارج صفحه خواهد بود. بدیهی است که سطح گوسی می‌تواند یک جعبه قرص به هر شکل و نه لزوماً مستطیلی باشد.

طرح روشنائی یک اداره، یا یک کلاس درس، ممکن است شامل لامپ‌های رشته‌ای، لامپ‌های مهتابی بلند یا لامپ‌های صفحه‌ای سقفی باشد. این لامپ‌ها به طور تقریبی به ترتیب متناظر با



شکل ۹-۳ بکارگیری قانون گوس در مورد یک بار صفحه‌ای بینهایت (مثال ۶-۳)

منابع نقطه‌ای، منابع خطی و منابع سطح هستند. از معادلات (۳-۱۲)، (۳-۴۰) و (۳-۴۲) می‌توان چنین برآورد کرد که در حالت لامپ‌های رشته‌ای، شدت نور به صورت توان دوم فاصله از منبع سرعت کاهش می‌یابد و برای لامپ‌های مهتابی بلند، به صورت توان اول فاصله با سرعت کمتر و برای لامپ‌های صفحه‌ای سفتی، به هیچ صورت پایین نمی‌افتد.

مثال ۳-۷ میدان ناشی از یک ابر الکتریکی با چگالی بار حجمی $\rho = -\rho_0$ در ناحیه $0 \leq R \leq b$ و $\rho = 0$ در ناحیه $R > b$ را تعیین کنید.

حل نخست تشخیص می‌دهیم که شرایط منبع مفروض دارای تقارن کروی است. بنابراین سطوح گوسی مناسب، باید سطوح کروی هم‌مرکزی باشند. میدان E باید در دو ناحیه تعیین شود. به شکل ۳-۱۰ مراجعه کنید.

الف) $0 \leq R \leq b$

سطح گوسی کروی فرضی S_i با $R < b$ را در داخل ابر الکتریکی می‌سازیم. روی این سطح E شعاعی و دارای اندازه ثابت است:

$$E = a_R E_R \quad ds = a_R ds$$

کل شار خروجی E برابر است با

$$\oint_{S_i} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = E_R \int_{S_i} ds = E_R 4\pi R^2$$

کل بار محصور در داخل سطح گوسی برابر است با

$$Q = \int_V \rho dv = -\rho_0 \int_V dv = -\rho_0 \frac{4\pi}{3} R^3$$

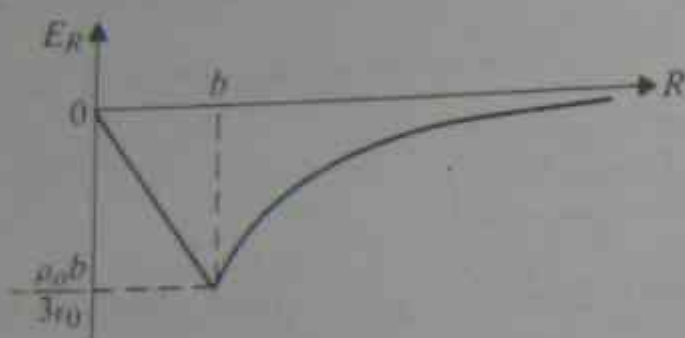
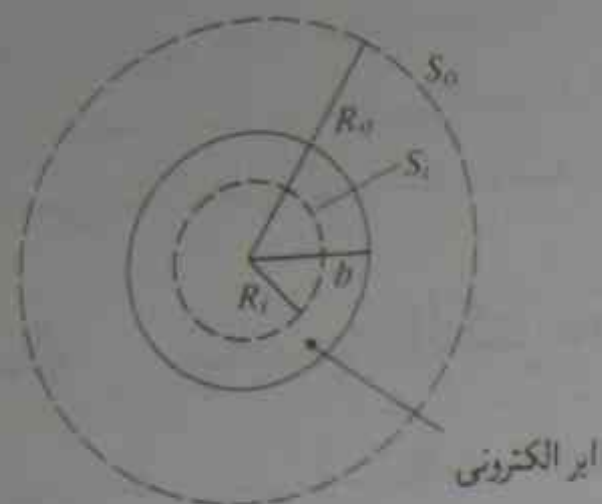
جاگذاری در معادله (۳-۷) نتیجه می‌دهد

$$E = -a_R \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} R \quad 0 \leq R \leq b$$

می‌بینیم که درون ابر الکتریکی یکنواخت، میدان E به سمت مرکز جهت یافته و دارای اندازه‌ای متناسب با فاصله از مرکز است.

ب) $R \geq b$

۳-۴ قانون گوس و کاربردهای آن



شکل ۳-۱۰ شدت میدان الکتریکی یک ابر الکتریکی کروی (مثال ۳-۷)

در این حالت، سطح گوسی کروی S_i با $R > b$ را در خارج ابر الکتریکی می‌سازیم. برای عبارت $\oint_{S_i} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ همان عبارت حالت (الف) را بدست می‌آوریم. کل بار محصور برابر است با

$$Q = -\rho_0 \frac{4\pi}{3} b^3$$

در نتیجه،

$$E = -a_R \frac{\rho_0 b^3}{3\epsilon_0 R^2} \quad R \geq b$$

که از قانون عکس مربع فاصله بیرونی می‌کند و می‌توانست مستقیماً از روی معادله (۳-۱۲) نتیجه‌گیری شود. ملاحظه می‌کنیم که بیرون ابر باردار، میدان E دقیقاً مشابه حالتی است که کل بار در یک بار نقطه‌ای واقع در مرکز متمرکز شده باشد. به طور کلی در مورد ناحیه باردار با تقارن کروی این مطلب صادق است؛ حتی اگر ρ تابعی از R باشد.

در شکل ۳-۱۰، تغییرات E_R بر حسب R رسم شده است. توجه کنید که حل رسمی این مسئله تنها چند خط است. اگر قانون گوس مورد استفاده قرار نمی‌گرفت، لازم بود (۱) جزء کوچک حجمی دیفرانسیلی دلخواهی را در داخل ابر الکتریکی انتخاب کنیم، (۲) بردار فاصله

E را از آن جزء کوچک تا یک نقطه میدان، در دستگاه مختصات انتخاب شده بیان نماییم، (۳-۲) یک انتگرال گیری سه گانه مطابق معادله (۳-۲۳) را بعمل آوریم. متأسفانه این یک فرآیند پیچیده و ناامیدکننده است. نتیجه چنین است: هرگاه شرایط تقارنی در یک توزیع بار مفروض، موجود بود، سعی کنید از قانون گوس استفاده کنید.

۵-۳ پتانسیل الکتریکی

در ارتباط با اتحاد صفر در معادله (۲-۱۴۵)، توجه کردیم که یک میدان برداری بدون کرل همواره می تواند به صورت گرادیان یک میدان عددی بیان شود. این امر ما را وادار می نماید که پتانسیل الکتریکی عددی V را به صورت زیر تعریف کنیم

$$\mathbf{E} = -\nabla V$$

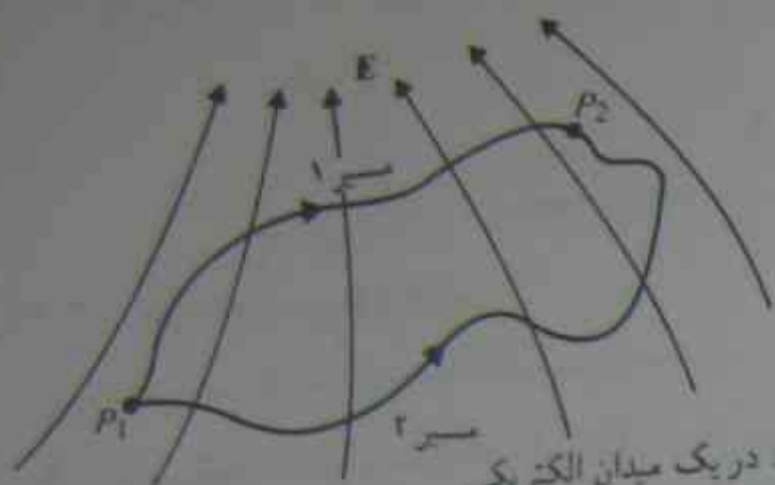
(۳-۴۳)

زیرا کار کردن با کمیت های عددی آسان تر از کار کردن با کمیت های برداری است. اگر بتوانیم V را به صورت ساده تری پیدا کنیم، آنگاه E با گرفتن گرادیان که در دستگاه مختصات متعامد عمل سراسری است پیدا خواهد شد. دلیل قراردادن علامت منفی در معادله (۳-۴۳) هم اکنون توضیح داده خواهد شد.

پتانسیل الکتریکی دارای مفهوم فیزیکی است، و به کار انجام شده در حمل یک بار از نقطه ای به نقطه دیگر مربوط می شود. در بخش ۳-۲ شدت میدان الکتریکی را به صورت نیروی مؤثر بر بار آزمون واحد تعریف کردیم. بنابراین، بهنگام حرکت دادن یک بار واحد از نقطه P_1 به نقطه P_2 در یک میدان الکتریکی، کار باید بر علیه میدان انجام شود و برابر است با

$$\frac{W}{q} = - \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (\text{J/C یا V}) \quad (۳-۴۴)$$

برای حرکت از P_1 به P_2 مسیرهای بسیاری ممکن است دنبال شوند. دو تا از این مسیرها را در شکل ۳-۱۱ رسم کرده ایم. چون مسیر بین P_1 و P_2 در معادله (۳-۴۴) مشخص نشده است، این پرسش طبعاً مطرح می شود، چگونه کار به مسیر انتخاب شده بستگی دارد؟ کمی اندیشه ما را به این نتیجه رهنمون می سازد که W/q در معادله (۳-۴۴) نباید به مسیر وابسته باشد؛ زیرا اگر وابستگی می داشت، یکی می توانست از نقطه P_1 به نقطه P_2 در مسیری که W کوچکتر است، برود و آنگاه از مسیری دیگر به P_1 بازگردد، و افزایش خالصی در کار یا انرژی کسب نماید. این با اصل بقای انرژی در تناقض است. ما قبلاً به ماهیت عدم وابستگی به مسیر در انتگرال عددی خطی میدان غیرگردشی (ابقائی) E ، بهنگام بحث در مورد معادله (۳-۸) اشاره کرده ایم.



شکل ۳-۱۱ دو مسیر منتهی شونده از P_1 به P_2 در یک میدان الکتریکی

مشابه مفهوم انرژی پتانسیل در مکانیک، معادله (۳-۴۴) اختلاف انرژی پتانسیل الکتریکی یک بار واحد را بین نقاط P_1 و P_2 مشخص می کند. با نمایش انرژی پتانسیل الکتریکی در واحد بار با V ، یا پتانسیل الکتریکی، داریم

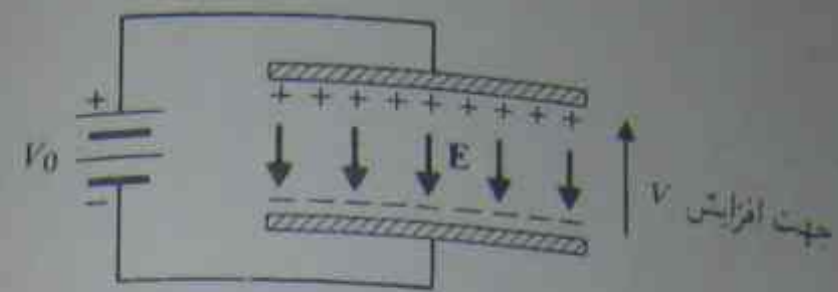
$$V_2 - V_1 = - \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (V) \quad (۳-۴۵)$$

به صورت ریاضی، معادله (۳-۴۵) می تواند با جاگذاری معادله (۳-۴۳) در معادله (۳-۴۴) بدست آید. از این رو با توجه به معادله (۲-۸۸) داریم

$$\begin{aligned} - \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= \int_{P_1}^{P_2} (\nabla V) \cdot (a_l d\mathbf{l}) \\ &= \int_{P_1}^{P_2} dV = V_2 - V_1 \end{aligned}$$

آنچه در معادله (۳-۴۵) تعریف کرده ایم، اختلاف پتانسیل (ولتاژ الکتریسیته ساکن) بین نقاط P_1 و P_2 است. صحبت کردن در مورد پتانسیل مطلق یک نقطه از صحبت کردن درباره فاز مطلق یک فازور یا ارتفاع مطلق یک منطقه جغرافیایی معنای بیشتری ندارد؛ نخست باید یک نقطه مرجع با پتانسیل صفر، یک فاز مرجع صفر (معمولاً در $t=0$)، یا یک ارتفاع مرجع صفر (معمولاً در سطح دریا) مشخص شده باشد. در اکثر (اما نه در همه) موارد، نقطه پتانسیل صفر در بینهایت فرض می شود. هنگامی که نقطه مرجع پتانسیل صفر در بینهایت نباشد، باید به طور مشخص بیان شود.

می خواهیم دو نکته دیگر را در مورد معادله (۳-۴۴) مطرح کنیم. نخست، وارد نمودن علامت منفی ضروری است تا با این قاعده که حرکت در جهت خلاف میدان E باعث افزایش پتانسیل



شکل ۳-۱۴ جهت‌های نسی E و افزایش V

الکتریکی V می‌شود. مطابقت داشته باشد. برای مثال، وقتی یک باطری c-d با ولتاژ V مطابق شکل ۳-۱۲ بین دو صفحه هادی موازی متصل می‌شود، بارهای مثبت و منفی به ترتیب روی صفحات بالایی و پایینی جمع می‌شوند. میدان E از بارهای مثبت به طرف بارهای منفی جهت می‌گیرد در حالی که پتانسیل در جهت مخالف افزایش می‌یابد. دوم، از بخش ۲-۶، وقتی که گرادیان یک میدان عددی را تعریف کردیم می‌دانیم که جهت ∇V عمود بر سطوح V ثابت است. از این رو اگر از خطوط میدان جهت‌دار یا خطوط جریان برای نمایش جهت میدان E استفاده کنیم، در تمام نقاط عمود بر خطوط و سطوح هم پتانسیل خواهند بود.

۳-۵-۱ پتانسیل الکتریکی ناشی از یک توزیع بار

پتانسیل الکتریکی یک نقطه به فاصله R از بار نقطه‌ای q نسبت به بینهایت، بسادگی از معادله (۳-۲۵) بدست می‌آید:

$$V = - \int_{\infty}^R \left(a_R \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \right) \cdot (a_R dR) \quad (3-26)$$

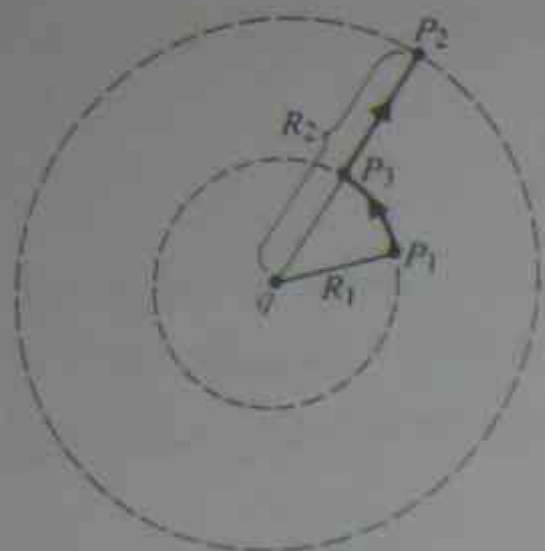
که نتیجه می‌دهد

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \quad (3-27)$$

این یک کمیت عددی است و علاوه بر q تنها به فاصله R بستگی دارد. اختلاف پتانسیل بین هر دو نقطه P_1 و P_2 به ترتیب در فواصل R_1 و R_2 از q برابر است با

$$V_{21} = V_{P_1} - V_{P_2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \quad (3-28)$$

این نتیجه ممکن است در نگاه اول کمی عجیب به نظر برسد، زیرا ممکن است P_1 و P_2 روی خط



شکل ۳-۱۳ مسیر انتگرال‌گیری حول یک بار نقطه‌ای

شعاعی یکسانی از q، مطابق شکل ۳-۱۳ قرار نداشته باشند. اما، دایره (کره)‌های هم‌مرکز گذرنده از P_1 و P_2 خطوط (سطوح) هم‌پتانسیل هستند و $V_{P_1} - V_{P_2}$ مشابه $V_{P_1} - V_{P_2}$ است. از نظر معادله (۳-۲۵)، می‌توانیم مسیر انتگرال‌گیری را از P_1 به P_2 و سپس از P_2 به P_1 انتخاب کنیم. از P_1 به P_2 کاری انجام نمی‌شود زیرا در امتداد مسیر دایره‌ای E بر $d\ell = a_\phi R_1 d\phi$ عمود است ($E \cdot d\ell = 0$).

پتانسیل الکتریکی در R ناشی از یک دستگاه از n بار نقطه‌ای گسته q_1, q_2, \dots, q_n و در محل‌های R'_1, R'_2, \dots, R'_n با استفاده از جمع آثار، برابر جمع پتانسیل‌های ناشی از هر یک از بارهاست:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^n \frac{q_k}{|R - R'_k|} \quad (3-29)$$

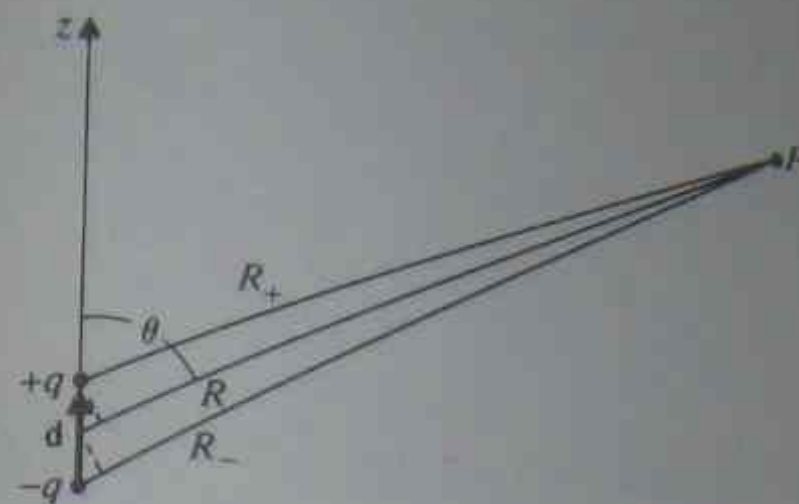
چون این یک جمع عددی است، معمولاً ساده‌تر است E را با گرفتن گرادیان منفی از V تعیین کنیم تا اینکه مستقیماً جمع برداری معادله (۳-۲۲) را بدست آوریم.

به عنوان یک مثال، گیریم بار دیگر یک دوقطبی الکتریکی متشکل از بارهای +q و -q، در فاصله ناچیز d از هم را در نظر بگیریم. فاصله بارها از نقطه میدان P را مطابق شکل ۳-۱۴، R_+ و R_- می‌نامیم. پتانسیل در نقطه P مستقیماً نوشته می‌شود:

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_+} - \frac{1}{R_-} \right) \quad (3-50)$$

اگر $d \ll R$ باشد، داریم

$$\frac{1}{R_+} \cong \left(R - \frac{d}{2} \cos\theta \right)^{-1} \cong R^{-1} \left(1 + \frac{d}{2R} \cos\theta \right) \quad (3-51)$$



شکل ۴-۱۴ یک دوقطبی الکتریکی

$$\frac{1}{R_-} \cong \left(R + \frac{d}{r} \cos \theta \right)^{-1} \cong R^{-1} \left(1 - \frac{d}{rR} \cos \theta \right) \quad (52-3)$$

جاگذاری معادلات (51-3) و (52-3) در معادله (50-3) نتیجه می دهد

$$V = \frac{qd \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 R^2} \quad (52-3 \text{ الف})$$

یا

$$V = \frac{p \cdot a_R}{4\pi\epsilon_0 R^2} \quad (V) \quad (52-3 \text{ ب})$$

که در آن $p = qd$ ، علامت "تقریب" (\sim) برای سادگی حذف شده است. میدان E از $-\nabla V$ قابل حصول است. در مختصات کروی داریم

$$E = -\nabla V = -a_R \frac{\partial V}{\partial R} - a_\theta \frac{\partial V}{R \partial \theta} \quad (52-3)$$

$$= \frac{p}{4\pi\epsilon_0 R^3} (a_R \cos \theta + a_\theta \sin \theta)$$

معادله (52-3) مشابه معادله (31-3) است، اما به روشی ساده تر بدون محاسبات بردارهای مکانی بدست آمده است.

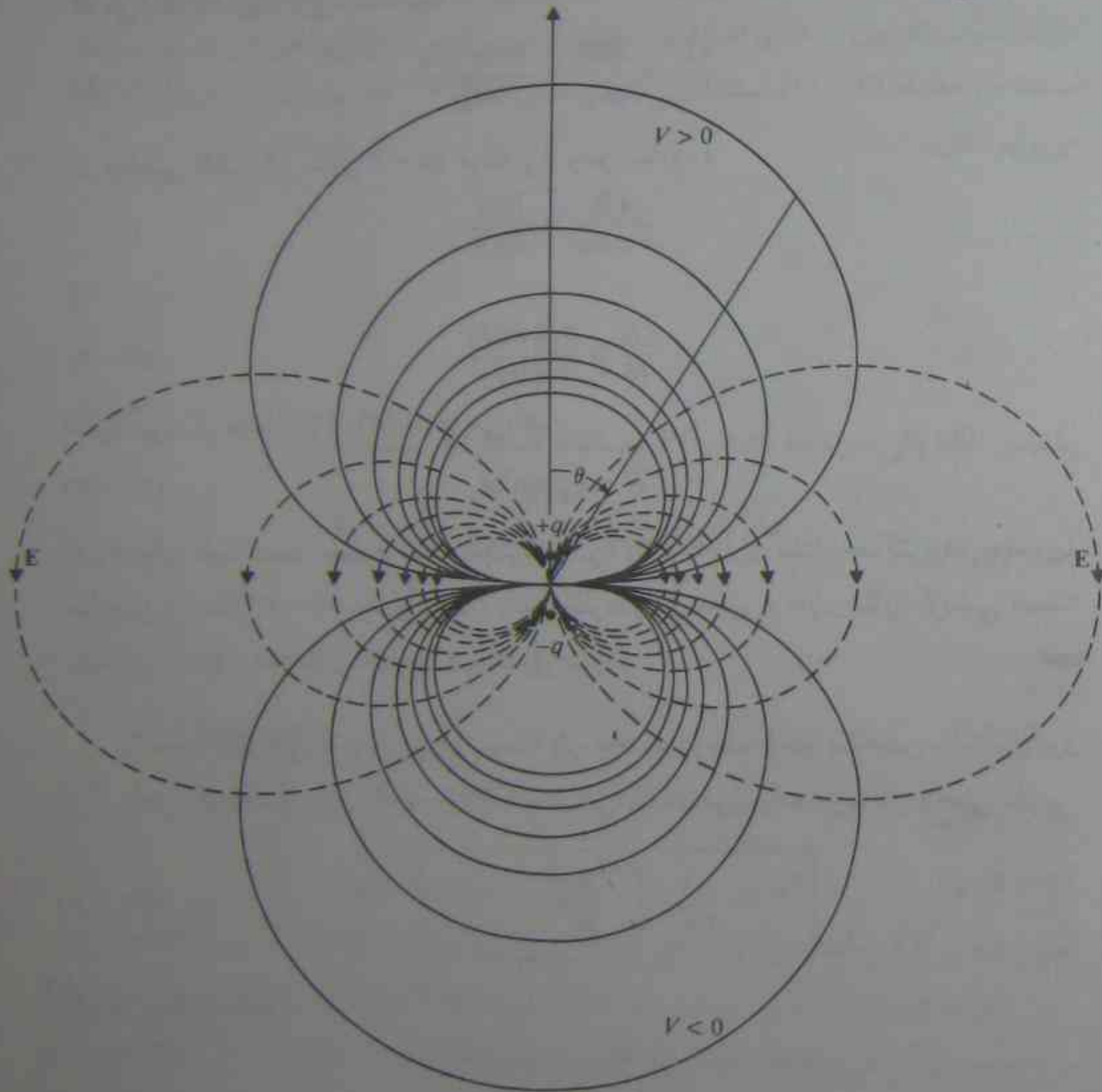
مثال ۸-۳ طرحی دوبعدی از خطوط همپتانسیل و خطوط میدان الکتریکی یک دوقطبی الکتریکی ترسیم نمایید.

حل معادله سطح همپتانسیل یک توزیع بار با مساوی قرار دادن عبارت V با یک ثابت بدست می آید. چون d و q در معادله (52-3 الف) در مورد یک دوقطبی الکتریکی کمیات ثابتی

هستند، یک V ثابت، نسبت ثابت $(\cos \theta / R^2)$ را ایجاد می کند. از این رو معادله یک سطح همپتانسیل برابر است با

$$R = c_V \sqrt{\cos \theta} \quad (55-3)$$

که در آن c_V ثابت است. با رسم R بر حسب θ ، به ازای مقادیر مختلف c_V ، خطوط همپتانسیل پررنگ شکل ۱۵-۳ را تشکیل می دهیم. در ناحیه $0 \leq \theta \leq \pi/2$ مثبت است؛ در $R, \theta = 0$ حداکثر و در $R, \theta = 90^\circ$ صفر است. در ناحیه $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$ که V منفی است، تصویر آینه ای بدست می آید.



شکل ۱۵-۳ خطوط همپتانسیل و میدان الکتریکی یک دوقطبی الکتریکی (مثال ۸-۳)

۳ میدانهای الکتریکی ساکن

خطوط میدان الکتریکی یا خطوط جریانی جهت میدان E را در فضا نشان می دهند. قرار

$$d\ell = kE$$

می دهیم

$$(56-3)$$

که k در آن ثابت است. معادله (۵۶-۳) در مختصات کروی به صورت زیر درمی آید (معادله

$$a_R dR + a_\theta R d\theta + a_\phi R \sin\theta d\phi = k(a_R E_R + a_\theta E_\theta + a_\phi E_\phi) \quad (57-3)$$

۲-۶۶ را ببینید).

که می تواند به صورت زیر نوشته شود

$$\frac{dR}{E_R} = \frac{R d\theta}{E_\theta} = \frac{R \sin\theta d\phi}{E_\phi} \quad (58-3)$$

در دو قطبی الکتریکی شکل ۱۵-۳ مؤلفه E_ϕ وجود ندارد، و

$$\frac{dR}{\epsilon \cos\theta} = \frac{R d\theta}{\sin\theta}$$

یا

$$\frac{dR}{R} = \frac{\epsilon d(\sin\theta)}{\sin\theta} \quad (59-3)$$

انتگرال گیری از معادله (۵۹-۳) نتیجه می دهد

$$R = c_E \sin^{\epsilon} \theta \quad (60-3)$$

که در آن، ثابت است. خطوط میدان الکتریکی در $\theta = \pi/2$ دارای مقدار حداکثر بوده، به صورت خط چین در شکل ۱۵-۳ ترسیم شده اند. این خطوط حول محور z دارای تقارن گردشی هستند (مستقل از ϕ) و همه جا بر خطوط هم پتانسیل عمودند.

پتانسیل الکتریکی ناشی از توزیع پیوسته بار، محدود در یک ناحیه مشخص با انتگرال گیری از تأثیر اجزاء کوچک بار روی ناحیه باردار بدست می آید. در مورد یک توزیع بار حجمی داریم،

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho}{R} dv' \quad (61-3)$$

برای توزیع بار سطحی،

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S'} \frac{\rho_s}{R} ds' \quad (62-3)$$

و برای بار خطی،

۵-۳ پتانسیل الکتریکی

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{L'} \frac{\rho_L dl'}{R} \quad (V) \quad (63-3)$$

بار دیگر در اینجا تذکر می دهیم که انتگرال های معادله (۶۱-۳) و (۶۲-۳) به ترتیب نشان دهنده انتگرال گیری سه بعدی و دوبعدی هستند.

مثال ۹-۳ فرمولی برای شدت میدان الکتریکی روی محور یک قرص مدور به شعاع b که حامل چگالی بار سطحی یکنواخت ρ_s است را بدست آورید.

حل اگرچه قرص دارای تقارن دایره ای است، نمی توانیم در پیرامون آن سطحی را تجسم کنیم که مؤلفه عمودی E روی آن دارای اندازه ثابت باشد؛ از این رو قانون گوس برای حل این مسئله سودمند نیست. از معادله (۶۲-۳) استفاده می کنیم. مطابق شکل ۱۶-۳ مختصات استوانه ای را بکار می بریم؛ داریم:

$$ds' = r' dr' d\phi'$$

و

$$R = \sqrt{z^2 + r'^2}$$

پتانسیل الکتریکی در نقطه $P(0,0,z)$ نسبت به نقطه ای در بینهایت برابر است با

$$V = \frac{\rho_s}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^b \frac{r'}{(z^2 + r'^2)^{3/2}} dr' d\phi' \quad (64-3)$$

$$= \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} [(z^2 + b^2)^{1/2} - |z|]$$

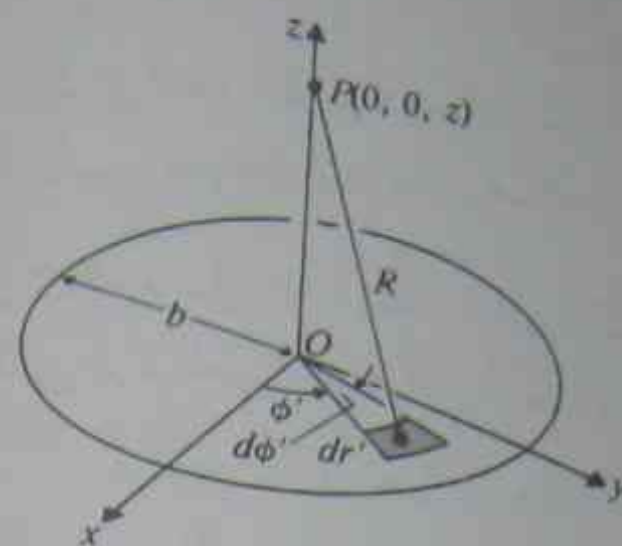
بنابراین،

$$E = -\nabla V = -a_z \frac{\partial V}{\partial z} = \begin{cases} a_z \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} [1 - z(z^2 + b^2)^{-1/2}] & z > 0 \\ -a_z \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} [1 + z(z^2 + b^2)^{-1/2}] & z < 0 \end{cases} \quad (65-3 \text{ الف})$$

$$(65-3 \text{ ب})$$

تعیین میدان E در نقطه ای خارج محور مسئله بسیار مشکل تری خواهد بود، می دانید چرا؟ برای مقادیر بسیار بزرگ z ، بهتر است جمله دوم در معادلات (۶۵-۳ الف) و (۶۵-۳ ب) را به صورت یک سری دو جمله ای بسط دهیم و از توان های دوم و بالاتر کسر (b^2/z^2) صرف نظر کنیم. داریم

$$z(z^2 + b^2)^{-1/2} = \left(1 + \frac{b^2}{z^2}\right)^{-1/2} \frac{z}{|z|} \cong \left(1 - \frac{b^2}{2z^2}\right) \frac{z}{|z|}$$



شکل ۱۶-۳ یک فرض با بار یکنواخت (مثال ۱۰-۳)

با جاگذاری این رابطه در معادلات (۲-۶۵ الف) و (۲-۶۵ ب) بدست می آوریم

$$\mathbf{E} = \mathbf{a}_z \frac{(\pi b^2 \rho_s)}{4\pi\epsilon_0 z^2} \cdot \frac{z}{|z|}$$

$$= \begin{cases} \mathbf{a}_z \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 z^2} & , z > 0 \\ -\mathbf{a}_z \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 z^2} & , z < 0 \end{cases}$$

(۲-۶۶ الف)

(۲-۶۶ ب)

که در آن، کل بار روی قرص است. از این رو هنگامی که محل مشاهده از قرص باردار خیلی دور است، میدان \mathbf{E} به طور تقریبی، از قانون عکس مربع فاصله پیروی می کند، گویی کل بار در یک نقطه متمرکز شده است.

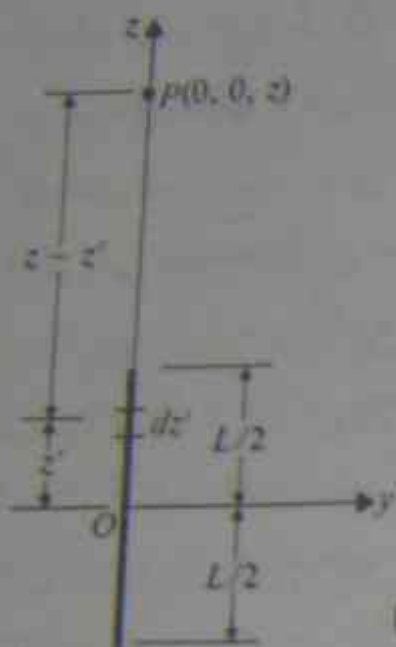
■ مثال ۱۰-۳ فرمولی برای شدت میدان الکتریکی یک بار خطی یکنواخت به طول L در امتداد محور آن، بدست آورید. چگالی بار خطی یکنواخت، ρ_L است.

حل مطابق حل مثال ۲-۵، میدان \mathbf{E} در مورد یک بار خطی بینهایت طویل، با استفاده از قانون گوس بسادگی تعیین می شود. اما در یک بار خطی با طول محدود، مطابق شکل ۳-۱۷، تشکیل سطح گوسی به طوری که روی آن $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ ثابت باشد، ممکن نیست. بنابراین قانون گوس اینجا مفید واقع نمی شود.

در عوض، جزء کوچک بار $d\ell' = dz'$ را در z' در نظر گرفته، معادله (۲-۶۳) را بکار می بریم. فاصله R از جزء کوچک بار تا نقطه $P(0, 0, z)$ در امتداد محور بار خطی برابر است با

$$R = (z - z') \quad z > \frac{L}{2}$$

در اینجا فوق العاده اهمیت دارد که محل نقطه میدان (مختصات بدون پریم) را از محل نقطه منبع

شکل ۱۷-۳ بار خطی محدود با چگالی خطی یکنواخت ρ_L (مثال ۱۰-۳)

(مختصات پریم دار) تمیز دهیم. روی ناحیه منبع انتگرال گیری می کنیم:

$$V = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dz'}{z - z'}$$

$$= \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[\frac{z + (L/2)}{z - (L/2)} \right] \quad , z > \frac{L}{2}$$

(۲-۶۷)

میدان \mathbf{E} در P ، گرادیان منفی V نسبت به مختصات بدون پریم میدان است. در این مسئله،

$$\mathbf{E} = -\mathbf{a}_z \frac{dV}{dz} = \mathbf{a}_z \frac{\rho_L L}{4\pi\epsilon_0 [z^2 - (L/2)^2]} \quad , z > \frac{L}{2}$$

(۲-۶۸)

دو مثال قبلی، روشی را برای تعیین \mathbf{E} وقتی که قانون گوس براحتی قابل بکارگیری نیست مطرح می سازند؛ یعنی نخست تعیین V ، به هر حال تأکید می کنیم که اگر شرایط تقارنی موجود باشد به صورتی که بتوان یک سطح گوسی چنان تشکیل داد که روی آن $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ ثابت باشد، همیشه تعیین مستقیم \mathbf{E} ساده تر خواهد بود. در صورت نیاز، بتانسیل V با انتگرال گیری از \mathbf{E} قابل حصول است.

۳-۶ هادی ها در میدان الکتریکی ساکن

تاکنون فقط میدان الکتریکی توزیعیهای بار ساکن را در فضای آزاد یا هوا مورد بررسی قرار داده ایم. اکنون رفتار میدان را در محیط های مادی بررسی می کنیم. به طور کلی مواد براساس خواص الکتریکی به سه نوع تقسیم می شوند: هادی ها، نیمه هادیها و عایقها (یا دی الکتریک ها). برحسب مدل اتمی ساده، که هر اتم را شامل هسته با بار مثبت و الکترون هائی که به دور آن می چرخند، در نظر

می‌گیرد. الکترون‌های پوسته‌های بیرونی اتم‌های هادیه با نیروی ضعیفی نگهداری شده و بسادگی از یک اتم به اتم دیگر نقل مکان می‌کنند. بیشتر فلزات به این گروه متعلق هستند. اما الکترون‌ها در اتم‌های عایقه یا دی‌الکتریک‌ها به شدت به مدار خود چسبیده‌اند؛ و در شرایط عادی قادر به آزاد شدن نمی‌باشند. حتی اگر یک میدان الکتریکی خارجی قوی به آنها اعمال گردد. خواص الکتریکی نیمه‌هادیه بین خواص الکتریکی هادیه و عایقه قرار می‌گیرد. بدین معنی که آنها تعداد

نسبتاً کمی از بارهای آزاد قابل حرکت را دارا هستند. بنابراین نظریهٔ باند در جامدات، درمی‌یابیم که الکترون‌ها دارای باندهای انرژی مجاز هستند و هر باند شامل سطوح انرژی گسسته و کم فاصلهٔ متعددی می‌باشد. بین این باندهای انرژی ممکن است نواحی یا شکاف‌های ممنوعه‌ای موجود باشد که در آنها هیچ الکترونی از اتم جامد قادر به ماندن نباشد. هادیه دارای باند انرژی بالائی تا حدی پر شده توسط الکترون‌ها یا یک جفت باند بالائی روی هم افتاده^۱، تا حدی پر شده توسط الکترون‌ها هستند. به طوری که الکترون‌ها در این باندها می‌توانند با تغییر ناچیزی در انرژی، از یک باند به باند دیگر، حرکت کنند. عایقه یا دی‌الکتریک‌ها، اجسامی هستند با باند بالائی کاملاً پر شده، به طوری که به طور معمول، به دلیل وجود شکاف بزرگ انرژی تا باند بالاتر بعدی، هدایت نمی‌تواند صورت پذیرد. اگر شکاف انرژی ناحیهٔ ممنوعه نسبتاً کوچک باشد، مقدار کمی انرژی خارجی برای تحریک الکترون‌های موجود در باند پر شدهٔ بالائی، برای پرش به باند بعدی و تولید هدایت، کافی خواهد بود. این اجسام نیمه‌هادی هستند.

خواص ماکروسکوپی الکتریکی محیط‌های مادی با پارامتری اساسی به نام رسانندگی^۲، که در فصل ۵ تعریف خواهد شد، مشخص می‌شود. لیکن تعریف ضریب هدایت در این فصل مهم نخواهد بود زیرا با جریان گذرنده سروکار نداریم و فعلاً فقط به رفتار میدانهای الکتریکی ساکن در محیط‌های مادی علاقه‌مند هستیم. در این بخش، میدان الکتریکی و توزیع بار را در داخل تودهٔ هادی و روی سطح آن بررسی می‌نماییم.

در حال حاضر فرض کنید بارهانی مثبت (یا منفی) در درون یک هادی قرار داده شده است. یک میدان الکتریکی در هادی تشکیل خواهد شد. میدان بر بارها نیرو وارد کرده و باعث از هم دور شدن آنها از یکدیگر می‌شود. این تحرک آنقدر ادامه خواهد یافت، تا اینکه همهٔ بارها به سطح هادی برسند و یکدیگر را دوباره طوری توزیع نمایند که هم بار و هم میدان درونی صفر شود. از این رو،

درون یک هادی (تحت شرایط سکون)
$\rho = 0$
$E = 0$

(۳-۶۹)

(۳-۷۰)

هنگامی که باری در درون هادی وجود ندارد ($\rho = 0$) باید صفر باشد زیرا براساس قانون گوس، کل شار الکتریکی خارج شونده از هر سطح بسته که در درون هادی تشکیل شود، باید صفر باشد.

توزیع بار روی سطح یک هادی به شکل سطح بستگی دارد. روشن است که اگر شدت میدان الکتریکی دارای مؤلفه مماسی باشد و در نتیجه تولید یک نیروی مماسی نموده، بارها را بحرکت درآورد، حالت تعادل بار موجود نخواهد بود. بنابراین، تحت شرایط سکون، میدان E روی سطح یک هادی همه‌جا عمود بر سطح است. به عبارت دیگر، تحت شرایط سکون، سطح هادی، یک سطح هم‌پتانسیل است. در واقع، چون در تمام نقاط درون هادی $E = 0$ است، کل هادی دارای پتانسیل الکتریکی ساکن یکسانی است. زمان معینی لازم است تا بارها روی سطح هادی دوباره توزیع شوند و به حالت تعادل برسند. این زمان به رسانندگی ماده بستگی دارد. در یک هادی خوب، مثل مس، این زمان از مرتبهٔ 10^{-19} (s) است، یعنی حالت گذرای بسیار کوتاه. (این نکته را در بخش ۵-۴ دقیقاً بررسی خواهیم کرد.)

شکل ۳-۱۸، فصل مشترک یک هادی و فضای آزاد را نشان می‌دهد. مسیر $abcd$ را در نظر بگیرید که دارای پهنای $ab = cd = \Delta w$ و ارتفاع $bc = da = \Delta h$ است. اضلاع ab و cd به موازات فصل مشترک هستند. بکارگیری معادلهٔ (۳-۸)، با فرض $\Delta h \rightarrow 0$ و توجه به این نکته که E در درون هادی صفر است، فوراً نتیجه می‌دهد:

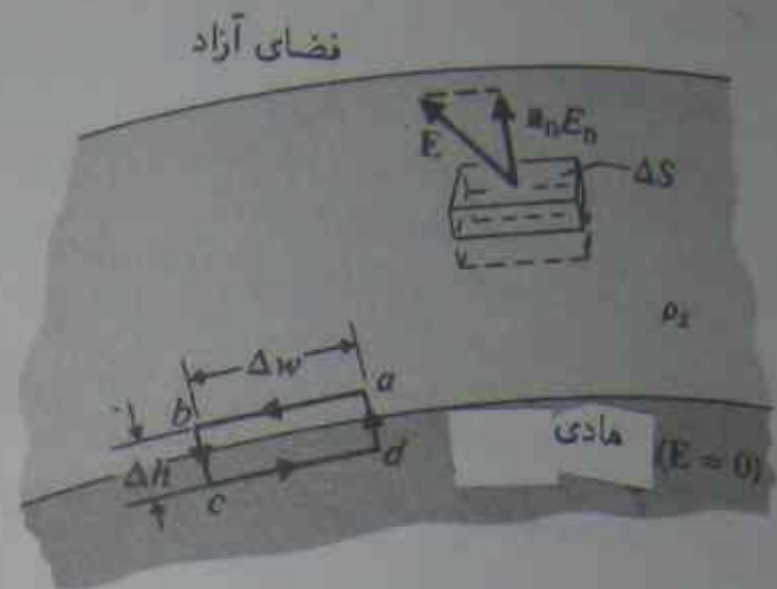
$$\oint_{abcd} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = E_1 \Delta w = 0$$

یا

$$E_1 = 0 \quad (۳-۷۱)$$

که بیان می‌دارد، مؤلفهٔ مماسی میدان E روی سطح هادی صفر است. برای یافتن E_n ، مؤلفهٔ عمودی E روی سطح هادی، یک سطح گوسی به صورت یک قوطی کوچک نازک در نظر بگیرید به طوری که وجه بالائی آن در فضای آزاد و وجه پایینی آن در هادی است، یعنی جایی که $E = 0$ با

† فرض می‌کنیم (۳-۷) و (۳-۸) در ناحیه‌هایی شامل محیط‌های نابسته هستند، معنی می‌باشد.



شکل ۱۸-۳ فصل مشترک هادی - فضای آزاد

استفاده از معادله (۷-۳) بدست می آید

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = E_n \Delta S = \frac{\rho_s \Delta S}{\epsilon_0}$$

یا

$$E_n = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} \quad (۷۲-۳)$$

از این رو، مؤلفه عمودی میدان \mathbf{E} در مرز هادی و فضای آزاد برابر چگالی بار سطحی روی هادی تقسیم برگزیده فضای آزاد است. به طور خلاصه، شرایط مرزی سطح هادی به صورت زیر است

شرایط مرزی	
در فصل مشترک هادی - فضای آزاد	
$E_t = 0$	(۷۱-۳)
$E_n = \frac{\rho_s}{\epsilon_0}$	(۷۲-۳)

هنگامی که یک هادی بدون بار در میدان الکتریکی ساکن قرار می گیرد، میدان خارجی باعث می شود، الکترونهایی در داخل هادی که اتصال محکمی ندارند در جهت مخالف میدان حرکت کرده، باعث شوند، بار خالص مثبت میدان در جهت میدان تغییر مکان دهد. این بارهای آزاد القایی روی سطح هادی توزیع می شوند و میدان القایی بوجود آمده توسط آنها به صورتی است که میدان خارجی را در درون هادی و در جهت مناسب بر سطح آن خنثی می نماید. هنگامی که توزیع بار سطحی به تعادل می رسد، هر چهار رابطه معادلات (۲-۶۹) تا (۳-۷۲) برقرار خواهند بود؛ و دوباره هادی یک جسم همپتانسیل خواهد بود.

مثال ۱۱-۳ بار نقطه‌ای مثبت Q ، در مرکز یک پوسته هادی کروی با شعاع داخلی R_i و شعاع خارجی R_o قرار دارد. \mathbf{E} و V را به صورت تابعی از فاصله شعاعی R تعیین کنید.

حل شکل هندسی مسئله در شکل ۳-۱۹ (الف) نشان داده شده است. چون تقارن کروی موجود است، ساده تر است از قانون گوس برای تعیین \mathbf{E} استفاده کنیم و سپس با انتگرال گیری V را بیابیم. سه ناحیه متمایز وجود دارد: (الف) $R > R_o$ ، (ب) $R_i < R < R_o$ ، و (پ) $R < R_i$. سطوح گوسی کروی مناسبی در این سه ناحیه تشکیل خواهد شد. روشن است که در هر سه ناحیه $\mathbf{E} = a_R E_R$.

(الف) $R > R_o$ (سطح گوسی S_1):

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = E_{R1} 4\pi R^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

یا

$$E_{R1} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \quad (۷۳-۳)$$

میدان \mathbf{E} ، مشابه میدان بار نقطه‌ای Q بدون حضور پوسته است. پتانسیل نسبت به نقطه‌ای در بینهایت برابر است با

$$V_1 = - \int_{\infty}^R (E_{R1}) dR = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \quad (۷۴-۳)$$

(ب) $R_i < R < R_o$ (سطح گوسی S_2): به دلیل معادله (۳-۷۰) می دانیم که

$$E_{R2} = 0 \quad (۷۵-۳)$$

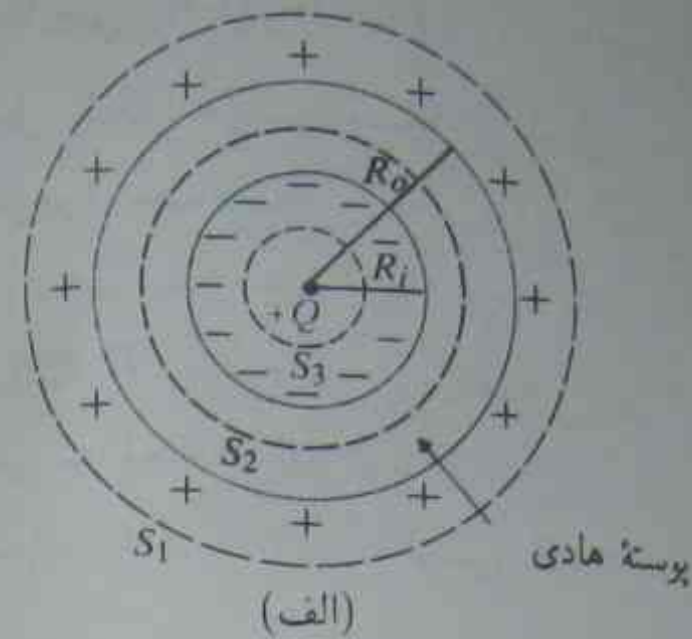
چون در پوسته هادی $\rho = 0$ است و از آنجائی که کل بار محصور در سطح S_2 باید صفر باشد، بار منفی به مقدار $-Q$ باید روی سطح داخلی پوسته، در $R = R_i$ القا شود. (همچنین، این بدان معنی است که بار مثبت به مقدار $+Q$ روی سطح خارجی پوسته در $R = R_o$ القا شده است.) پوسته هادی یک جسم همپتانسیل است. از این رو،

$$V_2 = V_1 \Big|_{R=R_o} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_o} \quad (۷۶-۳)$$

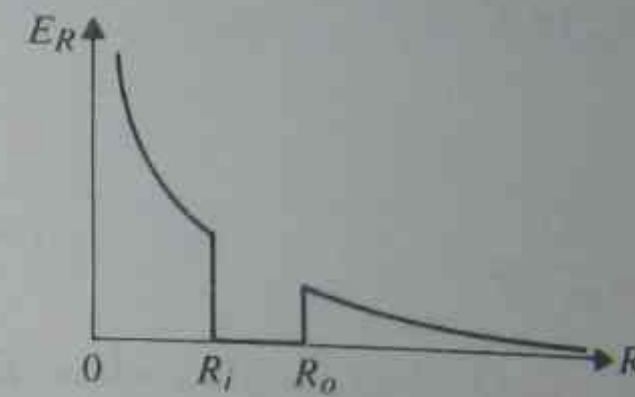
(پ) $R < R_i$ (سطح گوسی S_3): بکارگیری قانون گوس فرمولی را برای E_{R3} مشابه E_{R1} در

معادله (۳-۷۳) و در مورد ناحیه اول، بدست می دهد:

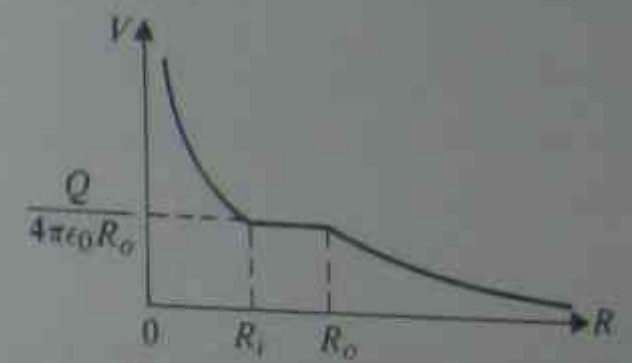
$$E_{R3} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \quad (۷۷-۳)$$



(الف)



(ب)



(پ)

شکل ۱۹-۳ تغییرات شدت میدان و پتانسیل الکتریکی بار نقطه‌ای $+Q$ در مرکز یک پوسته هادی (مثال ۳-۱۱).

پتانسیل در این ناحیه برابر است با

$$V_r = - \int E_{Rr} dR + C = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} + C$$

که ثابت انتگرال‌گیری C در آن، از لزوم برابری V_r در $R = R_i$ با V_r در معادله (۳-۷۶) تعیین می‌گردد. داریم

$$C = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_o} - \frac{1}{R_i} \right)$$

$$V_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_o} - \frac{1}{R_i} \right) \quad (۳-۷۸)$$

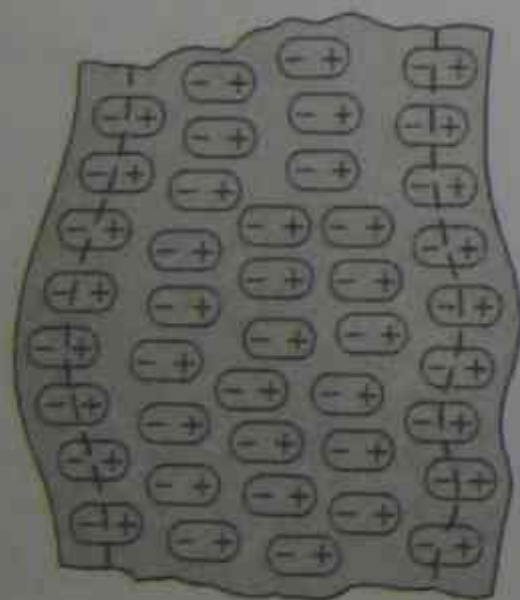
تغییرات E_R و V بر حسب R در هر سه ناحیه، در شکل‌های ۳-۱۹ (ب) و ۳-۱۹ (پ) ترسیم شده است. توجه کنید، درحالی‌که شدت میدان الکتریکی دارای جهش‌های ناپیوسته است، پتانسیل به‌طور پیوسته باقی می‌ماند. یک جهش ناپیوسته در پتانسیل به معنی یک شدت میدان الکتریکی بینهایت خواهد بود.

۳-۷ دی‌الکتریک‌ها در میدان الکتریکی ساکن

دی‌الکتریک‌های ایده‌آل دارای بارهای آزاد نیستند. هنگامی که یک جسم دی‌الکتریک در یک میدان الکتریکی خارجی قرار می‌گیرد، بارهای آزاد القائی، که در هادی‌ها به‌سوی سطح حرکت کرده و چگالی بار و میدان الکتریکی داخلی را صفر می‌کردند، وجود ندارند. اما چون دی‌الکتریک‌ها شامل بارهای مقید هستند، نمی‌توانیم نتیجه بگیریم که تأثیری بر میدان الکتریکی قرار گرفته در آن، ندارند.

همه محیط‌های مادی از اتم‌هایی با هسته بار مثبت و در پیرامون آن الکترون‌هایی با بار منفی، تشکیل شده‌اند. اگرچه، مولکول‌های دی‌الکتریک‌ها از نظر ماکروسکوپی خنثی هستند، حضور میدان الکتریکی خارجی باعث اعمال نیروئی بر هر ذره بارشده، و در نتیجه بارهای مثبت و منفی در جهات مخالف کمی جابجا می‌شوند. این جابجائی‌ها، اگرچه نسبت به ابعاد اتمی کوچک است، با وجود این ماده دی‌الکتریک را قطبی می‌کند و تولید دو قطبی‌های الکتریکی می‌نماید. این وضعیت را در شکل ۳-۲۰ ملاحظه می‌کنید. از آنجائیکه دو قطبی‌های الکتریکی دارای پتانسیل و شدت میدان الکتریکی غیر صفر هستند، انتظار داریم که دو قطبی‌های الکتریکی القاشده، میدان الکتریکی را در داخل و خارج ماده دی‌الکتریک تغییر دهند.

مولکول‌های بعضی از دی‌الکتریک‌ها، حتی در غیاب یک میدان قطبی‌کننده خارجی دارای گشتاور دو قطبی دائمی هستند. این مولکول‌ها معمولاً از دو یا چند اتم غیرهمسان تشکیل شده و برعکس مولکول‌های غیرقطبی که گشتاور دو قطبی دائمی ندارند، مولکول‌های قطبی



شکل ۳-۲۰ مقطع یک محیط دی‌الکتریک قطبی شده

E خارجی

نامیده می‌شوند. یک مثال، مولکول آب، H_2O است که از دو اتم هیدروژن و یک اتم اکسیژن تشکیل می‌شود. اتم‌ها خود را آن‌چنان مرتب نمی‌کنند که مولکولی با گشتاور دوقطبی صفر بوجود بیاورند؛ یعنی اتم‌های هیدروژن، دقیقاً در طرف‌های متقابل قطری اتم‌های اکسیژن قرار نمی‌گیرند. گشتاورهای دوقطبی مولکول‌های قطبی از مرتبه 10^{-30} (C.m) هستند. هنگامی که میدان خارجی وجود ندارد، تک تک دوقطبی‌های یک دی‌الکتریک قطبی، به صورت اتفاقی پراکنده‌اند و گشتاور دوقطبی خالص از دیدگاه ماکروسکوپی بوجود نمی‌آورند. میدان الکتریکی اعمال شده، بر تک تک دوقطبی‌ها، گشتاوری وارد نموده، می‌خواهد آنها را مشابه حالتی که در شکل ۲۰-۳ نشان داده شده است، هم‌راستا با میدان نماید.

بعضی مواد دی‌الکتریک، حتی در غیاب نیروی الکتریکی اعمال‌شده خارجی می‌توانند گشتاور دوقطبی دائمی را به نمایش بگذارند. چنین موادی را الکتریت^۱ گویند. الکتریت‌ها را می‌توان با گرم کردن (نرم کردن) بعضی مومها، پلاستیک‌ها و قراردادن آنها در یک میدان الکتریکی ساخت. مولکولهای قطبی شده در این مواد، هم‌راستا با نیروی اعمال‌شده قرار می‌گیرند و پس از برگشتن به دمای معمولی خود، در این وضعیتهای جدید منجمد می‌شوند. قطبی‌شدگی‌های دائم بدون حضور نیروی خارجی پابرجا می‌مانند. الکتریت‌ها، معادل مغناطیس‌های دائم هستند. این مواد کاربرد مهمی در میکروفن‌های الکتریکی با هماندهی بالا پیدا کرده‌اند.[†]

۳-۷-۱ توزیع‌های بار معادل در دی‌الکتریک‌های قطبی شده

برای تجزیه و تحلیل تأثیر ماکروسکوپی دوقطبی‌های القاشده، بردار قطبی‌شدگی P را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$P = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=1}^{n \Delta v} p_k}{\Delta v} \quad (C/m^2) \quad (79-3)$$

که n در آن، تعداد مولکول‌ها در واحد حجم و صورت کسر مشخص‌کننده جمع برداری گشتاورهای دوقطبی القاشده موجود در حجم بسیار کوچک Δv است. بردار P ، که یک تابع نقطه‌ای هموار شده است، چگالی حجمی گشتاور دوقطبی الکتریکی می‌باشد. گشتاور دوقطبی یک جزء کوچک حجمی dv' ، یعنی dp ، برابر است با $dp = P dv'$ و پتانسیل الکتریکی ناشی از آن، (معادله

[†] مثلاً بخش ۸-۳ کتاب زیر را ببینید:

J. M. Crowley, *Fundamentals of Applied Electrostatics*, Wiley, New York, 1986.

۲- High fidelity

۱- Electrets

۳-۷ دی‌الکتریک‌ها در میدان الکتریکی ساکن

۳-۵۲ ب را ببینید):

$$dV = \frac{P \cdot a_R}{4\pi\epsilon_0 R^2} dv' \quad (80-3)$$

با انتگرال‌گیری روی حجم دی‌الکتریک، V' ، پتانسیل ناشی از دی‌الکتریک قطبی شده بدست می‌آید.

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{P \cdot a_R}{R^2} dv' \quad (81-3)$$

که در آن، فاصله یک نقطه میدان ثابت از عنصر کوچک حجمی dv' است. در مختصات کارتزین،

$$R^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 \quad (82-3)$$

و بسادگی ثابت می‌شود که گرادیان $1/R$ نسبت به مختصات بریم‌دار برابر است با

$$\nabla' \left(\frac{1}{R} \right) = \frac{a_R}{R^2} \quad (83-3)$$

از این رو، معادله (۸۱-۳) می‌تواند به صورت زیر نوشته شود

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} P \cdot \nabla' \left(\frac{1}{R} \right) dv' \quad (84-3)$$

اتحاد برداری

$$\nabla' \cdot (fA) = f \nabla' \cdot A + A \cdot \nabla' f \quad (85-3)$$

را بخاطر می‌آوریم (مسئله ۲-۲۸) و $A = P$ و $f = 1/R$ را در نظر گرفته، معادله (۸۴-۳) را به صورت زیر دوباره می‌نویسیم

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_{V'} \nabla' \cdot \left(\frac{P}{R} \right) dv' - \int_{V'} \frac{\nabla' \cdot P}{R} dv' \right] \quad (86-3)$$

انتگرال حجمی اول در سمت راست معادله (۸۶-۳)، با استفاده از قضیه دیورانس به انتگرال سطح بسته تبدیل می‌شود. داریم

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{S'} \frac{P \cdot a'_n}{R} ds' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{(-\nabla' \cdot P)}{R} dv' \quad (87-3)$$

که a'_n در آن، عمود بر عنصر کوچک سطحی ds' روی دی‌الکتریک و به سمت خارج آن است. مقایسه دو انتگرال سمت راست معادله (۸۷-۳) به ترتیب با معادلات (۳-۶۲) و (۳-۶۱)، آشکار می‌سازد که پتانسیل الکتریکی (و بنابراین شدت میدان الکتریکی) ناشی از یک دی‌الکتریک

[†] در اینجا توجه داشته باشید که V در سمت چپ معادله (۸۱-۳) نمایشگر پتانسیل الکتریکی در یک نقطه میدان و V' در طرف راست، حجم دی‌الکتریک قطبی شده است.

قطبی شده، می‌تواند از اثر توزیع‌های دو بار سطحی و حجمی، به ترتیب با چگالیهای زیر، محاسبه شود

$$\rho_{ps} = P \cdot a_n$$

(۸۸-۳)

$$\rho_p = -\nabla \cdot P$$

(۸۹-۳)

این دو رابطه را چگالی‌های بار قطبی‌شدگی یا چگالیهای بار مقید^۱ می‌نامند. به عبارت دیگر، برای محاسبات میدان، هر دی‌الکتریک قطبی‌شده می‌تواند با چگالی قطبی‌شدگی معادل ρ_{ps} و چگالی بار حجمی قطبی‌شدگی معادل ρ_p جایگزین گردد:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\rho_{ps}}{R} ds' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_p}{R} dv' \quad (۹۰-۳)$$

اگرچه معادلات (۸۸-۳) و (۸۹-۳)، با کمک یک اتحاد برداری و به‌طور ریاضی بدست آمده‌اند، اما تعبیر فیزیکی توزیع‌های بار نیز ممکن است. شمای شکل ۳-۲۰ به وضوح نشان می‌دهد که بارهای انتهایی دو قطبی‌های هم‌امتداد روی سطوحی که به موازات جهت قطبی‌شدگی نمی‌باشد، قرار می‌گیرند. یک جزء کوچک فرضی سطحی Δs را در یک دی‌الکتریک غیرقطبی در نظر بگیرید. اعمال میدان الکتریکی خارجی، عمود بر Δs ، باعث جداشدن بارهای مقید به اندازه d می‌شود. بارهای مثبت $+q$ مسافت $d/2$ را در جهت میدان و بارهای منفی $-q$ همین فاصله را در خلاف جهت میدان طی می‌کنند. بارکل خالص ΔQ ، که سطح Δs را در جهت میدان قطع می‌کند، برابر است با $nq d(\Delta s)$ ، که n در آن تعداد مولکول‌ها در واحد حجم است. اگر میدان خارجی بر Δs عمود نباشد، فاصله بارهای مقید در جهت a_n برابر $d \cdot a_n$ خواهد بود و

$$\Delta Q = nq(d \cdot a_n)(\Delta s) \quad (۹۱-۳)$$

اما $nq d$ گشتاور دو قطبی در واحد حجم، مطابق تعریف همان بردار قطبی‌شدگی P است. داریم

$$\Delta Q = P \cdot a_n (\Delta s) \quad (۹۲-۳)$$

و

$$\rho_{ps} = \frac{\Delta Q}{\Delta s} = P \cdot a_n$$

^۱ علامت بریم روی a_n و ∇ برای سادگی حذف شده است، زیرا معادلات (۸۸-۳) و (۸۹-۳) فقط شامل مختصات منبع هستند و ابعادی پیش نمی‌آید.

همان طوری که در معادله (۳-۸۸) نیز آمده است، بخاطر بسپارید که a_n همیشه عمود به سمت خارج است. این رابطه بار سطحی مثبت را روی سطح سمت راست و بار سطحی منفی را روی سطح سمت چپ شکل ۳-۲۰ بدرستی بدست می‌دهد.

در مورد سطح S دربرگیرنده حجم V ، بارکل خالص خارج‌شونده از V در نتیجه قطبی‌شدگی با انتگرال‌گیری از معادله (۳-۹۲) بدست می‌آید. بار خالص باقیمانده در داخل حجم V ، منتهای این انتگرال است:

$$\begin{aligned} Q &= -\oint_S P \cdot a_n ds \\ &= \int_V (-\nabla \cdot P) dv = \int_V \rho_p dv \end{aligned} \quad (۹۳-۳)$$

که به عبارت مربوط به چگالی بار حجمی معادله (۳-۸۹) منتهی می‌شود. از این رو، هنگامی که دیورژانس P صفر نیست، توده دی‌الکتریک قطبی‌شده نیز باردار بنظر می‌رسد. اما از آنجائی که با یک جسم دی‌الکتریک خنثی از نظر الکتریکی آغاز کردیم، بارکل جسم پس از قطبی‌شدن باید همچنان صفر باشد. این مطلب با در نظر گرفتن روابط زیر و بکارگیری دوباره قضیه دیورژانس بسادگی اثبات می‌شود

$$\begin{aligned} \text{بارکل} &= \oint_S \rho_{ps} ds + \int_V \rho_p dv \\ &= \oint_S P \cdot a_n ds - \int_V \nabla \cdot P dv = 0 \end{aligned} \quad (۹۴-۳)$$

که در آن قضیه دیورژانس بار دیگر اعمال شده است.

۸-۳ چگالی شار الکتریکی و ضریب دی‌الکتریک

چون یک دی‌الکتریک قطبی‌شده، موجب پیدایش چگالی بار حجمی معادل ρ_p می‌گردد، انتظار داریم که شدت میدان الکتریکی ناشی از یک توزیع منبع مفروض در یک دی‌الکتریک، با شدت میدان الکتریکی در فضای آزاد متفاوت باشد. بویژه، دیورژانس فرض‌شده در معادله (۳-۴) باید تصحیح شود تا اینکه تأثیر ρ_p را نیز شامل شود؛ یعنی

$$\nabla \cdot E = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho + \rho_p) \quad (۹۵-۳)$$

با استفاده از معادله (۳-۸۹) داریم

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 E + P) = \rho \quad (۹۶-۳)$$

حال یک کمیت اصلی جدید میدان، چگالی شار الکتریکی، یا جابجائی الکتریکی، D را به صورت

زیر تعریف می‌کنیم

$$\mathbf{D} = \epsilon_r \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (\text{C/m}^2)$$

(۱۷-۳)

استفاده از بردار \mathbf{D} ما را قادر می‌سازد رابطه دیورژانسی بین میدان الکتریکی و توزیع بارهای آزاد را در هر محیط بدون لزوم درگیری صریح با بردار قطبی‌شدگی \mathbf{P} یا چگالی بار قطبی‌شدگی ρ_p بنویسیم. از ترکیب معادلات (۱۶-۳) و (۱۷-۳) معادله جدید زیر بدست می‌آید

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (\text{C/m}^3)$$

(۱۸-۳)

که در آن چگالی حجمی بارهای آزاد است. معادلات (۱۸-۳) و (۱۵-۳) دو معادله دیفرانسیل اصلی حاکم بر الکتریسته ساکن در هر محیط هستند. توجه داشته باشید که گذردهی فضای آزاد، ϵ_r به‌طور صریح در این دو معادله ظاهر نمی‌شود. صورت انتگرالی نظیر معادله (۱۸-۳) با گرفتن انتگرال حجمی از دو طرف آن بدست می‌آید، داریم

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{D} dv = \int_V \rho dv \quad (19-3)$$

یا

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = Q \quad (C) \quad (100-3)$$

(۱۰۰-۳)

معادله (۱۰۰-۳)، شکل دیگر قانون گوس، بیان می‌دارد که شار کل خروجی جابجایی الکتریکی (یا، به سادگی شار کل الکتریکی خارج‌شونده) روی هر سطح بسته برابر کل بار آزاد محصور در سطح است. همان‌طوری‌که در بخش ۳-۲ نشان داده شد، بیشترین کاربرد قانون گوس در تعیین میدان الکتریکی ناشی از توزیع‌های بار تحت شرایط متقارن است.

وقتی که خواص دی‌الکتریکی محیط خطی و همه‌سویکسان باشد، قطبی‌شدگی مستقیماً متناسب با شدت میدان الکتریکی و ضریب تناسب مستقل از جهت میدان است. می‌نویسیم:

$$\mathbf{P} = \epsilon_r \chi_e \mathbf{E} \quad (101-3)$$

که χ_e در آن، کمیتی بدون بعد به‌نام پذیرندگی الکتریکی است. یک محیط دی‌الکتریک خطی است اگر χ_e مستقل از \mathbf{E} و همگن است اگر χ_e مستقل از مختصات فضایی باشد. جاگذاری معادله (۱۰۱-۳) در معادله (۱۷-۳) نتیجه می‌دهد

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \epsilon_r (1 + \chi_e) \mathbf{E} \\ &= \epsilon_r \epsilon_r \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E} \quad (\text{C/m}^2) \end{aligned} \quad (102-3)$$

که در آن

$$\epsilon_r = 1 + \chi_e = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \quad \epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r \quad (103-3)$$

یک ثابت بدون بعد به‌نام گذردهی نسبی یا ضریب دی‌الکتریک محیط است. ضریب ϵ_r ، گذردهی مطلق (غالباً فقط گذردهی) محیط بوده، برحسب فاراد بر متر (F/m) اندازه‌گیری می‌شود. ضریب دی‌الکتریک هوا 1.00059 است؛ از این رو گذردهی آن معمولاً برابر فضای آزاد در نظر گرفته می‌شود. ضرایب دی‌الکتریک بعضی مواد متداول در جدول ۳-۱ صفحه ۱۳۷ و ضمیمه ب-۳ آورده شده است.

توجه داشته باشید که ϵ_r می‌تواند تابعی از مختصات فضایی باشد. اگر ϵ_r مستقل از مکان باشد، محیط را همگن گویند. هر محیط خطی، همگن و همه‌سویکسان را یک محیط ساده می‌نامند. گذردهی نسبی یک محیط ساده، ثابت است.

در این کتاب بعداً یاد خواهیم گرفت که اثرات یک محیط با اتلاف را می‌توان با یک ضریب دی‌الکتریکی مختلط نمایش داد، که جزء انگاری آن بخشی از افت توان در محیط را نشان می‌دهد و در حالت کلی به فرکانس وابسته است. برای مواد غیرهمه‌سویکسان که ضریب دی‌الکتریک در جهت‌های مختلف میدان الکتریکی متفاوت است و بردارهای \mathbf{D} و \mathbf{E} عموماً جهت‌های متفاوتی دارند؛ گذردهی یک تانسور است. در شکل ماتریسی می‌توان چنین نوشت

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} \quad (104-3)$$

مختصات مرجع در کریستال‌ها را می‌توان چنان انتخاب کرد که جملات غیرقطری ماتریس گذردهی در معادله (۱۰۴-۳) صفر باشد، داریم

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} \quad (105-3)$$

محیط‌هایی که خاصیت نشان داده شده با معادله (۱۰۵-۳) را دارا باشند، دومیحوری^۱ گویند. می‌توان چنین نوشت

$$D_x = \epsilon_1 E_x \quad (106-3 \text{ الف})$$

$$D_y = \epsilon_r E_y \quad (۳-۱۰۶)$$

$$D_z = \epsilon_r E_z \quad (۳-۱۰۶)$$

بعلاوه اگر $\epsilon_1 = \epsilon_r$ باشد، محیط را یک محوری گویند، البته اگر $\epsilon_1 = \epsilon_r = \epsilon_2$ باشد، یک محیط همسویکسان داریم. در این کتاب فقط با محیطهای همسویکسان سروکار خواهیم داشت.

مثال ۱۲-۳ یک بار نقطه‌ای مثبت Q در مرکز یک پوسته دی‌الکتریک کروی با شعاع درونی R_i و شعاع بیرونی R_o قرار گرفته است. ضریب دی‌الکتریک پوسته ϵ_r است. E, V, D, P را به صورت تابعی از فاصله شعاعی R تعیین کنید.

حل شکل هندسی این مسئله مشابه مثال ۳-۱۱ است. پوسته هادی، اکنون به پوسته دی‌الکتریک تبدیل شده است، اما روش حل مسئله یکسان است. به دلیل تقارن کروی، از قانون گوس برای یافتن E و D در سه ناحیه استفاده می‌کنیم: (الف) $R > R_o$; (ب) $R_i < R < R_o$ و (پ) $R < R_i$. بتانسیل V از منفی انتگرال خطی E پیدا می‌شود و قطبی‌شدگی P از رابطه زیر بدست می‌آید

$$P = D - \epsilon_r E = \epsilon_r (\epsilon_r - 1) E \quad (۳-۱۰۷)$$

بردارهای E, D, P تنها دارای مؤلفه شعاعی هستند. به شکل ۳-۲۱ (الف) مراجعه کنید، در این شکل سطح گوسی برای جلوگیری از شلوغ شدن شکل نشان داده نشده‌اند.

شرایط این ناحیه دقیقاً مانند مثال ۳-۱۱ است. از معادلات (۳-۷۳) و (۳-۷۴) داریم

$$E_{R1} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_r R^2}$$

$$V_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_r R}$$

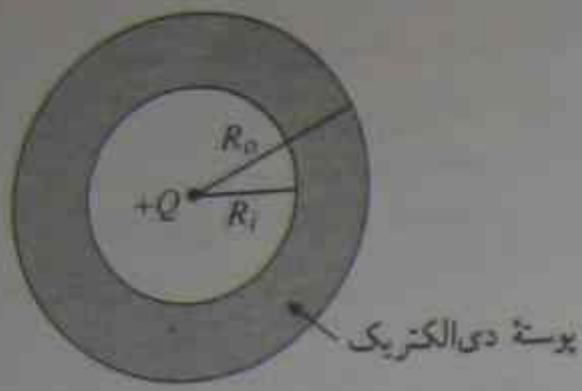
از معادلات (۳-۱۰۲) و (۳-۱۰۷) بدست می‌آوریم

$$D_{R1} = \epsilon_r E_{R1} = \frac{Q}{4\pi R^2} \quad (۳-۱۰۸)$$

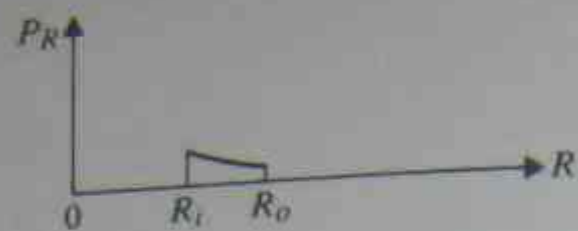
$$P_{R1} = 0$$

(ب) $R_i < R < R_o$

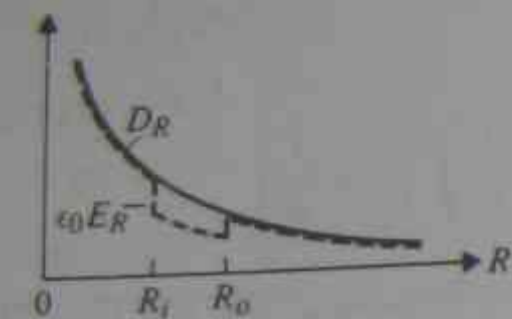
بکارگیری قانون گوس در این ناحیه مستقیماً بدست می‌دهد



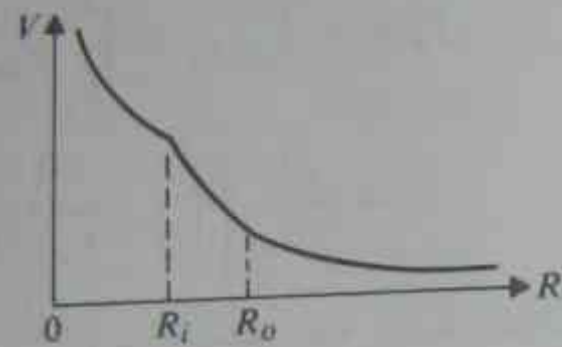
(الف)



(ب)



(ب)



(ت)

شکل ۳-۲۱ تغییرات میدان یک بار نقطه‌ای $+Q$ در مرکز یک پوسته دی‌الکتریک (مثال ۳-۱۲)

$$E_{R2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_r \epsilon_r R^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_r R^2} \quad (۳-۱۱۰)$$

$$D_{R2} = \frac{Q}{4\pi R^2} \quad (۳-۱۱۱)$$

$$P_{R2} = \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) \frac{Q}{4\pi R^2} \quad (۳-۱۱۲)$$

توجه کنید که D_{R2} عبارتی مثل D_{R1} دارد و E_{R2} و P_{R2} هر دو دارای ناپوستگی در $R = R_o$ هستند. در این ناحیه،

$$V_2 = - \int_{\infty}^{R_o} E_{R1} dR - \int_{R_o}^R E_{R2} dR$$

$$= V_1 \Big|_{R=R_o} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_r} \int_{R_o}^R \frac{1}{R^2} dR \quad (۳-۱۱۳)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_r} \left[\left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) \frac{1}{R_o} + \frac{1}{\epsilon_r R} \right]$$

(پ) $R < R_i$

چون محیط این ناحیه، مانند ناحیه $R > R_o$ است، بکارگیری قانون گوس در هر دو

ناحیه، عبارات یکسانی را برای D_R و E_R نتیجه می‌دهد:

$$E_{Rr} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_r R^2}$$

$$D_{Rr} = \frac{Q}{4\pi R^2}$$

$$P_{Rr} = 0$$

برای یافتن V_r باید منفی انتگرال خطی E_{Rr} را به V_r در $R = R_i$ بیفزاییم:

$$V_r = V_r \Big|_{R=R_i} - \int_{R_i}^R E_{Rr} dR$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_r} \left[\left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) \frac{1}{R_o} - \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R} \right] \quad (114-3)$$

تغییرات D_R و $\epsilon_r E_R$ بر حسب R در شکل ۲-۲۱ (ب) رسم شده است. تفاضل $(D_R - \epsilon_r E_R)$ برابر P_{Rr} است و در شکل ۲-۲۱ (پ) نشان داده شده است. منحنی V در شکل ۲-۲۱ (ت) ترکیب منحنی‌های V_r و V_i در سه ناحیه است. توجه می‌کنید که D_R یک منحنی پیوسته بوده و هیچ تغییر ناگهانی را در عبور از یک محیط به محیط دیگر نشان نمی‌دهد. و همچنین P_{Rr} تنها در ناحیه دی الکتریک موجود است.

مقایسه شکل‌های ۲-۲۱ (الف)، ۲-۲۱ (ت) به ترتیب با شکل‌های ۲-۱۹ (ب) و ۲-۱۹ (پ) مربوط به مثال ۱۱-۳ آموزنده است. از معادلات (۲-۸۸) و (۲-۸۹) درمی‌یابیم، روی سطح داخلی پوسته:

$$\rho_{ps} \Big|_{R=R_i} = P \cdot (-a_R) \Big|_{R=R_i} = -P_{Rr} \Big|_{R=R_i} \quad (115-3)$$

$$= - \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) \frac{Q}{4\pi R_i^2}$$

روی سطح خارجی پوسته:

$$\rho_{ps} \Big|_{R=R_o} = P \cdot a_R \Big|_{R=R_o} = P_{Rr} \Big|_{R=R_o} \quad (116-3)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) \frac{Q}{4\pi R_o^2}$$

$$\rho_p = -\nabla \cdot P \quad (117-3)$$

$$= -\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} (R^2 P_{Rr}) = 0$$

جدول ۱-۳ ضریب دی الکتریک و مقاومت دی الکتریک بعضی مواد متداول

مواد	ضریب دی الکتریک	مقاومت دی الکتریک (V/m)
هوا (در فشار اتمسفر)	۱٫۰	
روغن معدنی	۲٫۳	3×10^6
کاغذ	۲-۴	15×10^6
پلی استرین	۲٫۶	15×10^6
لاستیک	۲٫۳-۴٫۰	20×10^6
شیشه	۴-۱۰	25×10^6
میکا	۶٫۰	30×10^6
		200×10^6

معادلات (۲-۱۱۵)، (۲-۱۱۶) و (۲-۱۱۷) نشان می‌دهند که بار حجمی قطبی‌شدگی خالصی در داخل پوسته دی الکتریک وجود ندارد. اما بارهای سطحی قطبی‌شدگی منفی روی سطح داخلی و بارهای سطحی قطبی‌شدگی مثبت روی سطح خارجی موجود هستند. این بارهای سطحی، یک شدت میدان الکتریکی بوجود می‌آورند که به صورت شعاعی به سمت داخل جهت داشته و بنابراین میدان E ناشی از بار نقطه‌ای $+Q$ در مرکز را در ناحیه ۲ کاهش می‌دهند.

۳-۸-۱ مقاومت دی الکتریک

توضیح دادیم که میدان الکتریکی، باعث جابجائی کوچک بارهای مقید در ماده دی الکتریک می‌شود و قطبی‌شدگی را بوجود می‌آورد. اگر میدان الکتریکی خیلی قوی باشد، الکترون‌ها را به طور کامل از مولکول‌ها بیرون می‌کشد. الکترون‌ها تحت تأثیر میدان الکتریکی شتاب یافته و با ساختار شبکه‌ای مولکولی بشدت تصادم خواهند کرد و تغییر وضعیت دائمی و صدمه رسانیدن به ماده را موجب خواهند شد. ممکن است اثر بهمنی قطبی‌شدگی ناشی از تصادم‌ها پیش بیاید. ماده ممکن است هادی شود و جریان‌های بزرگی بوجود آید. این پدیده را شکست دی الکتریک می‌نامند. حداکثر شدت میدان الکتریکی که یک ماده دی الکتریک می‌تواند بدون شکست تحمل کند مقاومت دی الکتریک ماده نامیده می‌شود. مقاومت دی الکتریک تقریبی بعضی مواد مورد استفاده در جدول ۱-۳ آورده شده است. مقاومت دی الکتریک یک ماده نباید با ضریب دی الکتریک آن اشتباه شود.

یک عدد ساده برای بخاطر سپردن، مقاومت دی الکتریک هوا در فشار جو است، 3 kV/mm .

هنگامی که شدت میدان الکتریکی از این مقدار افزایش می‌یابد، هوا دچار شکست می‌شود. یونیزاسیون عظیمی روی می‌دهد و جرقه (تخلیه کرونا) زده می‌شود. بار الکتریکی تمایل دارد که در نقاط تیز متمرکز شود. از نظر معادله (۳-۷۲)، شدت میدان الکتریکی در همسایگی نزدیک نقاط تیز، بزرگتر از نقاط روی سطوح نسبتاً هموار با انحنای کمتر است. این اصلی است که بر اساس آن برقگیر^۱، با یک میله فلزی تیز بر روی بام ساختمانهای بلند کار می‌کند. وقتی که ابری شامل بارهای الکتریکی فراوان به یک ساختمان بلند مجهز به میله برقگیر وصل شده به زمین، نزدیک می‌شود، بارهای با علامت مخالف از زمین به سوی نوک میله که شدت میدان الکتریکی در آن قوی‌ترین است، جذب می‌شود. وقتی که شدت میدان الکتریکی از مقاومت دی الکتریک هوای مرطوب زیاده‌تر می‌شود، شکست حاصل می‌شود و هوای نزدیک نوک، یونیزه و هادی می‌گردد. سپس بارهای الکتریکی ابر به‌طور سلامت از طریق مسیر هدایت‌کننده به زمین تخلیه می‌شوند.

این حقیقت که شدت میدان الکتریکی در نقاط نزدیک به سطح هادی باردار با انحنای بیشتر بزرگتر است، در مثال صفحه بعد به‌طور کمی نشان داده خواهد شد.

مثال ۳-۱۳ دو هادی کروی با شعاعهای b_1 و b_2 ($b_2 > b_1$) را در نظر بگیرید که توسط یک سیم هادی به هم متصل شده‌اند. فاصله بین دو هادی در مقایسه با b_2 خیلی بزرگ فرض می‌شود، به طوری که بارهای روی هادیهای کروی را می‌توان با توزیع یکنواخت در نظر گرفت. بار کل Q روی کره‌ها قرار دارد. (الف) بار روی دو کره و (ب) شدت میدان الکتریکی در سطح کره‌ها را بیابید.

حل

(الف) به شکل ۳-۲۲ مراجعه کنید. از آنجائی که هادیهای کروی هم‌پتانسیل هستند، داریم

$$\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 b_1} = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 b_2}$$

یا

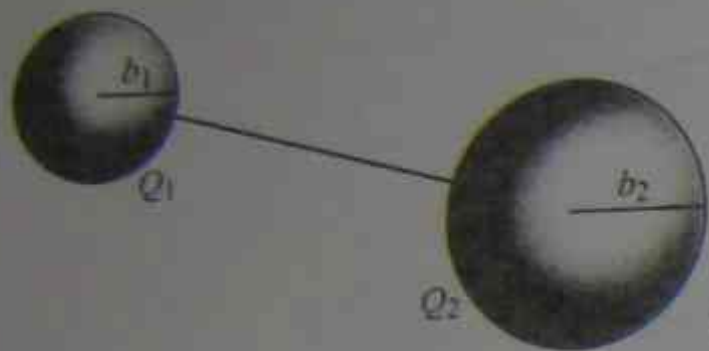
$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{b_1}{b_2}$$

از این دو بار روی کره‌ها با شعاع آنها نسبت مستقیم دارد. اما، چون

$$Q_1 + Q_2 = Q$$

درمی‌یابیم

$$Q_1 = \frac{b_1}{b_1 + b_2} Q \quad \text{و} \quad Q_2 = \frac{b_2}{b_1 + b_2} Q$$



شکل ۳-۲۲ دو کره هادی متصل بهم (مثال ۳-۱۳)

(ب) شدت میدان الکتریکی در سطح دو کره هادی برابر است با

$$E_{1n} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 b_1^2} \quad \text{و} \quad E_{2n} = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 b_2^2}$$

بنابراین

$$\frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \left(\frac{b_2}{b_1}\right)^2 \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{b_2}{b_1}$$

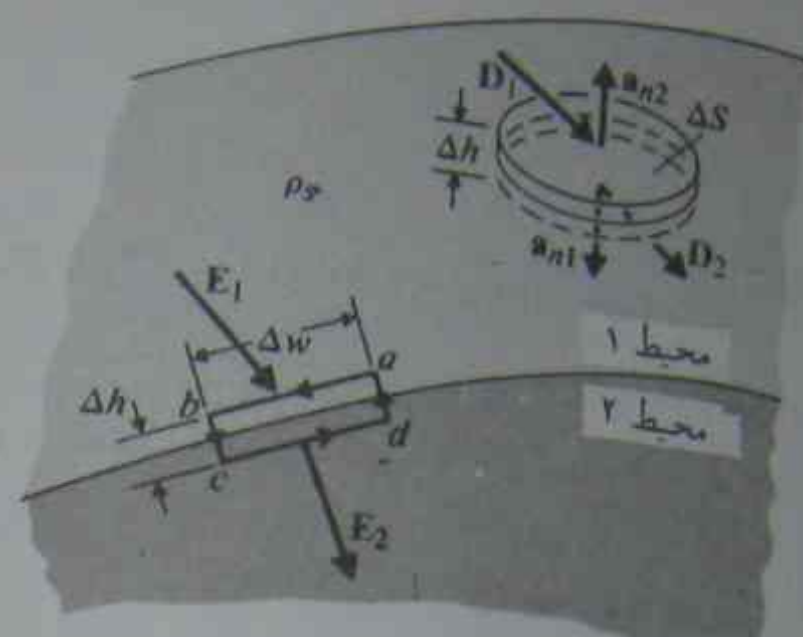
بنابراین شدت میدان الکتریکی با شعاع تناسب معکوس دارد و در سطح کره کوچکتر که انحنای بیشتری دارد، بزرگتر است.

۳-۹ شرایط مرزی میدانهای الکتریکی ساکن

مسائل الکترومغناطیس، غالباً شامل محیط‌هائی با خواص فیزیکی متفاوت هستند و لازم است اطلاعاتی در مورد روابط کمیات میدان در فصل مشترک بین دو محیط بدست آید. برای مثال ممکن است بخواهیم چگونگی تغییرات بردارهای E و D را در موقع عبور از فصل مشترک تعیین کنیم. تاکنون، شرایط مرزی حاکم بر فصل مشترک هادی - فضای آزاد را بررسی کرده‌ایم. این شرایط در معادلات (۳-۷۱) و (۳-۷۲) داده شده‌اند. حال فصل مشترک میان دو محیط کلی را مطابق شکل ۳-۲۳ در نظر می‌گیریم.

مسیر کوچک $abcd$ را به اضلاع ab و cd به ترتیب در محیط‌های ۱ و ۲ به موازات فصل مشترک و به طول Δw تشکیل دهید. معادله (۳-۸) به این مسیر اعمال می‌شود. اگر اضلاع $bc = da = \Delta h$ به سمت صفر میل کنند، اثر آنها در انتگرال خطی E به دور مسیر صرف نظر کردنی خواهد بود. داریم

$$\oint_{abcd} E \cdot d\ell = E_1 \cdot \Delta w + E_2 \cdot (-\Delta w) = E_{1t} \Delta w - E_{2t} \Delta w = 0$$



شکل ۳-۲۳ فصل مشترک بین دو محیط

بنابراین

$$E_{1t} = E_{2t} \quad (V/m)$$

(۱۱۸-۳)

که بیان می‌دارد، مؤلفه مماسی میدان E در سرتاسر فصل مشترک پیوسته است. اگر یکی از محیط‌ها، هادی باشد، معادله (۱۱۸-۳) به معادله (۷۱-۳) ساده می‌شود. اگر محیط‌های ۱ و ۲ دی‌الکتریک‌هایی به ترتیب با گذردهی ϵ_1 و ϵ_2 باشند، داریم

$$\frac{D_{1t}}{\epsilon_1} = \frac{D_{2t}}{\epsilon_2}$$

(۱۱۹-۳)

برای یافتن رابطه‌ای بین مؤلفه‌های عمودی میدانها در مرز، قوطی کوچک نشان داده شده در شکل ۳-۲۴ را به صورتی در نظر می‌گیریم که وجه بالایی آن در محیط ۱ و وجه پایینی آن در محیط ۲ باشد. مساحت وجه، ΔS ، و ارتفاع Δh قوطی کوچک صرف نظر کردنی است. با بکارگیری قانون گوس، معادله (۱۰۰-۳)، در مورد قوطی کوچک،^۱ داریم

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = (D_1 \cdot a_{n2} + D_2 \cdot a_{n1}) \Delta S$$

$$= a_{n2} \cdot (D_1 - D_2) \Delta S \quad (۱۲۰-۳)$$

$$= \rho_s \Delta S$$

^۱ فرض می‌شود معادلات (۸-۲) و (۱۰۰-۳) در ناحیه‌هایی شامل محیط‌های ناپیوسته معتبر باشد. مقاله

"On the presentation of Maxwell's Theory" نوشته C. T. Tai را در Proceedings of IEEE جلد ۶۰

صفحات ۱۴۵-۱۴۶ اگوست ۱۹۷۲، ببینید.

۳-۹ شرایط مرزی میدانهای الکتریکی ساکن

که در آن از رابطه $a_{n2} = -a_{n1}$ استفاده شده است. بردارهای واحد a_{n1} و a_{n2} به ترتیب عمودهای واحد به سمت خارج از محیط‌های ۱ و ۲ هستند. از معادله (۱۲۰-۳) بدست می‌آوریم

$$a_{n2} \cdot (D_1 - D_2) = \rho_s \quad (۳-۱۲۱ الف)$$

یا

$$D_{1n} - D_{2n} = \rho_s \quad (C/m^2) \quad (۳-۱۲۱ ب)$$

که در آن، عمود واحد مرجع از محیط ۲ خارج می‌شود.

معادله (۳-۱۲۱ ب) بیان می‌کند که مؤلفه عمودی میدان D در سرتاسر فصل مشترکی که در آن بار سطحی وجود دارد، ناپیوسته است - مقدار این ناپیوستگی معادل چگالی بار سطحی است. اگر محیط ۲ هادی باشد، $D_2 = 0$ و معادله (۳-۱۲۱ ب) تبدیل به

$$D_{1n} = \epsilon_1 E_{1n} = \rho_s \quad (۳-۱۲۲)$$

می‌شود، و در صورتی که محیط ۱ فضای آزاد باشد، به معادله (۳-۷۲) ساده می‌گردد.

در حالتی که دو دی‌الکتریک در حال تماس در فصل مشترک خود بار آزادی ندارند، $\rho_s = 0$ ،

داریم

$$D_{1n} = D_{2n} \quad (۳-۱۲۳)$$

یا

$$\epsilon_1 E_{1n} = \epsilon_2 E_{2n} \quad (۳-۱۲۴)$$

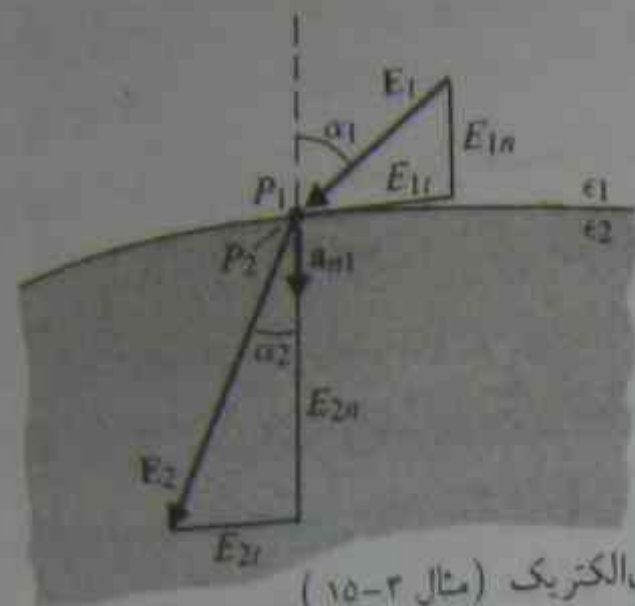
با مرور رتوس مطالب، شرایط مرزی مقرر در میدانهای الکتریکی ساکن به صورت زیر بدست می‌آید:

$$E_{1t} = E_{2t} \quad \text{مؤلفه‌های مماسی} \quad (۳-۱۲۵)$$

$$a_{n2} \cdot (D_1 - D_2) = \rho_s \quad \text{مؤلفه‌های عمودی} \quad (۳-۱۲۶)$$

مثال ۳-۱۴ یک ورقه از جنس لوسیت ($\epsilon_r = 2.5$)^۱ به صورت عمودی در میدان الکتریکی یکنواخت $E_0 = a_x E_0$ در فضای آزاد قرار گرفته است. E_1 ، D_1 و P_1 را در داخل لوسیت پیدا کنید.

^۱ لوسیت، اسم تجاری ماده پلاستیکی بسیار شفافی است که در پنجره هواپیماها از آن استفاده می‌شود (م)



شکل ۳-۲۵ شرایط مرزی در فصل مشترک بین دو محیط دی الکتریک (مثال ۳-۱۵)

مرز بدون بار از همدیگر جدا شده اند. شدت میدان الکتریکی در نقطه P_1 واقع در محیط ۱ اندازه ای برابر E_1 دارد و با امتداد قائم زاویه α_1 می سازد. اندازه و جهت شدت میدان الکتریکی را در نقطه P_2 واقع در محیط ۲ تعیین نمایید.

حل برای بدست آوردن دو مجهول E_{2t} و E_{2n} ، دو معادله مورد نیاز است. پس از یافتن E_{2t} و E_{2n} ، E_2 و α_2 مستقیماً نتیجه خواهند شد. با استفاده از معادلات (۳-۱۱۸) و (۳-۱۲۳) داریم

$$E_2 \sin \alpha_2 = E_1 \sin \alpha_1 \quad (3-127)$$

و

$$\epsilon_2 E_2 \cos \alpha_2 = \epsilon_1 E_1 \cos \alpha_1 \quad (3-128)$$

تقسیم معادله (۳-۱۲۷) بر معادله (۳-۱۲۸) نتیجه می دهد

$$\frac{\tan \alpha_2}{\tan \alpha_1} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \quad (3-129)$$

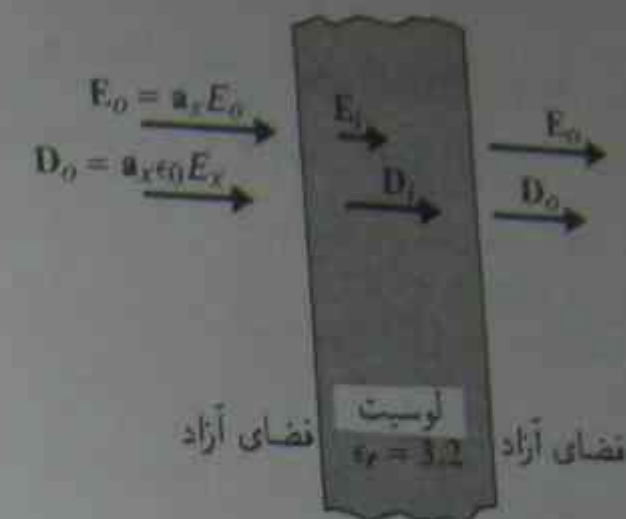
اندازه E_2 برابر است با

$$E_2 = \sqrt{E_{2t}^2 + E_{2n}^2} = \sqrt{(E_1 \sin \alpha_1)^2 + \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} E_1 \cos \alpha_1\right)^2}$$

$$= \left[(E_1 \sin \alpha_1)^2 + \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} E_1 \cos \alpha_1\right)^2 \right]^{1/2}$$

یا

$$E_2 = E_1 \left[\sin^2 \alpha_1 + \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \cos \alpha_1\right)^2 \right]^{1/2} \quad (3-130)$$



شکل ۳-۲۴ یک ورقه لوسیت در میدان الکتریکی یکنواخت (مثال ۳-۱۴)

حل فرض می کنیم که قرار دادن ورقه لوسیت، میدان الکتریکی یکنواخت اولیه E_0 را برهم نمی زند. این وضعیت را در شکل ۳-۲۴ نمایش داده ایم. چون فصل مشترکها عمود بر میدان الکتریکی هستند، تنها کافی است مؤلفه های عمودی میدان را در نظر بگیریم. هیچگونه بار آزادی وجود ندارد.

شرایط مرزی معادله (۳-۱۲۳) در فصل مشترک سمت چپ چنین نتیجه می دهد

$$D_i = a_x D_i = a_x D_0$$

یا

$$D_i = a_x \epsilon_r E_i$$

تغییری در چگالی شار الکتریکی در فصل مشترک صورت نمی گیرد. شدت میدان الکتریکی درون ورقه لوسیت برابر است با

$$E_i = \frac{1}{\epsilon_r} D_i = \frac{1}{\epsilon_r \epsilon_0} D_i = a_x \frac{E_0}{\epsilon_r}$$

بردار قطبی شدگی در خارج ورقه لوسیت صفر است ($P_i = 0$). در داخل ورقه،

$$P_i = D_i - \epsilon_0 E_i = a_x \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) \epsilon_0 E_0$$

$$= a_x \cdot 0.6875 \epsilon_0 E_0 \quad (\text{C/m}^2)$$

واضح است که اعمال مشابه شرایط مرزی معادله (۳-۱۲۳) روی فصل مشترک طرف راست، E_0 و D_0 اولیه را در فضای آزاد سمت راست ورقه لوسیت نتیجه می دهد. اگر میدان الکتریکی اولیه یکنواخت نباشد، یعنی اگر $E_0 = a_x E(y)$ ، آیا حل این مسئله تغییر خواهد کرد؟

مثال ۳-۱۵ دو محیط دی الکتریک با گذردهی های ϵ_1 و ϵ_2 مطابق شکل ۳-۲۵، توسط یک

با بررسی شکل ۳-۲۵، آیا می‌توانید تشخیص دهید که ϵ_1 از ϵ_2 بزرگتر است یا کوچکتر؟

مثال ۱۶-۳ وقتی که یک کابل هم‌محور برای انتقال نیروی الکتریکی بکار می‌رود شعاع هادی درونی توسط جریان بار و اندازة کلی، توسط ولتاژ و نوع ماده عایق بکاررفته تعیین می‌شود. فرض کنید شعاع هادی درونی $r_i = 0.4$ (cm) بوده و لایه‌های هم‌مرکز لاستیکی ($\epsilon_{rr} = 3.2$) و پلی‌استرین ($\epsilon_{rp} = 2.6$) به‌عنوان مواد عایق بکاررفته باشند. کابلی طرح کنید که در مقدار ولتاژ نامی 20 (kV) کار کند. برای اجتناب از شکستگی ناشی از افزایش غیرعادی ولتاژ ایجاد شده در اثر آذرخش و شرایط غیرعادی محیطی دیگر، حداکثر شدت میدان الکتریکی در مواد عایقی نباید از 25% مقاومت الکتریکی آنها تجاوز کند.

حل از جدول ۱-۳ صفحه ۱۳۷، مقاومت‌های دی‌الکتریکی لاستیک و پلی‌استرین را به ترتیب برابر 25×10^6 (V/m) و 20×10^6 (V/m) پیدا می‌کنیم. با استفاده از معادله (۳-۴۰) برای مقاومت‌های دی‌الکتریکی 25% منحص‌شده، روابط زیر را داریم

$$E = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon r} \left(\frac{V}{m} \right) \quad (3-40)$$

$$E_r \text{ حداکثر} = 0.25 \times 25 \times 10^6 = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon} \left(\frac{1}{r_i} \right) \quad (3-131 \text{ الف})$$

$$E_p \text{ حداکثر} = 0.25 \times 20 \times 10^6 = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon} \left(\frac{1}{r_p} \right) \quad (3-131 \text{ ب})$$

ترکیب معادلات (۳-۱۳۱ الف) و (۳-۱۳۱ ب) نتیجه می‌دهد

$$r_p = 1.54 r_i = 0.616 \text{ (cm)} \quad (3-132)$$

معادله (۳-۱۳۲) نشان می‌دهد که لایه عایقی پلی‌استرین باید بیرون لایه عایقی لاستیکی طبق شکل ۳-۲۶ الف) قرار داده شود. (تعیین اینکه اگر لایه پلی‌استرین در درون لایه لاستیکی قرار داده شود چه اتفاقی پیش خواهد آمد جالب توجه خواهد بود.)

کابل باید در اختلاف پتانسیل 20000 (V) بین هادیهای درونی و بیرونی کار کند. قرار می‌دهیم

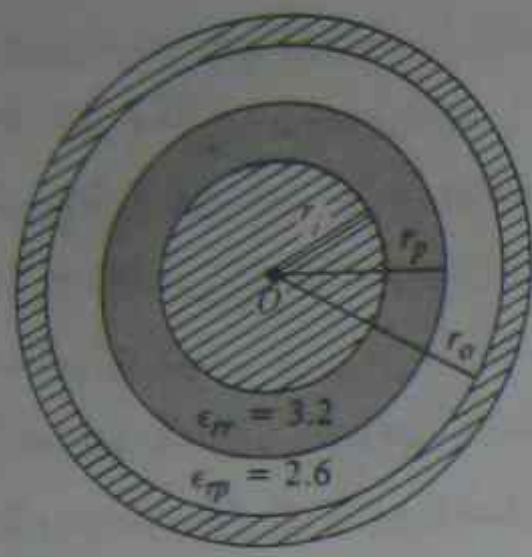
$$-\int_{r_o}^{r_p} E_p dr - \int_{r_p}^{r_i} E_r dr = 20000$$

که در آن هر دوی E_p و E_r به صورت داده شده در معادله (۳-۴۰) هستند. رابطه بالا منجر می‌شود به

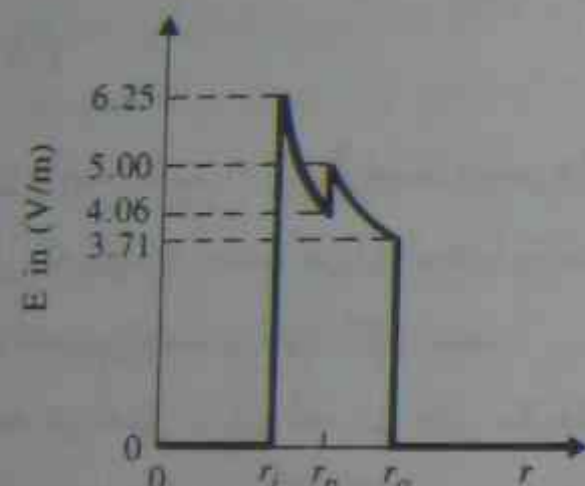
$$\frac{\rho_L}{2\pi\epsilon} \left(\frac{1}{\epsilon_{rp}} \ln \frac{r_o}{r_p} + \frac{1}{\epsilon_{rr}} \ln \frac{r_p}{r_i} \right) = 20000$$

یا

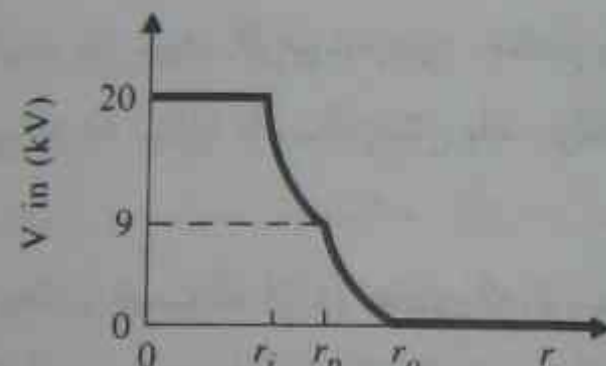
$$\frac{\rho_L}{2\pi\epsilon} \left(\frac{1}{2.6} \ln \frac{r_o}{1.54 r_i} + \frac{1}{3.2} \ln 1.54 \right) = 20000 \quad (3-133)$$



(الف)



(ب)



(ب)

شکل ۳-۲۶ سطح مقطع کابل هم‌محور با دو نوع ماده عایق متفاوت (مثال ۳-۱۶)

چون $r_i = 0.4$ (cm) داده شده است می‌توان با پیدا کردن عامل $\rho_L / 2\pi\epsilon$ از معادله (۳-۱۳۱ الف) و سپس بکاربردن آن در معادله (۳-۱۳۲) r_o را تعیین کرد. بدست می‌آوریم $\rho_L / 2\pi\epsilon = 8 \times 10^4$ و $r_o = 2.08 r_i = 0.832$ (cm).

در شکل‌های ۳-۲۶ ب) و ۳-۲۶ الف) تغییرات شدت میدان الکتریکی شعاعی E و پتانسیل V در مقایسه با مقادیر آنها در پوشش بیرونی رسم شده‌اند. توجه کنید که جهش‌های ناپیوسته دارد در حالی که منحنی V پیوسته است. خواننده باید تمام مقادیر عددی مشخص شده را بررسی کند.

۳-۱۰ ظرفیت و خازن‌ها

از بخش ۳-۶ می‌دانیم، هادی در میدان الکتریکی ساکن، یک جسم هم‌پتانسیل است و بارهای قرار داده شده روی آن، به طوری خود را روی سطح هادی توزیع می‌کنند که میدان الکتریکی داخلی

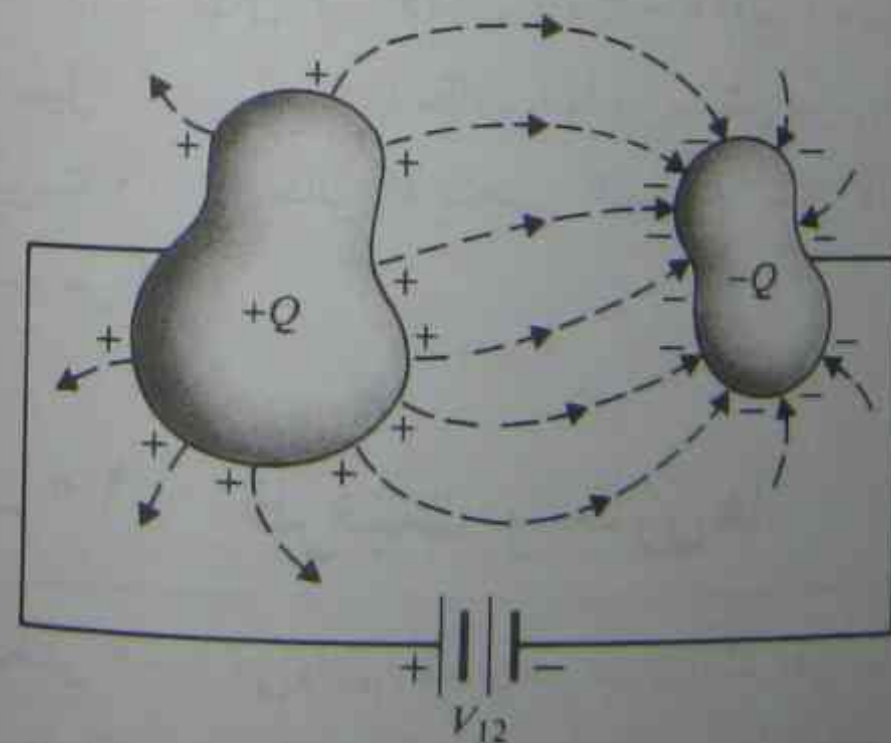
صفر شود. فرض کنید پتانسیل ناشی از بار Q ، V باشد. واضح است که افزایش کل بار با ضریب k تنها چگالی بار سطحی ρ_s را در همه نقاط با همان ضریب افزایش خواهد داد، بدون اینکه توزیع بار را تغییر دهد زیرا هادی همچنان یک جسم همپتانسیل در وضعیت سکون است. از معادله (۶۲-۳) می‌توان نتیجه گرفت که پتانسیل یک هادی مجزا مستقیماً متناسب با بار کل روی آن است. این مطلب را نیز می‌توان از روی این واقعیت که افزایش V با ضریب k ، $\mathbf{E} = -\nabla V$ را با ضریب k افزایش می‌دهد، ملاحظه کرد. اما از معادله (۷۲-۳)، $\mathbf{E} = \mathbf{a}_n \rho_s / \epsilon_0$ برمی‌آید که ρ_s و در نتیجه بار کل Q نیز با همان ضریب k افزایش خواهد یافت. بنابراین نسبت Q/V بدون تغییر باقی می‌ماند. می‌نویسیم

$$Q = CV$$

(۳-۱۲۴)

که در آن ثابت تناسب C ، ظرفیت جسم هادی مجزا نامیده می‌شود. ظرفیت یعنی، مقدار بار الکتریکی که باید به جسم افزوده شود تا پتانسیل الکتریکی آن به اندازه واحد افزایش یابد. واحد SI آن کولمب بر ولت یا فاراد (F) است.

آنچه در عمل دارای اهمیت قابل ملاحظه می‌باشد، خازن است که از دو هادی که توسط فضای آزاد یا محیط دی‌الکتریک از هم مجزا شده‌اند، تشکیل می‌شود. شکل هادیها مانند شکل ۲۷-۳ می‌تواند کاملاً دلخواه باشد. وقتی یک منبع ولتاژ $d-c$ بین هادیها متصل می‌شود، انتقال بار صورت پذیرفته و در نتیجه بار $+Q$ روی یک هادی و بار $-Q$ روی هادی دیگر قرار می‌گیرد. چندین خط میدان الکتریکی را که از بارهای مثبت سرچشمه گرفته و به بارهای منفی ختم می‌شوند در شکل ۲۷-۳ نشان داده‌ایم. دقت کنید که خطوط میدان بر سطوح هادی که سطوح همپتانسیل



شکل ۲۷-۳ خازنی با دو هادی

هستند. عمودند. اگر V به معنای اختلاف پتانسیل بین دو هادی، V_{12} در نظر گرفته شود معادله (۳-۱۲۴) می‌تواند در اینجا بکار رود. یعنی،

$$C = \frac{Q}{V_{12}} \quad (F) \quad (۳-۱۲۵)$$

ظرفیت یک خازن، یک خاصیت فیزیکی سیستمی متشکل از دو هادی است و به شکل هندسی و گذرده‌ی محیط بین آنها بستگی دارد؛ و به بار Q یا پتانسیل V_{12} بستگی ندارد. یک خازن دارای ظرفیت است، حتی اگر هیچ ولتاژی به آن اعمال نشده باشد و یا هیچ بار آزادی روی هادی‌های آن موجود نباشد. ظرفیت C از معادله (۳-۱۲۵) به یکی از دو روش زیر قابل تعیین است. (۱) فرض V_{12} و تعیین Q برحسب V_{12} یا (۲) فرض Q و تعیین V_{12} برحسب Q . در این مرحله چون هنوز روشهای حل مسائل شرایط مرزی را (که در فصل ۴ بررسی خواهند شد) مطالعه نکرده‌ایم، C را از روش دوم بدست خواهیم آورد. روش حل بدین شرح است:

- ۱- دستگاه مختصات مناسبی را برای شکل هندسی مسئله داده شده انتخاب کنید.
- ۲- بارهای $+Q$ و $-Q$ را روی هادیها در نظر بگیرید.
- ۳- با استفاده از معادله (۳-۱۲۲)، قانون گوس یا روابط دیگر، \mathbf{E} را از روی Q بیابید.
- ۴- با محاسبه انتگرال زیر، از هادی حامل بار $-Q$ تا هادی حامل بار $+Q$ ، V_{12} را محاسبه کنید.

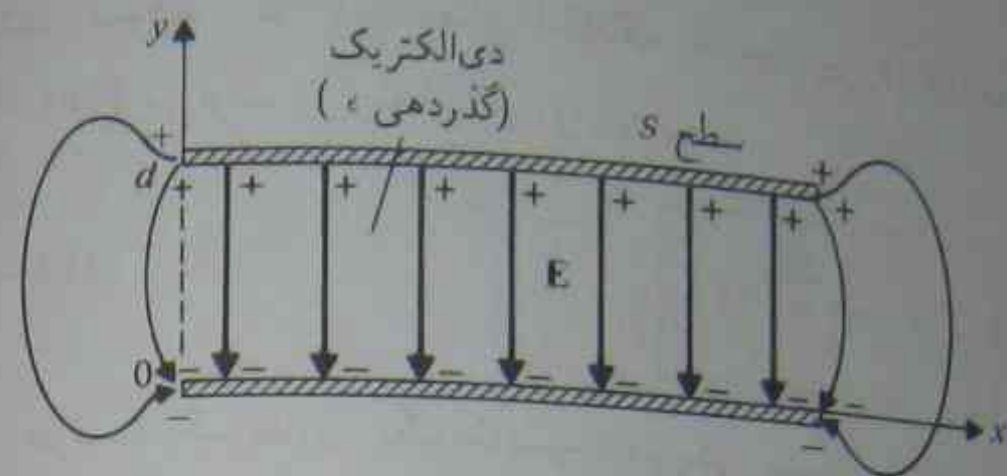
$$V_{12} = - \int_{\gamma} \mathbf{E} \cdot d\ell$$

۵- از نسبت Q/V_{12} ، C را بیابید.

مثال ۳-۱۷ خازن صفحه‌ای موازی، از دو صفحه هادی موازی به سطح S و به فاصله یکنواخت d تشکیل می‌شود. فضای بین صفحه‌ها با یک دی‌الکتریک با گذرده‌ی ثابت ϵ پر شده است. ظرفیت آن را تعیین کنید.

حل مقطع خازن را در شکل ۳-۲۸ ملاحظه می‌کنید. روشن است که دستگاه مختصات مناسب برای بکارگیری، دستگاه مختصات کارتزین است. با پیروی از دستورالعمل خلاصه شده فوق، بارهای $+Q$ و $-Q$ را به ترتیب روی صفحات هادی بالایی و پایینی قرار می‌دهیم. فرض می‌شود بارها به طور یکنواخت روی صفحات هادی با چگالیهای سطحی $+\rho_s$ و $-\rho_s$ توزیع می‌شوند، به طوری که

$$\rho_s = \frac{Q}{S}$$



شکل ۲۸-۳ مقطع یک خازن صفحه‌ای موازی (مثال ۱۷-۳)

از معادله (۱۲۲-۳) داریم

$$\mathbf{E} = -\mathbf{a}_y \frac{\rho_s}{\epsilon} = -\mathbf{a}_y \frac{Q}{\epsilon S}$$

که اگر اثرات لبه‌ای میدان الکتریکی در کناره‌های صفحات صرف نظر شود، \mathbf{E} در داخل دی الکتریک ثابت است. حال

$$V_{12} = - \int_{y=0}^{y=d} \mathbf{E} \cdot d\ell = - \int_0^d \left(-\mathbf{a}_y \frac{Q}{\epsilon S} \right) \cdot (\mathbf{a}_y dy) = \frac{Q}{\epsilon S} d$$

بنابراین، در یک خازن صفحه‌ای موازی،

$$C = \frac{Q}{V_{12}} = \epsilon \frac{S}{d} \quad (۱۳۶-۳)$$

که مستقل از Q یا V_{12} است.

در این مسئله می‌توانیم با فرض اختلاف پتانسیل V_{12} بین صفحات بالائی و پایینی شروع کنیم. شدت میدان الکتریکی میان صفحات یکنواخت بوده و مساوی است با

$$\mathbf{E} = -\mathbf{a}_y \frac{V_{12}}{d}$$

چگالی‌های بار سطحی در صفحات هادی بالائی و پایینی به ترتیب $+\rho_s$ و $-\rho_s$ است که از نظر معادله (۷۲-۳)

$$\rho_s = \epsilon E_y = \epsilon \frac{V_{12}}{d}$$

بنابراین $Q = \rho_s S = (\epsilon S/d) V_{12}$ و $C = Q/V_{12} = \epsilon S/d$ همان طوری که قبلاً هم بدست آمد.

مثال ۱۸-۳ یک خازن استوانه‌ای از یک هادی داخلی به شعاع a و یک هادی بیرونی با شعاع داخلی b تشکیل شده است. فضای بین هادیها از دی الکتریکی با گذردهی ϵ پر شده است و طول خازن برابر L است. ظرفیت این خازن را تعیین کنید.

حل در این مسئله از مختصات استوانه‌ای استفاده می‌کنیم. نخست فرض می‌کنیم بارهای $+Q$ و $-Q$ به ترتیب روی سطح هادی داخلی و روی سطح داخلی هادی بیرونی قرار گرفته‌اند. میدان \mathbf{E} در دی الکتریک با بکارگیری قانون گوس در مورد یک سطح گوسی استوانه‌ای درون دی الکتریک، $a < r < b$ بدست می‌آید. (دقت کنید که معادله (۱۲۲-۳) فقط مؤلفه عمودی میدان \mathbf{E} در سطح هادی را بدست می‌دهد. از آنجائی که سطوح هادی در این مثال مسطح نیستند، میدان \mathbf{E} در دی الکتریک ثابت نبوده و معادله (۱۲۲-۳) نمی‌تواند برای یافتن \mathbf{E} در ناحیه $a < r < b$ بکار رود). با مراجعه به شکل ۲۹-۳ و بکارگیری قانون گوس

$$\mathbf{E} = \mathbf{a}_r E_r = \mathbf{a}_r \frac{Q}{r \pi \epsilon L} \quad (۱۳۷-۳)$$

دوباره از تأثیرات لبه‌ای میدان در نزدیکی دو انتهای هادیها صرف نظر می‌کنیم. اختلاف پتانسیل میان هادیهای داخلی و خارجی برابر است با

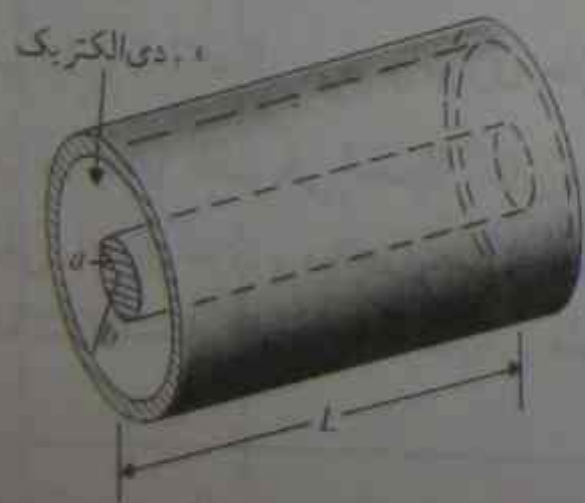
$$V_{ab} = - \int_{r=b}^{r=a} \mathbf{E} \cdot d\ell = - \int_b^a \left(\mathbf{a}_r \frac{Q}{r \pi \epsilon L} \right) \cdot (\mathbf{a}_r dr) \quad (۱۳۸-۳)$$

$$= \frac{Q}{\pi \epsilon L} \ln \left(\frac{b}{a} \right)$$

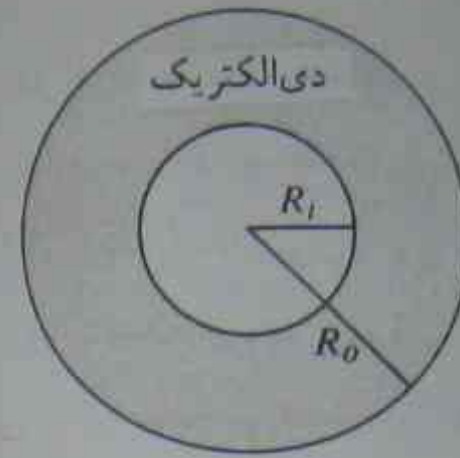
بنابراین، در مورد خازن استوانه‌ای،

$$C = \frac{Q}{V_{ab}} = \frac{\pi \epsilon L}{\ln \left(\frac{b}{a} \right)} \quad (۱۳۹-۳)$$

این مسئله را نمی‌توان با یک V_{ab} مفروض حل نمود، زیرا میدان الکتریکی بین هادی‌های داخلی و خارجی یکنواخت نیست. از این رو تا زمانی که یاد بگیریم چگونه، چنین مسئله شرط مرزی را حل کنیم، نخواهیم توانست \mathbf{E} و Q را بر حسب V_{ab} بیان کنیم.



شکل ۲۹-۳ خازن استوانه‌ای (مثال ۱۸-۳)



شکل ۳-۳۰ خازن کروی (مثال ۳-۱۹)

مثال ۳-۱۹ یک خازن کروی از یک کره هادی به شعاع R_1 و یک هادی بیرونی با دیواره داخلی کروی به شعاع R_0 تشکیل شده است. فضای بین هادیها از دی الکتریک با گذردهی ϵ پر شده است. ظرفیت آن را تعیین کنید.

حل فرض کنید بارهای $+Q$ و $-Q$ به ترتیب روی هادیهای داخلی و خارجی خازن کروی شکل ۳-۳۰ قرار دارند. با بکارگیری قانون گوس در مورد سطحی گوسی کروی به شعاع R ($R_1 < R < R_0$) داریم

$$E = a_R E_R = a_R \frac{Q}{4\pi\epsilon R^2}$$

$$V = - \int_{R_0}^{R_1} \mathbf{E} \cdot (a_R dR) = - \int_{R_0}^{R_1} \frac{Q}{4\pi\epsilon R^2} dR = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_0} \right)$$

بنابراین، در یک خازن کروی،

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{4\pi\epsilon}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_0}} \quad (۳-۱۴۰)$$

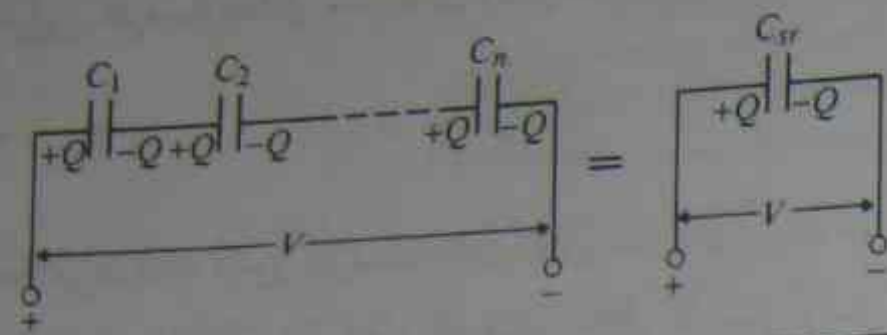
در مورد یک هادی کروی مجزا به شعاع R_1 ، $R_0 \rightarrow \infty$ ، $C = 4\pi\epsilon R_1$.

۳-۱۰-۱ اتصال سری و موازی خازن‌ها

در مدارهای الکتریکی معمولاً خازن‌ها به صورت‌های گوناگونی ترکیب می‌شوند. دو روش اصلی، اتصال سری و موازی است. در اتصال سری، یا انتها به ابتدا، که در شکل ۳-۳۱ نشان داده شده است، ترمینالهای خارجی فقط از خازن‌های اول و آخر اختیار می‌گردند. هنگامی

آ بدون توجه به شکل واقعی، خازن‌ها را در مدارات، طبق فرار داد، با دو خط کوتاه موازی نشان می‌دهند.

۳-۱۰ ظرفیت و خازن‌ها



شکل ۳-۳۱ اتصال سری خازن‌ها

که اختلاف پتانسیل یا ولتاژ الکتریکی ساکن V اعمال می‌شود، بارهای جمع شده روی هادیهای متصل به ترمینال‌های خارجی $+Q$ و $-Q$ هستند. روی هادیهای وصل شده داخلی نیز بار الکتریکی به صورتی القا می‌شود که روی هر خازن، مستقل از ظرفیت آن $+Q$ و $-Q$ ظاهر خواهد شد. اختلاف پتانسیل دو سر خازن‌های جداگانه عبارتند از $Q/C_1, Q/C_2, \dots, Q/C_n$ و

$$V = \frac{Q}{C_{sr}} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \dots + \frac{Q}{C_n}$$

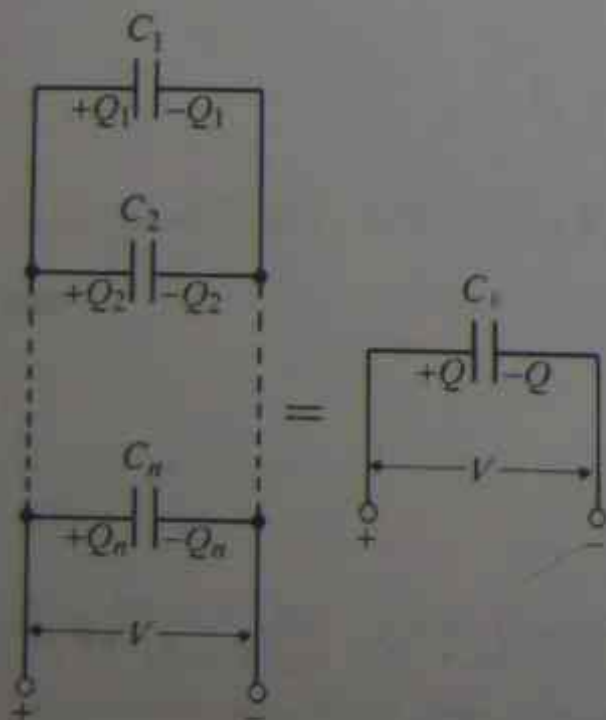
که C_{sr} در آن ظرفیت معادل خازن‌های وصل شده سری است. داریم

$$\frac{1}{C_{sr}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} \quad (۳-۱۴۱)$$

در اتصال موازی خازن‌ها، مطابق شکل ۳-۳۲، ترمینال‌های خارجی به هادیهای کلیه خازن‌ها متصل می‌شوند. هنگامی که اختلاف پتانسیل V به ترمینال‌ها اعمال می‌شود، بار جمع شده روی هر خازن به ظرفیت آن بستگی دارد. کل بار، جمع تمامی بارهاست.

$$Q = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n$$

$$= C_1 V + C_2 V + \dots + C_n V = C_{||} V$$



شکل ۳-۳۲ اتصال موازی خازن‌ها

بنابراین ظرفیت معادل خازنهای وصل شده موازی عبارت است از

$$C_{||} = C_1 + C_2 + \dots + C_n$$

(۱۴۲-۳)

توجه می‌کنید که فرمول ظرفیت معادل خازنهای وصل شده سری مشابه مقاومت معادل مقاومتهای وصل شده موازی است و فرمول ظرفیت معادل خازنهای وصل شده موازی، مشابه مقاومت معادل مقاومتهای وصل شده سری است. آیا این مطلب را می‌توانید توجیه کنید؟

مثال ۳-۲۰ چهار خازن $C_1 = 1(\mu F)$ ، $C_2 = 2(\mu F)$ ، $C_3 = 2(\mu F)$ ، $C_4 = 4(\mu F)$ مطابق شکل ۳-۲۳ به هم متصل شده‌اند. ولتاژ $d-c$ ، $100(V)$ به ترمینال‌های خارجی $a-b$ اعمال می‌شود. کمیت‌های زیر را تعیین نمایید: (الف) ظرفیت معادل کل بین ترمینال‌های $a-b$ ، (ب) بار روی هر خازن، و (ب) اختلاف پتانسیل دو سر هر خازن.

حل

الف) C_{12} ظرفیت معادل اتصال سری C_1 و C_2 برابر است با

$$C_{12} = \frac{1}{(1/C_1) + (1/C_2)} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{2}{3} (\mu F)$$

ترکیب موازی C_{12} و C_3 بدست می‌دهد

$$C_{123} = C_{12} + C_3 = \frac{11}{3} (\mu F)$$

از این رو ظرفیت معادل کل C_{ab} برابر می‌شود با

$$C_{ab} = \frac{C_{123} C_4}{C_{123} + C_4} = \frac{44}{23} = 1,913 (\mu F)$$

ب) چون ظرفیت‌ها داده شده‌اند، به محض تعیین بارها، ولتاژها نیز پیدا خواهند شد. چهار مجهول وجود دارد: Q_1 ، Q_2 ، Q_3 و Q_4 . چهار معادله برای تعیین آنها مورد نیاز است.

اتصال سری C_1 و C_2 : $Q_1 = Q_2$

قانون ولتاژ کیرشف، $V_1 + V_2 = V_3$: $\frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} = \frac{Q_3}{C_3}$

قانون ولتاژ کیرشف، $V_3 + V_4 = 100$: $\frac{Q_3}{C_3} + \frac{Q_4}{C_4} = 100$

اتصال سری در d : $Q_3 + Q_4 = Q_4$

با استفاده از مقادیر داده شده C_1 ، C_2 ، C_3 ، C_4 و حل معادلات فوق، خواهیم داشت

$$Q_1 = Q_2 = \frac{800}{23} = 34,8 (\mu C)$$

$$Q_3 = \frac{3600}{23} = 156,5 (\mu C)$$

$$Q_4 = \frac{4400}{23} = 191,3 (\mu C)$$

پ) با تقسیم بارها بر ظرفیت‌ها بدست می‌آوریم

$$V_1 = \frac{Q_1}{C_1} = 34,8 (V)$$

$$V_2 = \frac{Q_2}{C_2} = 17,4 (V)$$

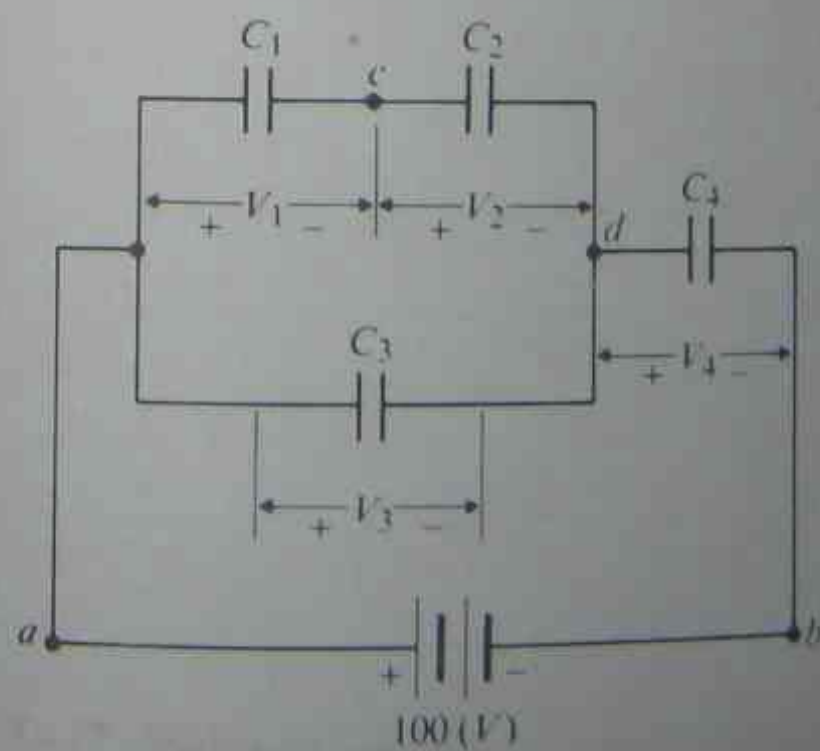
$$V_3 = \frac{Q_3}{C_3} = 52,2 (V)$$

$$V_4 = \frac{Q_4}{C_4} = 47,8 (V)$$

صحت نتایج را می‌توان با در نظر گرفتن $V_1 + V_2 = V_3$ و $V_3 + V_4 = 100(V)$ تحقیق نمود.

۳-۱۰-۲ ظرفیت در سیستم‌های چند هادی

اکنون حالت بیش از دو جسم هادی را در یک سیستم مجزا، مطابق شکل ۳-۲۴ در نظر می‌گیریم. محل هادیها دلخواه است، و یکی از هادیها می‌تواند نشان‌دهنده زمین باشد. روشن است که وجود یک بار روی هر کدام از هادیها، پتانسیل بقیه را تحت تأثیر قرار می‌دهد. از آنجائی



شکل ۳-۲۴ ترکیب خازن‌ها (مثال ۳-۲۰)

که رابطه بین پتانسیل و بار خطی است. می توانیم مجموعه N معادله ارتباط دهنده پتانسیل های V_1, \dots, V_N مربوط به N هادی، با بارهای Q_1, Q_2, \dots, Q_N را بنویسیم:

$$\begin{aligned} V_1 &= p_{11}Q_1 + p_{12}Q_2 + \dots + p_{1N}Q_N \\ V_2 &= p_{21}Q_1 + p_{22}Q_2 + \dots + p_{2N}Q_N \\ &\vdots \\ V_N &= p_{N1}Q_1 + p_{N2}Q_2 + \dots + p_{NN}Q_N \end{aligned} \quad (143-3)$$

در معادلات (۱۴۳-۳) ها، ضرایب پتانسیل نامیده می شوند و ثابت هائی هستند که مقادیر آنها به شکل و محل هادیا و نیز گذردهی محیط اطراف بستگی دارد. توجه داریم که در یک سیستم مجزا،

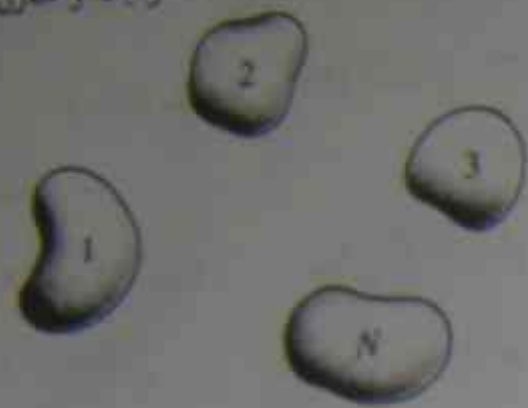
$$Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots + Q_N = 0 \quad (144-3)$$

N معادله خطی (۱۴۳-۳) می تواند برای بیان بارها به صورت تابعی از پتانسیل ها به شکل زیر معکوس شوند:

$$\begin{aligned} Q_1 &= c_{11}V_1 + c_{12}V_2 + \dots + c_{1N}V_N \\ Q_2 &= c_{21}V_1 + c_{22}V_2 + \dots + c_{2N}V_N \\ &\vdots \\ Q_N &= c_{N1}V_1 + c_{N2}V_2 + \dots + c_{NN}V_N \end{aligned} \quad (145-3)$$

که در آن c_{ij} ها، ثابت هائی هستند که مقادیرشان فقط به p_{ij} های معادلات (۱۴۳-۳) بستگی دارد. ضرایب c_{ii} ضرایب ظرفیت نامیده شده، برابر نسبت بار Q_i به پتانسیل V_i روی i امین هادی ($i = 1, 2, \dots, N$) درحالی که بقیه هادی های دیگر زمین شده باشند. c_{ij} ها ($i \neq j$)، ضرایب القا نامیده می شوند. اگر بار مثبت Q_i روی i امین هادی قرار داشته باشد V_i مثبت است. اما بار Q_j القا شده روی j امین ($j \neq i$) هادی منفی خواهد بود. از این رو، ضرایب ظرفیت c_{ii} مثبت، و ضرایب القای c_{ij} منفی هستند. شرط تقابل تضمین می کند که $p_{ij} = p_{ji}$ و $c_{ij} = c_{ji}$.

به منظور بنا نهادن یک مفهوم فیزیکی در مورد ضرایب ظرفیت و القا، بیاید سیستمی متشکل از چهار هادی طبق شکل ۳-۲۲ را با این فرض در نظر بگیریم که هادی شماره N در اینجا زمین هادی در پتانسیل صفر و دارای شماره صفر است. نمودار شماتیک سیستم چهار هادی، در شکل ۳-۲۵ نشان داده شده است. به طوری که هادیهای ۱، ۲، ۳ تنها با نقاط (گره های) ساده ترسیم شده اند. ظرفیت های توزیع بین جفت گره ها و بین سه گره و زمین نشان داده



شکل ۳-۲۴ یک سیستم چند هادی

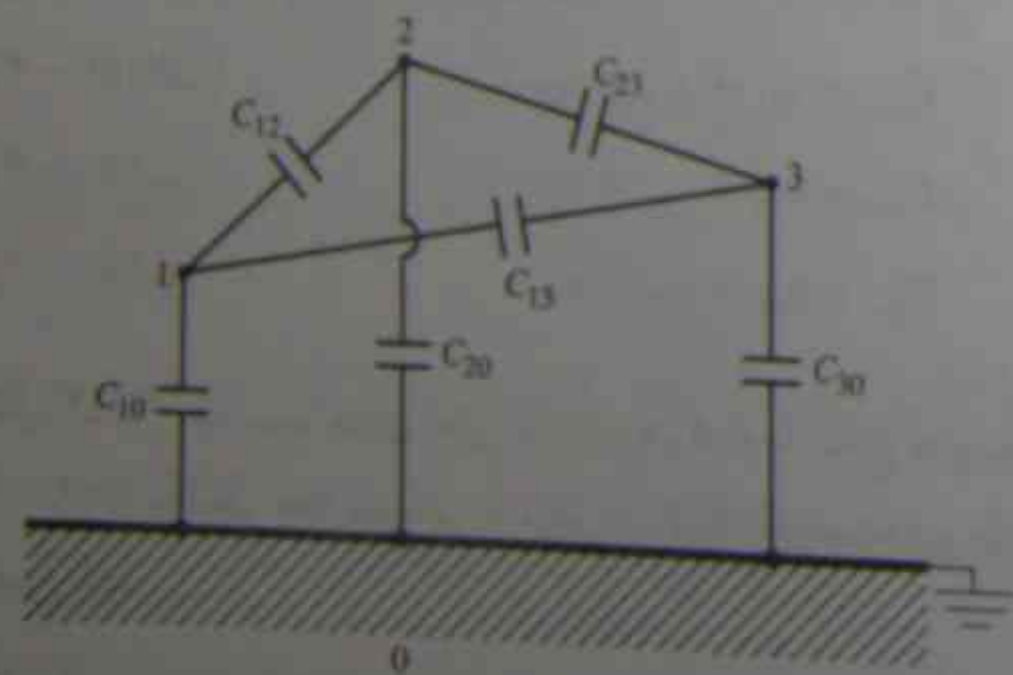
شده اند. اگر Q_1, Q_2, Q_3 و V_1, V_2, V_3 به ترتیب نمایش دهنده بارها و پتانسیل های هادیهای ۱، ۲، ۳ باشند، سه معادله اول (۱۴۵-۳) به صورت زیر درمی آیند

$$\begin{aligned} Q_1 &= c_{11}V_1 + c_{12}V_2 + c_{13}V_3 & (3-146 \text{ الف}) \\ Q_2 &= c_{21}V_1 + c_{22}V_2 + c_{23}V_3 & (3-146 \text{ ب}) \\ Q_3 &= c_{31}V_1 + c_{32}V_2 + c_{33}V_3 & (3-146 \text{ پ}) \end{aligned}$$

که در آن از رابطه تقارن $c_{ij} = c_{ji}$ استفاده شده است. از طرف دیگر، دسته دیگری از سه رابطه $Q \sim V$ را بر اساس نمودار شماتیک شکل ۳-۲۵ می توان نوشت:

$$\begin{aligned} Q_1 &= C_{11}V_1 + C_{12}(V_1 - V_2) + C_{13}(V_1 - V_3) & (3-147 \text{ الف}) \\ Q_2 &= C_{21}V_2 + C_{12}(V_2 - V_1) + C_{23}(V_2 - V_3) & (3-147 \text{ ب}) \\ Q_3 &= C_{31}V_3 + C_{13}(V_3 - V_1) + C_{23}(V_3 - V_2) & (3-147 \text{ پ}) \end{aligned}$$

که در آن C_{11}, C_{22}, C_{33} و C_{ij} ظرفیت های جزئی خودی و C_{ij} ($i \neq j$) ظرفیت های جزئی متقابل هستند.



شکل ۳-۲۵ نمودار شماتیک سه هادی و زمین

معادلات (۱۴۷-۳ الف)، (۱۴۷-۳ ب) و (۱۴۷-۳ پ) به صورت زیر قابل بازنویسی است:

$$Q_1 = (C_{11} + C_{12} + C_{13})V_1 - C_{12}V_2 - C_{13}V_3 \quad (۱۴۸-۳ \text{ الف})$$

$$Q_2 = -C_{12}V_1 + (C_{22} + C_{12} + C_{23})V_2 - C_{23}V_3 \quad (۱۴۸-۳ \text{ ب})$$

$$Q_3 = -C_{13}V_1 - C_{23}V_2 + (C_{33} + C_{13} + C_{23})V_3 \quad (۱۴۸-۳ \text{ پ})$$

با مقایسه معادلات (۱۴۸-۳) با معادلات (۱۴۶-۳) بدست می آید

$$c_{11} = C_{11} + C_{12} + C_{13} \quad (۱۴۹-۳ \text{ الف})$$

$$c_{22} = C_{22} + C_{12} + C_{23} \quad (۱۴۹-۳ \text{ ب})$$

$$c_{33} = C_{33} + C_{13} + C_{23} \quad (۱۴۹-۳ \text{ پ})$$

و

$$c_{12} = -C_{12} \quad (۱۵۰-۳ \text{ الف})$$

$$c_{23} = -C_{23} \quad (۱۵۰-۳ \text{ ب})$$

$$c_{13} = -C_{13} \quad (۱۵۰-۳ \text{ پ})$$

بر اساس معادله (۱۴۹-۳ الف) می توان ضریب ظرفیت c_{11} را به عنوان ظرفیت کل بین هادی ۱ و همه هادیهای دیگر در حالی که با هم به زمین متصل شده اند، تفسیر نمود؛ همین طور c_{22} و c_{33} را. معادلات (۱۵۰-۳) نشان می دهند که ضرایب القا، منفی ظرفیت های جزئی متقابل هستند. با معکوس کردن معادلات (۱۴۹-۳) می توان ظرفیت های هادی ها نسبت به زمین را بر حسب ضرایب ظرفیت و القا بیان نمود:

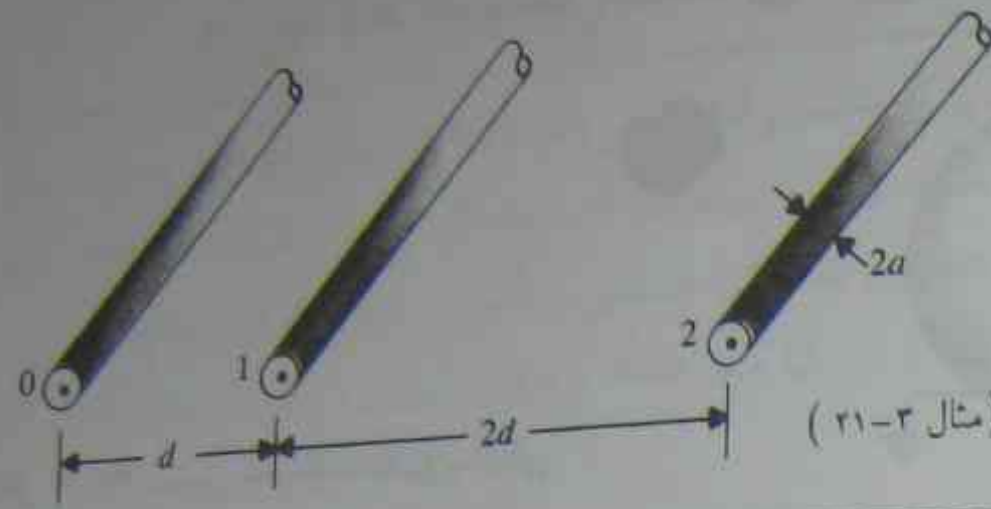
$$C_{11} = c_{11} + c_{12} + c_{13} \quad (۱۵۱-۳ \text{ الف})$$

$$C_{22} = c_{22} + c_{12} + c_{23} \quad (۱۵۱-۳ \text{ ب})$$

$$C_{33} = c_{33} + c_{13} + c_{23} \quad (۱۵۱-۳ \text{ پ})$$

مثال ۳-۲۱ سه سیم هادی افقی موازی، هر کدام با شعاع a و مجزا شده از زمین، مطابق شکل ۳-۳۶ از یکدیگر جدا شده اند. با فرض $d \gg a$ ، ظرفیت های جزئی در واحد طول را بین سیم ها تعیین کنید.

حل این سیمها را طبق شکل ۳-۳۶ با هادیهای ۱، ۲ و نامگذاری می کنیم. با انتخاب هادی ۰ به عنوان مرجع و استفاده از معادله (۱۴۸-۳)، دو معادله برای اختلاف پتانسیل های V_1



شکل ۳-۳۶ سه سیم موازی (مثال ۳-۲۱)

و V_2 ناشی از سه سیم به صورت زیر قابل نوشتن است:

$$V_1 = \frac{\rho_{L1}}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{a}{d} + \frac{\rho_{L2}}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{d}{a} + \frac{\rho_{L3}}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2d}{a}$$

یا

$$2\pi\epsilon_0 V_1 = \rho_{L1} \ln \frac{a}{d} + \rho_{L2} \ln \frac{d}{a} + \rho_{L3} \ln \frac{2d}{a} \quad (۱۵۲-۳ \text{ الف})$$

که در آن ρ_{L1} ، ρ_{L2} و ρ_{L3} به ترتیب، نمایانگر بار در واحد طول سیم های ۱، ۲ و ۳ هستند. به طور مشابه،

$$2\pi\epsilon_0 V_2 = \rho_{L1} \ln \frac{a}{2d} + \rho_{L2} \ln \frac{d}{2d} + \rho_{L3} \ln \frac{2d}{a} \quad (۱۵۲-۳ \text{ ب})$$

در مورد سیستم مجزای سه هادی داریم $\rho_{L1} + \rho_{L2} + \rho_{L3} = 0$ یا

$$\rho_{L1} = -(\rho_{L2} + \rho_{L3}) \quad (۱۵۳-۳)$$

ترکیب معادلات (۱۵۲-۳ الف)، (۱۵۲-۳ ب) و (۱۵۳-۳) نتیجه می دهد

$$2\pi\epsilon_0 V_1 = \rho_{L2} \ln \frac{d}{a} + \rho_{L3} \ln \frac{2d}{a} \quad (۱۵۴-۳ \text{ الف})$$

$$2\pi\epsilon_0 V_2 = \rho_{L2} \ln \frac{2d}{2d} + \rho_{L3} \ln \frac{2d}{a} \quad (۱۵۴-۳ \text{ ب})$$

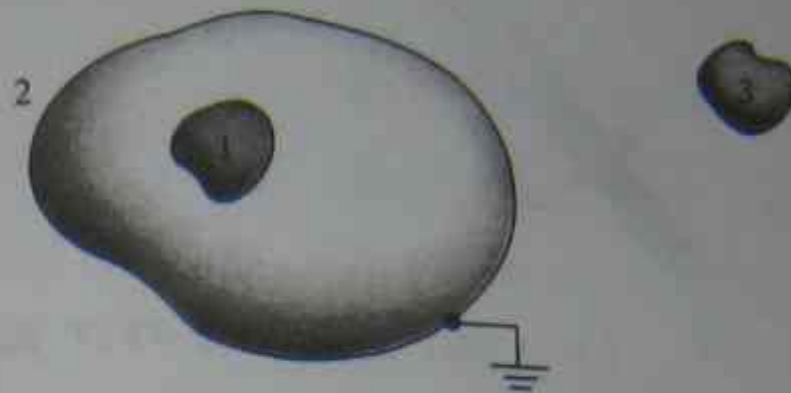
معادلات (۱۵۴-۳ الف) و (۱۵۴-۳ ب) برای بدست آوردن ρ_{L2} و ρ_{L3} به صورت تابعی از V_1 و V_2 بکار می روند.

$$\rho_{L2} = \Delta \cdot \left(V_1 \ln \frac{2d}{a} - V_2 \ln \frac{2d}{a} \right) \quad (۱۵۵-۳ \text{ الف})$$

$$\rho_{L3} = \Delta \cdot \left(-V_1 \ln \frac{2d}{a} + V_2 \ln \frac{2d}{a} \right) \quad (۱۵۵-۳ \text{ ب})$$

که در آن

$$\Delta = \frac{2\pi\epsilon_0}{4 \ln \frac{d}{a} \ln \frac{2d}{a} - \left(\ln \frac{2d}{a} \right)^2} \quad (۱۵۶-۳)$$



شکل ۳-۳۷ نمایش محافظت الکترواستاتیکی

با مقایسه معادلات (۳-۱۵۵) با معادلات (۳-۱۴۶)، (۳-۱۴۸)، و (۳-۱۵۱) ظرفیت‌های جزئی زیر در واحد طول برای سیستم سه سیم مفروض بدست می‌آید:

$$C_{12} = -c_{12} = \Delta \cdot \ln \frac{rd}{ra} \quad (۳-۱۵۷ \text{ الف})$$

$$C_{10} = c_{11} + c_{12} = \Delta \cdot \left(r \ln \frac{rd}{a} - \ln \frac{rd}{ra} \right) \quad (۳-۱۵۷ \text{ ب})$$

$$C_{20} = c_{22} + c_{12} = \Delta \cdot \left(r \ln \frac{d}{a} - \ln \frac{rd}{ra} \right) \quad (۳-۱۵۷ \text{ پ})$$

۳-۱۰-۳ محافظت الکتریسیته ساکن

محافظت الکتریسیته ساکنی، به معنی روشی برای کاهش تزویج خازنی بین اجسام هادی، در برخی از کاربردهای عملی، اهمیت دارد. بیابید وضعیت نشان داده شده در شکل ۳-۳۷ را که در آن، پوسته هادی زمین شده ۲، به طور کامل جسم هادی ۱ را احاطه کرده است، در نظر بگیریم. با قراردادن $V_2 = 0$ در معادله (۳-۱۴۷ الف) داریم

$$Q_1 = C_{10} V_1 + C_{12} V_1 + C_{13} (V_1 - V_2) \quad (۳-۱۵۸)$$

وقتی $Q_1 = 0$ است، میدانی در داخل پوسته ۲ وجود نخواهد داشت؛ از این رو جسم ۱ و پوسته ۲ دارای پتانسیل مشابه $V_1 = V_2 = 0$ هستند. از معادله (۳-۱۵۸) می‌بینیم که ظرفیت تزویج C_{12} باید صفر باشد زیرا V_2 اختیاری است. این بدان معنی است که تغییر در V_2 ، تأثیری بر Q_1 نخواهد داشت، و برعکس. بنابراین محافظت الکتریسیته ساکنی بین اجسام هادی ۱ و ۲ وجود دارد. روشن است که اگر پوسته هادی زمین شده ۲، به جای جسم ۱، جسم ۳ را احاطه کند، همین بدست خواهد آمد.

۱۱-۳ انرژی و نیروهای الکتریسیته ساکن

در بخش ۳-۵ خاطر نشان کردیم که پتانسیل الکتریکی یک نقطه در میدان الکتریکی، برابر است با کار لازم برای آوردن یک بار مثبت واحد از بینهایت (در پتانسیل مرجع صفر) به آن نقطه. برای آوردن بار Q_2 (به آهستگی، به طوری که انرژی جنبشی و تأثیرات تشعشعی قابل صرف نظر کردن باشد) از بینهایت به فاصله R_{12} از بار Q_1 و در مقابله با میدان این بار در فضای آزاد، مقدار کار لازم برابر است با

$$W_2 = Q_2 V_2 = Q_2 \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_{12}} \quad (۳-۱۵۹)$$

از آنجائی که میدانهای الکتریسیته ساکن ذخیره شونده هستند، W_2 مستقل از مسیری شده توسط Q_2 است. صورت دیگر معادله (۳-۱۵۹) چنین است

$$W_2 = Q_1 \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{12}} = Q_1 V_1 \quad (۳-۱۶۰)$$

این کار در مجموعه دو بار به صورت انرژی پتانسیل ذخیره می‌شود. با ترکیب معادلات (۳-۱۵۹) و (۳-۱۶۰) می‌توان نوشت

$$W_2 = \frac{1}{2} (Q_1 V_1 + Q_2 V_2) \quad (۳-۱۶۱)$$

حال فرض کنید بار دیگر Q_3 از بینهایت به نقطه‌ای به فاصله R_{13} از Q_1 و R_{23} از Q_2 آورده شود؛ کار اضافی به مقدار

$$\Delta W = Q_3 V_3 = Q_3 \left(\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_{13}} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{23}} \right) \quad (۳-۱۶۲)$$

مورد نیاز خواهد بود. جمع ΔW در معادله (۳-۱۶۲) و W_2 در معادله (۳-۱۵۹)، انرژی پتانسیل W_3 است که در مجموعه سه بار Q_1 ، Q_2 و Q_3 ذخیره شده است. یعنی،

$$W_3 = W_2 + \Delta W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_1 Q_2}{R_{12}} + \frac{Q_1 Q_3}{R_{13}} + \frac{Q_2 Q_3}{R_{23}} \right) \quad (۳-۱۶۳)$$

W_3 را به صورت زیر می‌توانیم دوباره بنویسیم:

$$W_3 = \frac{1}{2} \left[Q_1 \left(\frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{12}} + \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0 R_{13}} \right) + Q_2 \left(\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_{12}} + \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0 R_{23}} \right) + Q_3 \left(\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_{13}} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{23}} \right) \right] = \frac{1}{2} (Q_1 V_1 + Q_2 V_2 + Q_3 V_3) \quad (۳-۱۶۴)$$

در معادله (۳-۱۶۴)، پتانسیل در نقطه Q_1 ناشی از بارهای Q_2 و Q_3 است؛ و با V_1 معادله (۳-۱۶۰)، درحالتی که دو بار وجود داشت، متفاوت می‌باشد. به همین ترتیب، V_2 و V_3 به ترتیب پتانسیل‌های نقاط Q_2 و Q_3 در مجموعه متشکل از سه بار هستند. با تعمیم این روش آوردن بارهای اضافی، به عبارت کلی زیر در مورد انرژی پتانسیل گروه N بار نقطه‌ای گسته ساکن می‌رسیم. (هدف از زیرنویس e در W_e خاطرنشان ساختن این نکته است که انرژی دارای طبیعت الکتریکی است.) داریم

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N Q_k V_k \quad (\text{J}) \quad (3-165)$$

که V_k در آن، پتانسیل الکتریکی در نقطه Q_k ، ناشی از بارهای دیگر است و عبارتی به صورت زیر دارد:

$$V_k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq k)}}^N \frac{Q_j}{R_{jk}} \quad (3-166)$$

بجاست در اینجا دو نکته را تذکر دهیم. نخست آنکه، W_e می‌تواند منفی باشد. برای مثال، W_p در معادله (۳-۱۵۹) منفی خواهد بود، اگر Q_1 و Q_2 مختلف‌العلامه باشند. در این صورت، کار توسط میدان ناشی از Q_1 (و نه برعکس) برای حرکت دادن Q_2 از بینهایت انجام گرفته است. دوم اینکه W_e در معادله (۳-۱۶۵)، تنها انرژی فعل و انفعالی (انرژی متقابل) را نمایش می‌دهد و شامل کار لازم برای تشکیل دادن خود بارهای نقطه‌ای منفرد (انرژی خودی) نیست. برای کارهای فیزیک ذرات بنیادی، واحد SI انرژی، ژول (J)، واحد کار بسیار بزرگی است، زیرا در آنجا انرژی به‌طور معمول‌تر برحسب واحد بمراتب کوچکتری به نام الکترون‌ولت (eV) سنجیده می‌شود. یک الکترون‌ولت، انرژی یا کار لازم برای حرکت دادن یک الکترون برعکس اختلاف پتانسیل یک ولتی است.

$$1(\text{eV}) = (1.60 \times 10^{-19}) \times 1 = 1.60 \times 10^{-19} \quad (\text{J}) \quad (3-167)$$

انرژی برحسب (eV)، اساساً همان (J) بر واحد بار الکترونی است. پرتوهای پروتونی ناشی از قوی‌ترین شتاب‌دهنده ذرات با انرژی بالای جهان با انرژی جنبشی دو تریلیون الکترون‌ولت (۲ TeV) یا $2 \times 10^{12}(\text{J})$ یا $2 \times 10^{12} \times (1.6 \times 10^{-19}) = 3.2 \times 10^{-7}(\text{J})$ به هم برخورد می‌کنند. یک انرژی بستگی به اندازه (J) $W = 5 \times 10^{-19}(\text{J})$ در یک کریستال یونی برابر $W/e = 5 \times 10^{-19} / 1.6 \times 10^{-19}$

$3.125(\text{eV}) =$ است که یک عدد بمراتب راحت‌تری از عددی برحسب ژول جهت بکارگیری است.

مثال ۳-۲۲ انرژی لازم برای تشکیل یک کره باردار یکنواخت به شعاع b و چگالی بار حجمی ρ را پیدا کنید.

حل به دلیل تقارن، ساده‌تر است فرض کنیم که کره باردار از کنار هم قراردادن لایه‌های متوالی کروی به ضخامت dR تشکیل یافته است. در شعاع R ، مطابق شکل ۳-۲۸، پتانسیل برابر است با

$$V_R = \frac{Q_R}{4\pi\epsilon_0 R}$$

که Q_R در آن، کل بار موجود در کره‌ای به شعاع R است:

$$Q_R = \rho \frac{4}{3}\pi R^3$$

بار دیفرانسیلی در یک لایه کروی به ضخامت dR برابر است با

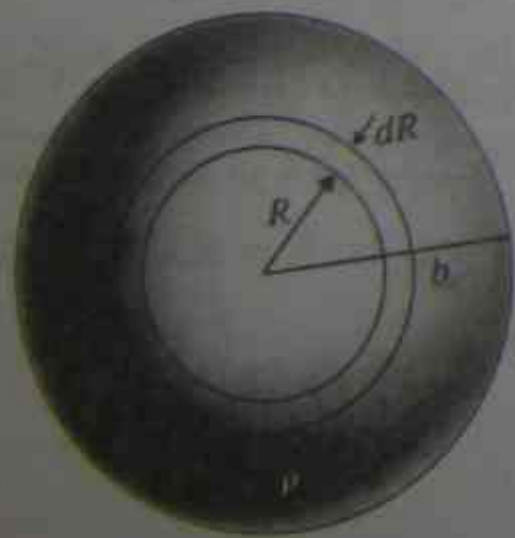
$$dQ_R = \rho 4\pi R^2 dR$$

و کار یا انرژی برای گرد آوردن dQ چنین است

$$dW = V_R dQ_R = \frac{4\pi}{3\epsilon_0} \rho^2 R^2 dR$$

از این رو کار یا انرژی کل لازم برای تشکیل یک کره یکنواخت باردار به شعاع b و چگالی بار ρ برابر می‌شود با

$$W = \int dW = \frac{4\pi}{3\epsilon_0} \rho^2 \int_0^b R^2 dR = \frac{4\pi \rho^2 b^5}{15\epsilon_0} \quad (\text{J}) \quad (3-168)$$



شکل ۳-۲۸ تشکیل دادن یک بار کروی یکنواخت (مثال ۳-۲۲)

بر حسب کل بار

$$Q = \rho \frac{4\pi}{3} b^3$$

داریم

$$W = \frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 b} \quad (J) \quad (169-3)$$

معادله (۱۶۹-۳) نشان می‌دهد که انرژی مستقیماً با مربع کل بار و به‌طور معکوس با شعاع متناسب است. کره باردار شکل ۳-۲۸ برای مثال می‌تواند یک ابر الکترونی باشد.

در یک توزیع پیوسته بار با چگالی ρ فرمول W_e در معادله (۱۶۵-۳) که در مورد بارهای گسته بکار می‌رود، باید تصحیح گردد. بدون انجام اثبات جداگانه، Q_k را با ρdv و جمع‌بندی را با انتگرال‌گیری جایگزین نموده، چنین بدست می‌آوریم

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{V'} \rho V dv \quad (J) \quad (170-3)$$

در معادله (۱۷۰-۳)، V پتانسیل در نقطه‌ای است که چگالی بار حجمی در آن ρ است، و V' حجم ناحیه‌ای است که ρ در آن وجود دارد.

مثال ۳-۲۳ مسئله مثال ۳-۲۲ را با استفاده از معادله (۱۷۰-۳) حل کنید.

حل در مثال ۳-۲۲، مسئله را از طریق تشکیل دادن یک کره باردار با گردآوری لایه‌های کروی متوالی با ضخامت دیفرانسیلی حل کردیم. حال فرض می‌کنیم کره باردار قبلاً در جای خود قرار گرفته است. از آنجایی که ρ ثابت است، می‌توان آن را از علامت انتگرال بیرون آورد. در یک مسئله با تقارن کروی،

$$W_e = \frac{\rho}{2} \int_{V'} V dv = \frac{\rho}{2} \int_b^R V 4\pi R^2 dR \quad (171-3)$$

که V در آن پتانسیل در نقطه‌ای به فاصله R از مرکز است. برای یافتن V در R ، باید منفی انتگرال خطی E را در دو ناحیه بیابیم: (۱) $E_R = a_R E_{R1}$ از $R = \infty$ تا $R = b$ و (۲) $E_R = a_R E_{R2}$ از $R = b$ تا $R = R$. داریم

$$E_{R1} = a_R \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} = a_R \frac{\rho b^3}{3\epsilon_0 R^2} \quad R \geq b$$

$$E_{R2} = a_R \frac{Q_R}{4\pi\epsilon_0 R^2} = a_R \frac{\rho R}{3\epsilon_0} \quad b < R \leq b$$

در نتیجه، بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned} V &= - \int_{\infty}^R \mathbf{E} \cdot d\mathbf{R} = - \left[\int_{\infty}^b E_{R1} dR + \int_b^R E_{R2} dR \right] \\ &= - \left[\int_{\infty}^b \frac{\rho b^3}{3\epsilon_0 R^2} dR + \int_b^R \frac{\rho R}{3\epsilon_0} dR \right] \quad (172-3) \\ &= \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(b^2 + \frac{b^2}{2} - \frac{R^2}{2} \right) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(\frac{3}{2} b^2 - \frac{R^2}{2} \right) \end{aligned}$$

با جایگذاری معادله (۱۷۲-۳) در معادله (۱۷۱-۳) بدست می‌آوریم

$$W_e = \frac{\rho}{2} \int_b^R \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(\frac{3}{2} b^2 - \frac{R^2}{2} \right) 4\pi R^2 dR = \frac{2\pi\rho^2 b^5}{15\epsilon_0}$$

که همان نتیجه معادله (۱۶۸-۳) است.

دقت کنید که W_e در معادله (۱۷۰-۳)، شامل کار (انرژی خودی) لازم برای تشکیل دادن توزیع بارهای ماکروسکوپی است، زیرا این انرژی متقابل هر جزء کوچک بینهایت کوچک بار با تمام اجزاء بی‌نهایت کوچک دیگر بار است. در واقع، ما معادله (۱۷۰-۳) در مثال ۳-۲۲ را برای یافتن انرژی خودی یک بار کروی یکنواخت بکار برده‌ایم. اگر شعاع b به سمت صفر میل نماید، انرژی خودی یک بار نقطه‌ای (ریاضی) Q ، بینهایت می‌شود (معادله ۳-۱۶۹ را ببینید). انرژی‌های خودی بارهای نقطه‌ای Q_k در معادله (۱۶۵-۳) در نظر گرفته شده‌اند که البته، به‌طور اکید، هیچ بار نقطه‌ای وجود ندارد زیرا کوچکترین واحد بار، الکترون، خود یک توزیع بار است.

۳-۱۱-۱ انرژی الکتریسته ساکن بر حسب کمیات میدان

در معادله (۱۷۰-۳)، عبارت انرژی الکتریسته ساکن یک توزیع بار، چگالی منبع بار، ρ و تابع پتانسیل V را شامل می‌شود. گاهی مناسب‌تر است عبارتی برای W_e بر حسب کمیات میدان، E و/یا D ، بدون اینکه صریحاً ρ را بدانیم، بدست آوریم. برای این منظور به جای ρ در معادله (۱۷۰-۳)، $\nabla \cdot D$ را قرار می‌دهیم:

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{V'} (\nabla \cdot D) V dv \quad (173-3)$$

حال، با استفاده از اتحاد برداری زیر (از مسئله ۳-۲۸)،

$$\nabla \cdot (VD) = V \nabla \cdot D + D \cdot \nabla V \quad (174-3)$$

معادله (۱۷۳-۳) را به صورت زیر می توان نوشت

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{V'} \nabla \cdot (VD) dv - \frac{1}{2} \int_{V'} \mathbf{D} \cdot \nabla V dv$$

$$= \frac{1}{2} \oint_{S'} VD \cdot \mathbf{a}_n ds + \frac{1}{2} \int_{V'} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dv \quad (175-3)$$

که در آن از قضیه دیورژانس برای تغییر نخستین انتگرال حجمی به انتگرال سطح بسته استفاده و به جای $-\nabla V$ در انتگرال حجمی دوم، \mathbf{E} قرار داده ایم. چون V' می تواند هر حجم شامل کلیه بارها باشد، می توان آن را کره ای بسیار بزرگ با شعاع R انتخاب نمود. با میل دادن $R \rightarrow \infty$ پتانسیل الکتریکی V و اندازه جابجائی الکتریکی D به ترتیب حداقل با سرعت $1/R$ و $1/R^2$ به سمت صفر میل می کنند! مساحت سطح مرزی S' با R^2 افزایش می یابد. از این رو با میل نمودن $R \rightarrow \infty$ ، انتگرال سطحی معادله (۱۷۵-۳) حداقل با سرعت $1/R$ کاهش یافته و به سمت صفر میل خواهد نمود. بنابراین تنها انتگرال دوم طرف راست معادله (۱۷۵-۳) باقی خواهد ماند.

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{V'} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dv \quad (J) \quad (3-176 \text{ الف})$$

با استفاده از رابطه $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ در محیط خطی، معادله (۳-۱۷۶ الف) به دو صورت دیگر

قابل نوشتن است:

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{V'} \epsilon E^2 dv \quad (J) \quad (3-176 \text{ ب})$$

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{V'} \frac{D^2}{\epsilon} dv \quad (J) \quad (3-176 \text{ پ})$$

همیشه می توانیم چگالی انرژی الکتریسته ساکن، w_e را به صورت ریاضی طوری تعریف کنیم که انتگرال حجمی آن برابر انرژی الکتریسته ساکن کل باشد:

$$W_e = \int_{V'} w_e dv \quad (3-177)$$

بنابراین می توان نوشت

$$w_e = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \quad (J/m^3) \quad (3-178 \text{ الف})$$

در بارهای نقطه ای، $V \propto 1/R$ و $D \propto 1/R^2$ ؛ در دوقطبی ها، $V \propto 1/R^2$ و $D \propto 1/R^3$.

یا

$$w_e = \frac{1}{2} \epsilon E^2 \quad (J/m^3) \quad (3-178 \text{ ب})$$

یا

$$w_e = \frac{D^2}{2\epsilon} \quad (J/m^3) \quad (3-178 \text{ پ})$$

با وجود این، این تعریف چگالی انرژی، ساختگی است. زیرا برای ارتباط مکانی انرژی با یک میدان الکتریکی توجیه فیزیکی یافت نشده است. تمام آنچه که می دانیم این است که انتگرال حجمی معادلات (۳-۱۷۶ الف، ب، پ) انرژی الکتریسته ساکن کل را بدست می دهد.

مثال ۳-۲۴ در شکل ۳-۲۹، یک خازن صفحه ای موازی، به سطح S و فاصله d تا ولتاژ V بار شده است. گذردهی دی الکتریک ϵ است. انرژی الکتریسته ساکن ذخیره شده را پیدا کنید.

حل درحالی که منبع $c-d$ (باتری ها)، مطابق شکل اتصال یافته است، صفحات بالایی و پایینی به ترتیب دارای بارهای مثبت و منفی می گردند. اگر اثرات لبه ای میدان در کنارها صرف نظر شود، میدان الکتریکی داخل دی الکتریک (روی صفحه) یکنواخت و (درون دی الکتریک) ثابت و دارای اندازه

$$E = \frac{V}{d}$$

است. با استفاده از معادله (۳-۱۷۶ ب) داریم

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{V'} \epsilon \left(\frac{V}{d}\right)^2 dv = \frac{1}{2} \epsilon \left(\frac{V}{d}\right)^2 (Sd) = \frac{1}{2} \left(\epsilon \frac{S}{d}\right) V^2 \quad (3-179)$$

کمیت داخل پرانتز آخرین عبارت، $\epsilon S/d$ ، ظرفیت خازن صفحه ای موازی است (معادله ۳-۱۳۶ را ببینید). بنابراین،

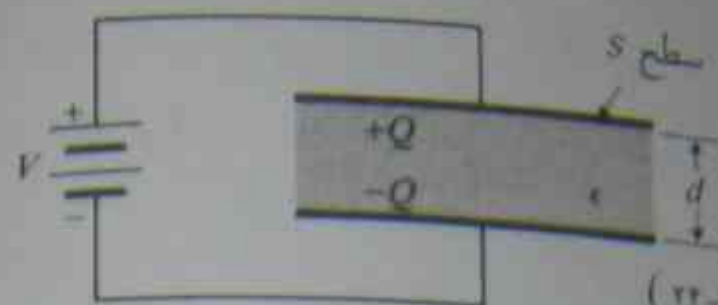
$$W_e = \frac{1}{2} CV^2 \quad (J) \quad (3-180 \text{ الف})$$

چون $Q = CV$ ، معادله (۳-۱۸۰ الف) به دو صورت دیگر نیز می تواند درآید:

$$W_e = \frac{1}{2} QV \quad (J) \quad (3-180 \text{ ب})$$

و

$$W_e = \frac{Q^2}{2C} \quad (J) \quad (3-180 \text{ پ})$$



شکل ۳-۳۹ یک خازن صفحاتی موازی باردار (مثال ۳-۲۲)

انتقالاً ثابت خواهد شد که معادلات (۳-۱۸۰ الف، ب، پ) در مورد هر خازن متشکل از دو هادی برقرار است (مسئله م. ۳-۴۳ را ببینید).

مثال ۳-۲۵۳ فرمولهای انرژی (۳-۱۷۶) و (۳-۱۸۰) را برای یافتن ظرفیت یک خازن استوانه‌ای به طول L و دارای هادی درونی به شعاع a و هادی بیرونی به شعاع داخلی b و دی‌الکتریک با گذردهی ϵ را طبق شکل ۳-۲۹ بکار برید.

حل با اعمال قانون گوس می‌دانیم که

$$E = a_r E_r = a_r \frac{Q}{2\pi\epsilon L r} \quad a < r < b$$

انرژی الکتریکی ساکن ذخیره شده در ناحیه دی‌الکتریک از معادله (۳-۱۷۶ ب) چنین است.

$$W_e = \frac{1}{2} \int_a^b \epsilon \left(\frac{Q}{2\pi\epsilon L r} \right)^2 (L 2\pi r dr) \\ = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon L} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon L} \ln \frac{b}{a} \quad (3-181)$$

از سوی دیگر می‌توان W_e را به صورت معادله (۳-۱۸۰ پ) نیز بیان کرد. از مساوی قرار دادن (۳-۱۸۰ پ) و (۳-۱۸۱) بدست می‌آوریم

$$\frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon L} \ln \frac{b}{a}$$

$$C = \frac{2\pi\epsilon L}{\ln \frac{b}{a}}$$

که همان رابطه داده شده در معادله (۳-۱۳۹) است.

۳-۱۱-۲ نیروهای الکتریکی ساکن

قانون کولمب بر نیروی بین دو بار نقطه‌ای حاکم است. در سیستم‌های پیچیده‌تر از اجسام باردار، استفاده از قانون کولمب برای تعیین نیروی وارد بر یکی از اجسام که از بارهای روی دیگر

اجسام ناشی شده است. بسیار مشکل خواهد بود. این مسئله حتی در حالت ساده نیروی بین صفحات یک خازن صفحاتی موازی باردار نیز صادق است. اکنون روشی را برای محاسبه نیروی مؤثر بر شینی واقع در یک سیستم باردار، با استفاده از انرژی الکتریکی ساکنی سیستم، مورد بحث قرار می‌دهیم. این روش بر اساس اصل جابجانی مجازی قرار دارد. دو حالت را در نظر می‌گیریم: (۱) یک سیستم مجزا از اجسام با بار ثابت، و (۲) یک سیستم از اجسام هادی با پتانسیل‌های ثابت.

سیستم اجسام با بارهای ثابت یک سیستم مجزا از اجسام هادی باردار یا دی‌الکتریک، که از یکدیگر مجزا بوده و به دنیای خارج انصالی ندارند، را در نظر می‌گیریم. بار روی این اجسام، ثابت است. فرض کنید که نیروهای الکتریکی، یکی از این اجسام را به اندازه فاصله دیفرانسیلی $d\ell$ جابجا نموده باشد (یک جابجانی مجازی). کار مکانیکی انجام شده توسط سیستم برابر است با

$$dW = F_Q \cdot d\ell \quad (3-182)$$

که در آن، نیروی کل الکتریکی مؤثر بر جسم تحت شرط بار ثابت است. چون سیستم مجزا هیچ منبع انرژی خارجی ندارد، این کار مکانیکی باید با صرف انرژی الکتریکی ساکنی ذخیره شده انجام شده باشد؛ یعنی

$$dW = -dW_e = F_Q \cdot d\ell \quad (3-183)$$

با توجه به معادله (۳-۸۸) در بخش ۲-۶ ملاحظه می‌کنیم که تغییر دیفرانسیلی یک کمیت عددی که از تغییر مکانی $d\ell$ نتیجه می‌شود، برابر حاصلضرب داخلی گرادیان اسکالر و $d\ell$ است. می‌نویسیم

$$dW_e = (\nabla W_e) \cdot d\ell \quad (3-184)$$

چون $d\ell$ اختیاری است، مقایسه معادلات (۳-۱۸۳) و (۳-۱۸۴) به معادله زیر منجر می‌شود

$$\boxed{F_Q = -\nabla W_e} \quad (N) \quad (3-185)$$

معادله (۳-۱۸۵) فرمول بسیار ساده‌ای برای محاسبه F_Q از روی انرژی الکتریکی ساکنی سیستم است. در مختصات کارتزین، مؤلفه‌های نیرو عبارتند از:

$$(F_Q)_x = -\frac{\partial W_e}{\partial x} \quad (3-186 \text{ الف})$$

$$(F_Q)_y = -\frac{\partial W_e}{\partial y} \quad (3-186 \text{ ب})$$

$$(F_Q)_z = -\frac{\partial W_e}{\partial z} \quad (3-186 \text{ پ})$$

در صورتی که جسم مورد نظر محدود به چرخش حول یک محور، مثلاً محور z ، باشد، کار

مکانیکی انجام شده توسط سیستم برای جابجایی زاویه‌ای مجازی $d\phi$ برابر خواهد بود با

$$dW = (T_Q)_z d\phi \quad (187-3)$$

که $(T_Q)_z$ در آن مؤلفه z گشتاور وارد بر جسم تحت شرط بارهای ثابت است. روش فوق به معادله زیر منجر می‌شود

$$(T_Q)_z = -\frac{\partial W_e}{\partial \phi} \quad (\text{N} \cdot \text{m}) \quad (188-3)$$

سیستم اجسام هادی با پتانسیل‌های ثابت حال سیستمی را در نظر بگیرید که در آن اجسام هادی از طریق اتصال به منابع خارجی مانند باتری، در پتانسیل‌های ثابتی نگه داشته می‌شوند. اجسام هادی الکتریک بدون بار هم می‌توانند وجود داشته باشند. جابجایی $d\ell$ یک جسم هادی باعث تغییر انرژی الکتریکی ساکنی کل گردیده و لازم می‌دارد که منابع، بارهایی را به هادیها منتقل نمایند تا آنها را در پتانسیل‌های ثابت نگه دارند. اگر بار dQ_k (که می‌تواند مثبت یا منفی باشد)، به هادی k ام که در پتانسیل V_k نگه داشته می‌شود، افزوده شود، کار انجام شده یا انرژی تأمین شده توسط منابع، برابر $V_k dQ_k$ است. انرژی کل تأمین شده توسط منابع در سیستم برابر است با

$$dW_s = \sum_k V_k dQ_k \quad (189-3)$$

کار مکانیکی انجام شده توسط سیستم، در نتیجه جابجایی مجازی فوق برابر است با

$$dW = \mathbf{F}_V \cdot d\ell \quad (190-3)$$

که \mathbf{F}_V در آن، نیروی الکتریکی مؤثر بر جسم هادی تحت شرط پتانسیل‌های ثابت است. این انتقال بار، انرژی الکتریکی ساکنی سیستم را نیز به اندازه dW_e تغییر می‌دهد و از نظر معادله (۱۹۰-۳) برابر است با

$$dW_e = \frac{1}{V} \sum_k V_k dQ_k = \frac{1}{V} dW_s \quad (191-3)$$

لازمه بقای انرژی آن است که

$$dW + dW_e = dW_s \quad (192-3)$$

جاگذاری معادلات (۱۸۹-۳)، (۱۹۰-۳) و (۱۹۱-۳) در معادله (۱۹۲-۳) بدست می‌دهد

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_V \cdot d\ell &= dW_e \\ &= (\nabla W_e) \cdot d\ell \end{aligned}$$

$$\mathbf{F}_V = \nabla W_e \quad (\text{N}) \quad (193-3)$$

مقایسه معادلات (۱۹۳-۳) و (۱۸۵-۳) آشکار می‌سازد که تنها اختلاف بین فرمول‌های نیروی الکتریکی در دو حالت، فقط در علامت است. واضح است که اگر جسم هادی محدود به چرخش حول محور z باشد، مؤلفه z گشتاور الکتریکی برابر خواهد بود با

$$(T_V)_z = \frac{\partial W_e}{\partial \phi} \quad (\text{N} \cdot \text{m}) \quad (194-3)$$

این نیز با معادله (۱۸۸-۳) فقط یک تغییر علامت تفاوت دارد.

مثال ۳-۲۶ نیروی وارد بر صفحات هادی یک خازن صفحه‌ای موازی باردار را تعیین کنید. مساحت صفحات S بوده و توسط هوا در فاصله x از یکدیگر قرار گرفته‌اند.

حل مسئله را به دو طریق حل می‌کنیم: (الف) با فرض بارهای ثابت، و آنگاه (ب) با فرض پتانسیل‌های ثابت. از اثرات لبه‌ای میدان در کناره‌های صفحات صرف‌نظر می‌کنیم.

(الف) بارهای ثابت. اگر بارهای $\pm Q$ روی صفحات موجود باشد، شدت میدان الکتریکی $E_x = Q/(\epsilon_0 S) = V/x$ بدون توجه به فاصله آنها، در هوای بین صفحات وجود خواهد داشت (و توسط جابجایی مجازی تغییر نخواهد کرد). از معادله (۳-۱۸۰) داریم،

$$W_e = \frac{1}{V} QV = \frac{1}{V} QE_x x$$

که Q و E_x در آن ثابت هستند. با استفاده از معادله (۳-۱۸۶) بدست می‌آوریم

$$(F_Q)_x = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{V} QE_x x \right) = -\frac{1}{V} QE_x = -\frac{Q^2}{2\epsilon_0 S} \quad (195-3)$$

که علامت منفی در آن نمایشگر نیرو در جهت مخالف افزایش x است. این نیرو از نوع جاذبه‌ای است.

(ب) پتانسیل‌های ثابت. چون پتانسیل‌ها ثابت هستند، راحت‌تر است از عبارت معادله (۳-۱۸۰) (الف) برای W_e استفاده کنیم. ظرفیت C خازن هوایی صفحه‌ای موازی برابر است با $\epsilon_0 S/x$. از معادله (۳-۱۹۳) داریم،

$$(F_V)_x = \frac{\partial W_e}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} CV^2 \right) = \frac{V^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\epsilon_0 S}{x} \right) = -\frac{\epsilon_0 S V^2}{2x^2} \quad (196-3)$$

چقدر $(F_Q)_x$ در معادله (۳-۱۹۵) و $(F_V)_x$ در معادله (۳-۱۹۶) با هم متفاوتند؟ با یخاطر آوردن رابطه

$$Q = CV = \frac{\epsilon_0 S V}{x}$$

درمی یابیم

$$(F_Q)_x = (F_V)_x$$

(۱۱۷-۳)

علی‌رغم اختلاف علامت ظاهری فرمول‌های بیان شده توسط معادلات (۱۸۵-۳) و (۱۹۳-۳)، نیرو در هر دو حالت یکی است. کمی اندیشه در فیزیک مسئله ما را متقاعد خواهد ساخت که این مطلب باید صحیح باشد. چون خازن باردار ابعاد ثابتی دارد، هر Q مفروض، V ثابتی را نتیجه می‌دهد و برعکس. بنابراین بدون توجه به اینکه Q یا V مفروض است، نیروی یکتائی بین صفحات وجود خواهد داشت، و مطمئناً نیرو به جابجائی مجازی بستگی نخواهد داشت. تغییر در شرط مفروض (Q ثابت یا V ثابت) نمی‌تواند نیروی یکتائی بین صفحات را تغییر دهد. ■

بحث اخیر، در مورد یک خازن کلی باردار، شامل دو هادی و به ظرفیت C نیز برقرار است. نیروی الکتریسته ساکن F_ℓ در جهت جابجائی مجازی $d\ell$ به‌ازای بارهای ثابت برابر است با

$$(F_Q)_\ell = -\frac{\partial W_e}{\partial \ell} = -\frac{\partial}{\partial \ell} \left(\frac{Q^2}{2C} \right) = \frac{Q^2}{2C^2} \frac{\partial C}{\partial \ell} \quad (118-3)$$

و به‌ازای پتانسیل‌های ثابت،

$$(F_V)_\ell = \frac{\partial W_e}{\partial \ell} = \frac{\partial}{\partial \ell} \left(\frac{1}{2} CV^2 \right) = \frac{V^2}{2} \frac{\partial C}{\partial \ell} = \frac{Q^2}{2C^2} \frac{\partial C}{\partial \ell} \quad (119-3)$$

روشن است که نیروهائی که از دو طریق، با شرایط فرضی متفاوت اعمال شده بر همان خازن باردار محاسبه شوند، مساوی هستند.

پرسش‌های دوره‌ای

- ۱-۳-۳ صورت دیفرانسیلی اصول موضوعی الکتریسته ساکن را در فضای آزاد بنویسید.
 ۲-۳-۳ تحت چه شرایطی، شدت میدان الکتریکی هم سلونوئیدی و هم غیرگردشی است؟
 ۳-۳-۳ صورت انتگرالی اصول موضوعی الکتریسته ساکن را در فضای آزاد بنویسید و مفهوم آنها را با جملات بیان کنید.
 ۴-۳-۳ وقتی که فرمول شدت میدان الکتریکی یک بار نقطه‌ای، معادله (۱۲-۳) استخراج گردید، الف) چرا لازم بود تصریح کنیم که q در فضای آزاد بدون مرز قرار دارد؟ ب) چرا یک سطح مکعبی یا استوانه‌ای به دور q در نظر نگرفتیم؟
 ۵-۳-۳ شدت میدان الکتریکی در موارد زیر چگونه با فاصله تغییر می‌کند؟

الف) یک بار نقطه‌ای (ب) یک دوقطبی الکتریکی
 ۶-۳-۳ قانون کولمب را بیان کنید.

۷-۳-۳ اصول کار چاپگرهای جریان مرکب را بیان کنید.

۸-۳-۳ قانون گوس را بیان کنید. تحت چه شرایطی، قانون گوس در تعیین شدت میدان الکتریکی یک توزیع بار سودمندی خاصی دارد؟

۹-۳-۳ چگونه تغییر شدت میدان الکتریکی یک بار خطی بینهایت طویل مستقیم با چگالی یکنواخت را با فاصله توصیف نمایید.

۱۰-۳-۳ آیا قانون گوس برای یافتن میدان E یک بار خطی محدود مفید است؟ توضیح دهید.

۱۱-۳-۳ مثال ۳-۶، شکل ۳-۹ را ببینید. آیا یک قوطی کوچک استوانه‌ای با وجوه بالائی و پایینی دایره‌ای می‌تواند به‌عنوان سطح گوسی انتخاب شود؟ توضیح دهید.

۱۲-۳-۳ یک تصویر دوبعدی از خطوط میدان الکتریکی و خطوط هم‌پتانسیل یک بار نقطه‌ای را ترسیم نمایید.

۱۳-۳-۳ به‌ازای چه مقدار θ ، میدان E یک دوقطبی الکتریکی که در امتداد z قرار دارد، در جهت منفی z قرار می‌گیرد؟

۱۴-۳-۳ با مراجعه به معادله (۳-۶۴)، توضیح دهید چرا علامت قدرمطلق در اطراف z مورد نیاز است.

۱۵-۳-۳ اگر پتانسیل الکتریکی یک نقطه صفر باشد، آیا می‌توان نتیجه گرفت که شدت میدان الکتریکی آن نقطه نیز صفر است؟ توضیح دهید.

۱۶-۳-۳ اگر شدت میدان الکتریکی در یک نقطه صفر باشد، آیا می‌توان نتیجه گرفت که پتانسیل الکتریکی نیز در آن نقطه صفر است؟ توضیح دهید.

۱۷-۳-۳ اگر یک پوسته هادی کروی بدون بار با ضخامت محدود در میدان الکتریکی خارجی E قرار بگیرد، شدت میدان الکتریکی در مرکز پوسته چقدر است؟ توزیع بار روی سطوح خارجی و داخلی پوسته را توضیح دهید.

۱۸-۳-۳ الکتریت‌ها چیستند؟ چگونه می‌توان آنها را ساخت؟

۱۹-۳-۳ آیا $\nabla \cdot (1/R)$ در معادله (۳-۸۴) می‌تواند با $\nabla \cdot (1/R)$ جایگزین شود؟ توضیح دهید.

۲۰-۳-۳ بردار قطبی‌شدگی را تعریف کنید. واحد SI آن چیست؟

۲۱-۳-۳ چگالی بارهای قطبی‌شدگی چیست؟ واحدهای SI $P \cdot a_n$ و $\nabla \cdot P$ کدامند؟

۲۲-۳-۳ منظور از محیط ساده چیست؟

۲۳-۳-۳ مواد غیرهمه‌سویکسان چه خواصی دارند؟

۲۴-۳-۳ چه عاملی محیط یک محوری را مشخص می‌کند؟

۲۵-۳-۳ بردار جابجائی الکتریکی را تعریف کنید. واحد SI آن چیست؟

- ۲۶-۳-۳. ضرب حسابی الکتریکی را تعریف کنید. واحد آن چیست؟
- ۲۷-۳-۳. اختلاف میان گذردهی و ضرب دی الکتریک یک محیط چیست؟
- ۲۸-۳-۳. آیا چگالی شار الکتریکی ناشی از یک توزیع بار مفروض، به خواص محیط بستگی دارد؟ شدت میدان الکتریکی چگونه؟ توضیح دهید.
- ۲۹-۳-۳. اختلاف بین ضرب دی الکتریک و مقاومت دی الکتریک یک ماده دی الکتریک چیست؟
- ۳۰-۳-۳. اصول کار برقریرهای آذرخش را بیان کنید.
- ۳۱-۳-۳. شرایط مرزی کلی میدانهای الکتریسیته ساکن در فصل مشترک بین دو محیط دی الکتریک متفاوت چه هستند؟
- ۳۲-۳-۳. شرایط مرزی میدانهای الکتریسیته ساکن در فصل مشترک بین یک هادی و یک دی الکتریک با گذردهی ϵ چه هستند؟
- ۳۳-۳-۳. شرط مرزی پتانسیل الکتریسیته ساکن در فصل مشترک بین دو محیط دی الکتریک متفاوت چیست؟
- ۳۴-۳-۳. آیا نیروی بین یک بار نقطه‌ای و یک جسم دی الکتریک وجود دارد؟ توضیح دهید.
- ۳۵-۳-۳. ظرفیت و خازن را تعریف کنید.
- ۳۶-۳-۳. فرض کنید گذردهی دی الکتریک موجود در خازن صفحه‌ای موازی ثابت نباشد. اگر مقدار متوسط گذردهی به جای ϵ در فرمول بکار رود، آیا معادله (۳-۱۳۶) صادق خواهد بود؟ توضیح دهید.
- ۳۷-۳-۳. خازن $1-\mu F$ داده شده‌اند، توضیح دهید چگونه باید آنها را به هم متصل کرد تا ظرفیت‌های کل زیر بدست آید
- الف) $\frac{1}{3}(\mu F)$ ب) $\frac{2}{3}(\mu F)$ ت) $3(\mu F)$
- ۳۸-۳-۳. ضرایب پتانسیل، ضرایب ظرفیت و ضرایب القا چه هستند؟
- ۳۹-۳-۳. ظرفیت جزئی چیست؟ چه اختلافی با ضرب ظرفیت دارد؟
- ۴۰-۳-۳. اصول حفاظت الکتریسیته ساکنی را بیان کنید.
- ۴۱-۳-۳. تعریف یک الکترون ولت چیست؟ در مقایسه با یک ژول چگونه است؟
- ۴۲-۳-۳. عبارت انرژی الکتریسیته ساکنی یک مجموعه از چهار بار نقطه‌ای گسسته چیست؟
- ۴۳-۳-۳. عبارت انرژی الکتریسیته ساکنی یک توزیع پیوسته از بار حجمی چیست؟ بار سطحی چگونه؟ بار خطی چگونه؟
- ۴۴-۳-۳. عبارت ریاضی انرژی الکتریسیته ساکنی را بر حسب E و/یا D بدست آورید.
- ۴۵-۳-۳. معنا و کاربرد اصل جابجانی مجازی را مورد بحث قرار دهید.
- ۴۶-۳-۳. رابطه میان نیرو و انرژی ذخیره شده در یک سیستم متشکل از اشیاء باردار ساکن، تحت

شرط بارهای ثابت چیست؟ تحت شرط پتانسیل‌های ثابت چگونه؟

مسائل

- ۱-۳-۳. م. به شکل ۳-۴ مراجعه کنید.
- الف) رابطه بین α ، زاویه ورود شعاع الکترونی به پرده و شدت میدان الکتریکی انحراف‌دهنده E_d را پیدا کنید.
- ب) رابطه بین w و L را طوری پیدا کنید که $d_1 = d_0/20$.
- ۲-۳-۳. م. نوسان‌نگار پرتو کاتدی (CRO) نشان داده شده در شکل ۳-۲ برای اندازه‌گیری ولتاژ اعمال شده به صفحات موازی انحراف‌دهنده بکار می‌رود.
- الف) با فرض عدم شکست در عایق، اگر فاصله بین صفحات h باشد، حداکثر ولتاژی که قابل اندازه‌گیری است، چقدر می‌باشد؟
- ب) اگر قطر پرده D باشد، L به چه مقداری محدود می‌شود؟
- پ) برای دو برابر کردن حداکثر ولتاژ قابل اندازه‌گیری CRO بدون تغییر مشخصات هندسی، چه باید کرد؟
- ۳-۳-۳. م. سیستم انحراف یک نوسان‌نگار پرتو کاتدی معمولاً از دو جفت صفحه موازی تشکیل می‌شود که میدانهای الکتریکی عمود بر هم بوجود می‌آورند. فرض کنید دسته دیگری از صفحات در شکل ۳-۲ وجود داشته باشد که میدان الکتریکی یکنواخت $E_x = E_y$ را در ناحیه انحراف بوجود می‌آورد. برای بوجود آوردن E_x و E_y به ترتیب ولتاژهای انحراف‌دهنده $v_x(t)$ و $v_y(t)$ اعمال می‌شوند. اگر بنا باشد که الکترونها منحنی‌های زیر را بر روی صفحه فلورسانت دنبال کنند، نوع شکل موج‌هایی که باید $v_x(t)$ و $v_y(t)$ داشته باشند را تعیین کنید:
- الف) یک خط افقی،
- ب) یک خط مستقیم دارای شیب منفی واحد،
- پ) یک دایره،
- ت) دو سیکل از یک موج سینوسی.
- ۴-۳-۳. م. مقاله کوتاهی بنویسید که اصول کار اگزروگرافی را بیان کند (در صورت نیاز از منابع کتابخانه استفاده کنید).
- ۵-۳-۳. م. بارهای نقطه‌ای Q_1 و Q_2 به ترتیب در $(1, 2, 0)$ و $(2, 0, 0)$ واقعند. رابطه بین Q_1 و Q_2 را چنان پیدا کنید که نیروی کل وارد بر بار آزمونی واقع در نقطه $P(-1, 1, 0)$

(ب) مؤلفه y نداشته باشد.

۶-۳-۴ الف) مؤلفه x نداشته باشد، دو کره هادی بسیار کوچک، هر یک به وزن $(kg) 10^{-2} \times 10^{-2}$ ، از نقطه مشترکی توسط دو ریسمان غیرهادی بسیار نازک به طول 0.2 (m)، آویزان شده‌اند. بار Q روی هر کره قرار دارد. نیروی دافعه الکتریکی دو کره را از هم جدا می‌سازد و حالت تعادل وقتی می‌رسد که زاویه ریسمان‌های آویزان 10° درجه باشد. با فرض شتاب ثقل $(N/kg) 9.80$ و جرم قابل صرف نظر کردن ریسمان‌ها، Q را پیدا کنید.

۷-۳-۴ نیروی بین یک حلقه دایره‌ای باردار به شعاع b و با چگالی بار یکنواخت ρ_L و یک بار نقطه‌ای Q واقع بر محور حلقه و به فاصله h از صفحه حلقه را پیدا کنید. برای $h \gg b$ و $h = 0$ ، نیرو چقدر است؟ نیرو را بر حسب تابعی از h رسم کنید.

۸-۳-۴ یک بار خطی با چگالی یکنواخت ρ_L در فضای آزاد، یک نیم دایره به شعاع b را تشکیل می‌دهد. اندازه و جهت شدت میدان الکتریکی را در مرکز نیم دایره تعیین کنید.

۹-۳-۴ سه بار خطی یکنواخت ρ_{L1} ، ρ_{L2} و ρ_{L3} ، هر یک به طول L ، یک مثلث متساوی‌الاضلاع را تشکیل می‌دهند. با فرض $\rho_{L1} = 2\rho_{L2} = 2\rho_{L3}$ ، شدت میدان الکتریکی را در مرکز مثلث تعیین نمایید.

۱۰-۳-۴ فرض کنید شدت میدان الکتریکی $E = a_x 100x$ (V/m) موجود است. کل بار الکتریکی موجود در درون

الف) حجم مکعبی شکل به ضلع $(mm) 100$ ، که به طور متقارن حول مبدأ قرار دارد،

ب) حجم استوانه‌ای در اطراف محور z ، به شعاع $(mm) 50$ و ارتفاع $(mm) 100$ به مرکز مبدأ را پیدا کنید.

۱۱-۳-۴ توزیع کروی بار $\rho = \rho_0 [1 - (R^2/b^2)]$ در ناحیه $0 \leq R \leq b$ موجود است. این توزیع بار به صورت هم‌مرکز توسط یک سطح پوسته هادی با شعاع داخلی $R_i (> b)$ و شعاع خارجی R_o احاطه شده است. E را در کلیه نقاط تعیین کنید.

۱۲-۳-۴ دو سطح استوانه‌ای هم‌محور بینهایت طویل $r = a$ و $r = b$ ($b > a$) به ترتیب چگالی‌های بار سطحی ρ_{sa} و ρ_{sb} را حمل می‌کنند.

الف) E را در تمام نقاط تعیین کنید.

ب) رابطه بین a و b چه باشد، تا اینکه E در $r > b$ صفر شود؟

۱۳-۳-۴ کار انجام شده در حمل بار $-2(\mu C)$ را از نقطه $P_1(2, 1, -1)$ تا نقطه $P_2(8, 2, -1)$ در میدان $E = a_x y + a_y x$ را در امتدادهای زیر تعیین کنید

الف) سهمی $x = 2y^2$

ب) خط مستقیم اتصال دهنده نقاط P_1 و P_2 .

۱۴-۳-۴ به ازای چه مقدار θ ، شدت میدان الکتریکی یک دو قطبی واقع بر محور z دارای مؤلفه z نخواهد بود؟

۱۵-۳-۴ سه بار $(+q, -2q, +q)$ در طول محور z به ترتیب در نقاط $z = d/2$ ، $z = 0$ ، و $z = -d/2$ قرار دارند.

الف) E و V را در نقطه دور $P(R, \theta, \phi)$ بیابید.

ب) معادلات سطح هم‌پتانسیل و خطوط جریانی را بیابید.

پ) یک دسته از خطوط هم‌پتانسیل و خطوط جریانی را رسم کنید.

(این ترتیب سه بار را چهار قطبی خطی الکتریسیته ساکنی می‌نامند.)

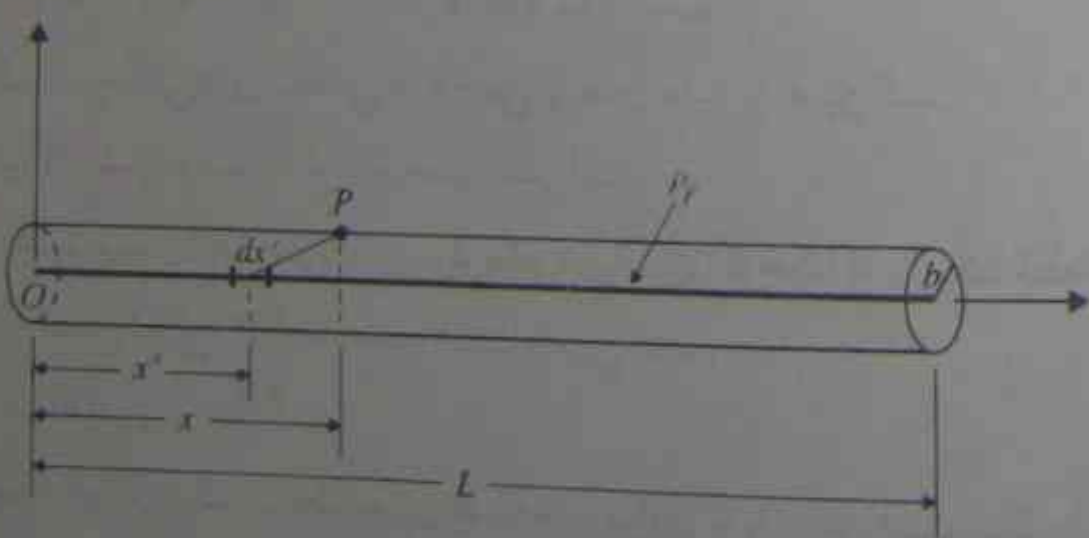
۱۶-۳-۴ یک بار خطی محدود به طول L ، چگالی بار خطی یکنواخت ρ_L را حمل می‌کند و بر محور x منطبق است.

الف) V را در صفحه نیم‌ساز بار خطی تعیین کنید.

ب) با استفاده از قانون کولمب، مستقیماً E را از روی ρ_L تعیین کنید.

پ) جواب بند (ب) را با $-\nabla V$ واریسی کنید.

۱۷-۳-۴ در مثال ۳-۵ با اعمال قانون گوس، شدت میدان الکتریکی را در اطراف یک بار خطی بینهایت طویل با چگالی بار یکنواخت، با یک راه ساده‌تر، بدست آوریم. چون $|E|$ فقط تابعی از r است، هر استوانه هم‌محور در اطراف بار خطی بینهایت طویل، یک سطح هم‌پتانسیل است. در عمل، تمام هادیها دارای طول محدود هستند. یک بار خطی محدود حامل چگالی بار ثابت ρ_L در امتداد محور، پتانسیل ثابتی بر روی سطح استوانه‌ای هم‌مرکز ایجاد نمی‌کند. با فرض بار خطی محدود ρ_L به طول L در شکل ۳-۴۰، پتانسیل را روی سطح استوانه‌ای به شعاع b ، بر حسب تابعی از x تعیین و رسم کنید.



شکل ۳-۴۰ یک بار خطی محدود (مسئله ۱۷-۳)

۱۸-۳-۲ (راهنامه‌ای): dV ناشی از بار $\rho_1 dx'$ را در نقطه P تعیین کنید و انتگرال بگیرید. (بار Q به طور یکنواخت روی صفحه مربعی $L \times L$ توزیع شده است. V و E را در نقطه‌ای روی محور عمود بر صفحه و گذرنده از مرکز آن تعیین کنید.)

۱۹-۳-۲ بار Q به طور یکنواخت روی دیواره یک استوانه مدور به شعاع b و ارتفاع h توزیع شده است. V و E را روی محور آن تعیین کنید.

الف) در نقطه‌ای خارج استوانه، سپس

ب) در نقطه‌ای داخل استوانه.

۲۰-۳-۲ مدل اولیه‌ای از ساختار اتمی یک عنصر شیمیایی این بود که اتم یک ابر کروی با بار مثبت توزیع شده یکنواخت Ne می‌باشد که در آن N عدد اتمی و e مقدار بار الکترون است. الکترون‌ها که هر یک بار منفی $-e$ را حمل می‌کنند، چنین تصور می‌شد که در ابر جاسازی شده‌اند. با فرض اینکه ابر بار کروی دارای شعاع R بوده و از اثرات تصادم صرف‌نظر شود،

الف) نیروی وارد شده بر یک الکترون جاسازی شده در فاصله r از مرکز را تعیین کنید؛

ب) حرکت الکترون را توضیح دهید؛

پ) بیان کنید که چرا این مدل اتمی رضایتبخش نیست.

۲۱-۳-۲ مدل کلاسیک ساده یک اتم، از یک هسته با بار مثبت Ne و در پیرامون آن، ابر الکترونی کروی با همان بار کلی منفی تشکیل می‌شود. (N ، عدد اتمی و e مقدار بار الکترون است.) میدان الکتریکی خارجی E باعث می‌شود که هسته به اندازه r_0 از مرکز ابر الکترونی فاصله بگیرد، از این رو اتم را قطبی کند. با فرض توزیع یکنواخت بار در داخل ابر الکترونی به شعاع b و r_0 را بیابید.

۲۲-۳-۲ قطبی شدن در یک مکعب دی الکتریک به ضلع L به مرکز مبدأ مختصات توسط بردار $P = P_0(a_x x + a_y y + a_z z)$ داده شده است.

الف) چگالی‌های سطحی و حجمی بارهای مقید را تعیین کنید.

ب) نشان دهید که کل بار مقید صفر است.

۲۳-۳-۲ شدت میدان الکتریکی را در مرکز یک حفره کروی کوچک که در یک قطعه بزرگ دی الکتریک با قطبی شدن P ایجاد شده است، تعیین کنید.

۲۴-۳-۲ مسائل زیر را حل کنید:

الف) ولتاژ شکست یک خازن صفحه‌ای موازی را با فرض اینکه صفحات هادی (50 mm) از هم فاصله دارند و محیط بین آنها هواست، پیدا کنید.

ب) اگر تمام ناحیه بین صفحات هادی توسط پلکسی‌گلاس با ضریب دی الکتریک ϵ_2 و مقاومت دی الکتریک (20 kV/mm) پر شده باشد، ولتاژ شکست را پیدا کنید.

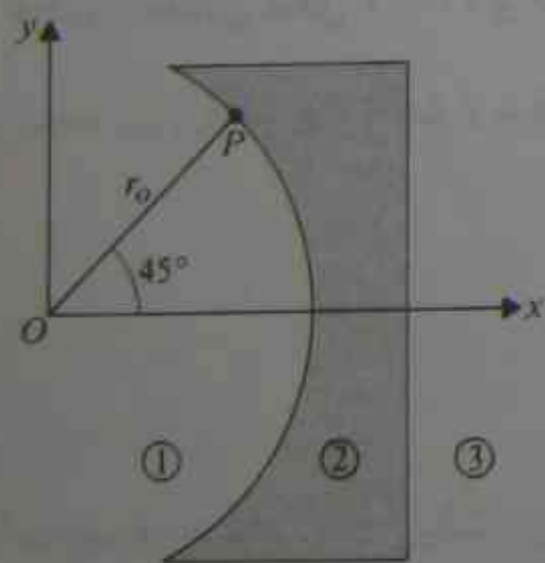
پ) اگر یک پلکسی‌گلاس با ضخامت (10 mm) بین صفحات قرار داده شود، حداکثر ولتاژی که بدون شکست می‌توان به صفحات اعمال نمود، چقدر است؟

۲۵-۳-۲ فرض کنید صفحه $z=0$ ، دو ناحیه دی الکتریک بی‌اتلاف با $\epsilon_{r1} = 2$ و $\epsilon_{r2} = 3$ را از هم جدا می‌سازد. اگر بدانیم که E در ناحیه ۱ برابر $a_x(5+z) + a_y(2x) + a_z(2y)$ است، درباره E_2 و D_2 در ناحیه ۲ دیگر چه می‌دانیم؟ آیا می‌توانیم E_2 و D_2 را در هر نقطه ناحیه ۲ تعیین کنیم؟ توضیح دهید.

۲۶-۳-۲ شرایط مرزی را در مورد مؤلفه‌های مماسی و قائم P ، در فصل مشترک بین دو محیط دی الکتریک کامل با ضرایب دی الکتریک ϵ_{r1} و ϵ_{r2} تعیین کنید.

۲۷-۳-۲ شرایط مرزی که باید توسط پتانسیل الکتریکی بین دو دی الکتریک کامل با ضرایب دی الکتریک ϵ_{r1} و ϵ_{r2} برآورده شوند، چه هستند؟

۲۸-۳-۲ عدسی‌های دی الکتریک به منظور موازی ساختن میدانهای الکترومغناطیسی بکار می‌روند. در شکل ۳-۴۱، سطح سمت چپ عدسی، سطح یک استوانه مدور است، و سطح سمت راست مسطح می‌باشد. اگر E_1 در نقطه $P(r_0, 45^\circ, z)$ در ناحیه ۱ برابر $a_x(5 - a_z z)$ باشد، ضریب دی الکتریک عدسی چقدر باید باشد تا اینکه E_2 در ناحیه ۲ به موازات محور x قرار گیرد؟



شکل ۳-۴۱ عدسی دی الکتریک (مسئله ۳-۲۸)

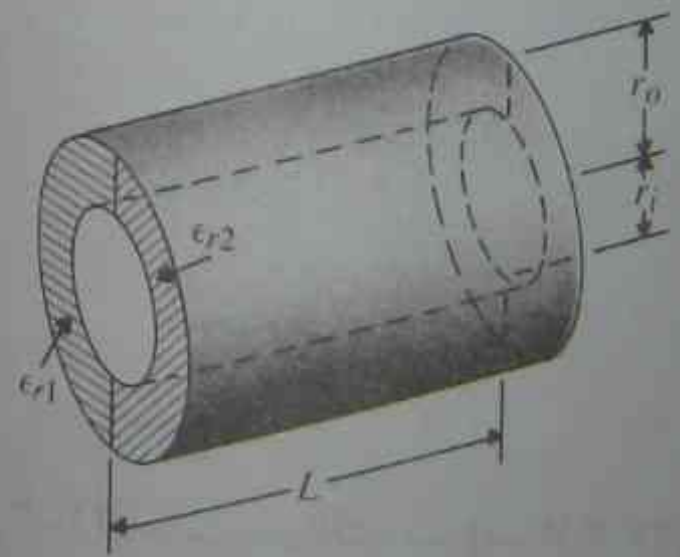
۲۹-۳-۲ به مثال ۳-۱۶ مراجعه کنید. با فرض همان r_0 و r_1 و این الزام که حداکثر شدت میدانهای الکتریکی در مواد عایق نباید از ۲۵٪ مقاومت‌های الکتریکی آنها بیشتر باشد، ولتاژ نامی کابل هم محور را تعیین کنید

الف) اگر $r_0 = 1.75r_1$ باشد؛

(ب) اگر $\epsilon_r = 1,25\epsilon_0$ باشد.
 (پ) تغییرات E_r و V را بر حسب r در هر دو حالت (الف) و (ب) رسم کنید.
 ۳۰-۳۰.م فضای بین یک خازن صفحه‌ای موازی به مساحت S با دی‌الکتریکی پر شده است که گذردهی آن به‌طور خطی از ϵ_1 در یک صفحه ($y=0$) تا ϵ_2 در صفحه دیگر ($y=d$) تغییر می‌نماید. از اثرات لبه‌ای صرف‌نظر نموده، ظرفیت را پیدا کنید.
 ۳۱-۳۰.م فرض کنید که هادی بیرونی خازن استوانه‌ای مثال ۳-۱۸ زمین شده باشد، و هادی درونی در پتانسیل V_0 نگه داشته شود.

(الف) شدت میدان الکتریکی $E(a)$ را در سطح هادی درونی پیدا کنید.
 (ب) اگر شعاع داخلی هادی بیرونی b ، ثابت باشد a ، را چنان بیابید که $E(a)$ حداقل شود.
 (پ) حداقل مقدار $E(a)$ را پیدا کنید.
 (ت) ظرفیت را تحت شرایط بند (ب) تعیین کنید.
 ۳۲-۳۰.م شعاع هسته و شعاع داخلی هادی بیرونی یک خط انتقال هم‌محور بسیار طویل به ترتیب r_i و r_o هستند. فضای بین هادیها با دو لایه هم‌محور از دی‌الکتریک‌ها پر شده است. ضرایب دی‌الکتریک مواد دی‌الکتریک برای $b < r < r_o$ برابر ϵ_{r1} و برای $r_o < r < r_i$ برابر ϵ_{r2} هستند. ظرفیت آن را در واحد طول تعیین کنید.

۳۳-۳۰.م یک خازن استوانه‌ای به طول L از سطوح هادی هم‌محور به شعاعهای r_i و r_o تشکیل شده است. دو محیط دی‌الکتریک با ضرایب دی‌الکتریک متفاوت ϵ_{r1} و ϵ_{r2} فضای بین سطوح هادی را مطابق شکل ۳-۴۲ پر کرده‌اند. ظرفیت آن را تعیین کنید.



شکل ۳-۴۲ یک خازن استوانه‌ای با دو محیط دی‌الکتریک (مسئله ۳۰-۳۳)

۳۴-۳۰.م خازنی از دو سطح استوانه‌ای فلزی هم‌محور به طول 30 (mm) و شعاعهای 5 (mm) و 7 (mm) تشکیل شده است. ماده دی‌الکتریک بین سطوح، دارای گذردهی نسبی $\epsilon_r = 2 + (4/r)$ است و r بر حسب mm اندازه‌گیری می‌شود. ظرفیت خازن را تعیین کنید.
 ۳۵-۳۰.م زمین را کره هادی بزرگی در نظر بگیرید ($6,37 \times 10^3$ km = شعاع) که اطراف آن را هوا

گرفته است، محاسبه کنید

(الف) ظرفیت زمین را؛

(ب) حداکثر باری را که بدون شکست هوا می‌تواند روی آن قرار گیرد.

۳۶-۳۰.م ظرفیت یک کره هادی مجزا به شعاع b ، که با یک لایه دی‌الکتریک به ضخامت d پوشیده شده است را، تعیین کنید. پذیرندگی الکتریکی دی‌الکتریک ϵ_r است.

۳۷-۳۰.م خازنی از دو پوسته کروی هم‌مرکز به شعاعهای R_i و R_o تشکیل شده است. فضای بین آنها با یک دی‌الکتریک به گذردهی نسبی ϵ_r از R_i تا b ($R_i < b < R_o$) و یک دی‌الکتریک دیگر به گذردهی نسبی $2\epsilon_r$ از b تا R_o پر شده است.

(الف) E و D را در تمام نقاط فضا بر حسب ولتاژ اعمال‌شده V تعیین کنید.
 (ب) ظرفیت را تعیین کنید.

۳۸-۳۰.م دو سیم هادی موازی یک خط انتقال نیرو دارای شعاع a بوده و به فاصله d از هم قرار دارند. سیمها در ارتفاع h از سطح زمین می‌باشند. با فرض اینکه زمین یک هادی کامل بوده و d و h هر دو بمراتب از a بزرگتر باشند، روابطی برای ظرفیت متقابل و ظرفیت خودی جزئی در واحد طول، بدست آورید.

۳۹-۳۰.م یک سیستم مجزاشده، شامل سه سیم هادی موازی بسیار طویل است. محور هر سه سیم بر روی یک صفحه واقع است. دو سیم بیرونی دارای شعاع b بوده و هر یک به فاصله $d = 5.0b$ از مرکز سیم وسطی که شعاع آن $2b$ است، قرار دارند. ظرفیتهای جزئی در واحد طول را تعیین کنید.

۴۰-۳۰.م مقدار انرژی الکتریسیته ساکن یک کره با بار یکنواخت با شعاع b و چگالی بار حجمی ρ را که در نواحی زیر ذخیره می‌شود، محاسبه کنید:

(الف) داخل کره،

(ب) بیرون کره.

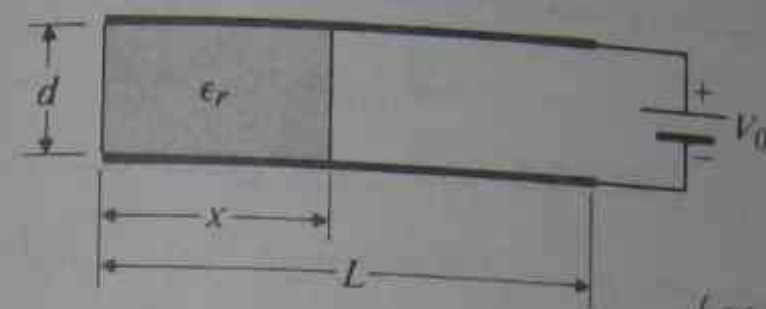
نتایج خود را با نتایج مثال ۳-۲۲ واریسی نمایید.

۴۱-۳۰.م تئوری نسبیت اینشتین اظهار می‌دارد که کار لازم برای تشکیل دادن یک بار به صورت انرژی در جرم آن ذخیره شده و برابر mc^2 است که در آن m ، جرم و $c \cong 3 \times 10^8$ (m/s) سرعت نور است. به فرض اینکه الکترون یک کره کامل باشد، از روی بار و جرم آن (9.1×10^{-31} kg)، شعاع آن را بدست آورید.

۴۲-۳۰.م انرژی الکتریسیته ساکنی ذخیره‌شده در ناحیه $R > b$ ، پیرامون یک دوقطبی الکتریکی با گشتاور P را پیدا کنید.

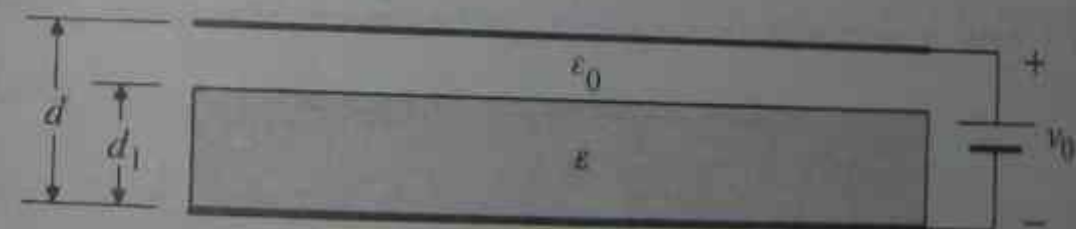
۴۳-۳۰.م ثابت کنید معادلات (۳-۱۸۰) در مورد انرژی الکتریسیته ساکنی ذخیره‌شده برای هر خازن

مشکل از دو هادی برقرار است.
 ۴۴-۳-۲ یک خازن صفحه‌ای موازی به عرض w ، طول L و فاصله d ، مطابق شکل ۳-۴۳ به طور جزئی توسط یک محیط دی‌الکتریک به ضریب ϵ_r پر شده است. یک باتری V_0 ولتی بین صفحات متصل شده است.
 الف) D ، E و ρ_v را در هر ناحیه پیدا کنید.
 ب) فاصله x را چنان بیابید که انرژی الکتریسته ساکنی ذخیره شده در هر دو ناحیه یکسان باشد.



شکل ۳-۴۳ خازن صفحه‌ای موازی (مسئله ۳-۴۴)

۴۵-۳-۲ با استفاده از اصل جابجایی مجازی، فرمولی برای نیروی بین دو بار نقطه‌ای $+Q$ و $-Q$ که در فاصله x از یکدیگر در فضای آزاد قرار دارند، بدست آورید.
 ۴۶-۳-۲ ولتاژ ثابت V_0 به خازن صفحه‌ای موازی پر شده جزئی طبق شکل ۳-۴۴ اعمال می‌شود. گذردهی دی‌الکتریک ϵ و مساحت صفحات S است. نیروی وارد بر صفحه بالایی را تعیین کنید.

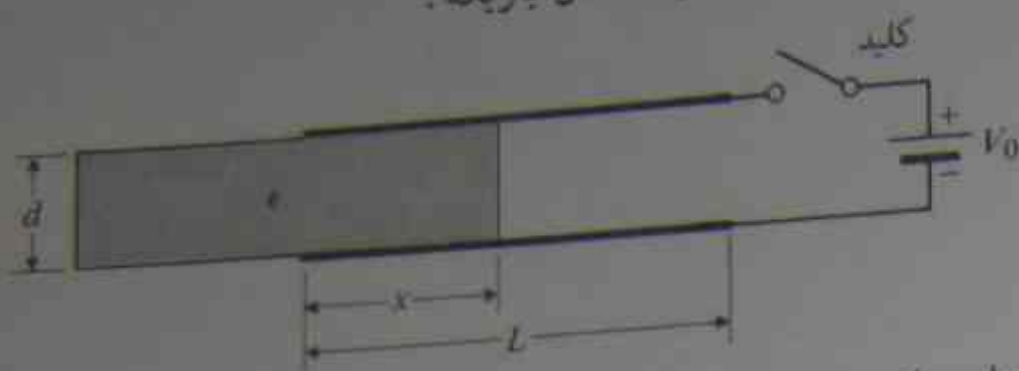


شکل ۳-۴۴ خازن صفحه‌ای موازی (مسئله ۳-۴۶)

۴۷-۳-۲ هادی‌های یک خط انتقال دو سیمه مجزا هر یک به شعاع b و فاصله D از هم قرار گرفته‌اند. با فرض اینکه $D \gg b$ و ولتاژ بین دو خط V_0 است، نیروی وارد بر واحد طول خط را تعیین کنید.

۴۸-۳-۲ یک خازن صفحه‌ای موازی با عرض w ، طول L و فاصله d دارای یک باریکه دی‌الکتریک جامد با گذردهی ϵ در فضای بین صفحات است. این خازن توسط یک باتری مطابق شکل ۳-۴۵، تا ولتاژ V_0 باردار شده است. فرض کنید باریکه دی‌الکتریک به وضعیت نشان داده بیرون آورده شود، نیروی وارد بر باریکه را تعیین نمایید.
 الف) درحالی که کلید بسته است.

ب) با فرض باز شدن کلید قبل از حرکت دادن باریکه.



شکل ۳-۴۵ خازن صفحه‌ای موازی پر شده جزئی (مسئله ۳-۴۸)

حل مسائل الکتروسیسته ساکن

۴-۱ مقدمه

مسائل الکتروسیسته ساکن، مسائلی هستند که با تأثیرات بارهای الکتریکی در حال سکون، سر و کار دارند. این مسائل برحسب اینکه در آغاز چه چیزی معلوم است خود را به طرق مختلفی نمایش می‌دهند. حل مسئله، معمولاً مستلزم تعیین پتانسیل الکتریکی، شدت میدان الکتریکی، و/یا توزیع بار الکتریکی است. در صورتی که توزیع بار داده شده باشد، با استفاده از فرمول‌های بنانهاده شده در فصل ۳، هم پتانسیل الکتریکی و هم شدت میدان الکتریکی پیدا می‌شوند. اما در بسیاری از مسائل عملی، توزیع دقیق بار در تمام نقاط معلوم نیست، و برای یافتن پتانسیل و شدت میدان، فرمول‌های فصل ۳، مستقیماً قابل بکارگیری نمی‌باشند. برای مثال، اگر بارهای چند نقطه معین گسسته در فضا و پتانسیل برخی از اجسام هادی داده شوند، یافتن توزیع بارهای سطحی روی اجسام هادی و/یا شدت میدان الکتریکی در فضا نسبتاً مشکل است. در صورتی که شکل هندسی مرزهای اجسام هادی ساده باشد، روش تصاویر با امتیازات بسیاری قابل بکارگیری است. این روش در بخش ۴-۴ مورد بحث قرار خواهد گرفت.

در یک مسئله نوع دیگر، پتانسیل تمام اجسام هادی معلوم است، و می‌خواهیم پتانسیل و شدت میدان فضای پیرامون و نیز توزیع بارهای سطحی را روی مرزهای هادی‌ها پیدا کنیم. در اینجا باید معادلات دیفرانسیلی را با شرایط مرزی مناسب حل نماییم. اینها مسائل مقدار مرزی

هستند. روشهای حل مسائل مقدار مرزی در دستگاه‌های مختصاتی مختلف در بخش‌های ۴-۵ تا ۴-۷ مورد بحث قرار خواهند گرفت.

۲-۴ معادلات پواسون و لاپلاس

در بخش ۳-۸، خاطر نشان کردیم که معادلات (۳-۹۸) و (۳-۵) دو معادله دیفرانسیل اصلی حاکم بر الکتروستاتیک ساکن در کلیه محیط‌ها هستند. این معادلات را برای راحتی دوباره می‌نویسیم.

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad \text{معادله (۳-۹۸)} \quad (۱-۴)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad \text{معادله (۳-۵)} \quad (۲-۴)$$

طبیعت غیرگردشی \mathbf{E} که توسط معادله (۲-۴) نشان داده شده است، ما را قادر می‌سازد پتانسیل الکتروستاتیکی عددی V را مطابق معادله (۳-۴۳) تعریف کنیم.

$$\mathbf{E} = -\nabla V \quad \text{معادله (۳-۴۳)} \quad (۳-۴)$$

در یک محیط خطی و هم‌سویکسان، $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ و معادله (۱-۴) به صورت زیر درمی‌آید

$$\nabla \cdot \epsilon \mathbf{E} = \rho \quad (۴-۴)$$

جاگذاری معادله (۳-۴) در معادله (۴-۴) نتیجه می‌دهد

$$\nabla \cdot (\epsilon \nabla V) = -\rho \quad (۵-۴)$$

که ϵ در آن می‌تواند تابعی از مکان باشد. در یک محیط ساده، یعنی محیطی که همگن نیز هست، ϵ ثابت بوده و می‌تواند از عملیات دیورژانس بیرون آورده شود. داریم

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (۶-۴)$$

در معادله (۶-۴)، عملگر جدید ∇^2 (توان دوم ∇) عملگر لاپلاسین^۱، که جایگزین "دیورژانس گرادیان" یا $\nabla \cdot \nabla$ گشته است را معرفی نموده‌ایم. معادله (۶-۴) به معادله پواسون^۲ معروف است؛ این معادله بیان می‌دارد که لاپلاسین (دیورژانس گرادیان) V در یک محیط ساده برابر است با $-\rho/\epsilon$ و در آن، گذردهی محیط (که ثابت است) و ρ چگالی بار حجمی (که می‌تواند تابعی از مختصات فضایی باشد) است.

چون هر دو عملیات دیورژانس و گرادیان شامل مشتقات فضایی مرتبه اول هستند، معادله

۱- Laplacian operator

۲- Poisson's equation

پواسون، یک معادله دیفرانسیل پاره‌ای مرتبه دوم است و در هر نقطه‌ای از فضا که مشتقات مرتبه دوم وجود داشته باشند، برقرار می‌باشد. در مختصات کارتزین،

$$\nabla^2 V = \nabla \cdot \nabla V = \left(a_x \frac{\partial}{\partial x} + a_y \frac{\partial}{\partial y} + a_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(a_x \frac{\partial V}{\partial x} + a_y \frac{\partial V}{\partial y} + a_z \frac{\partial V}{\partial z} \right)$$

و معادله (۴-۶) به صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (V/m^2) \quad (۷-۴)$$

به همین ترتیب، با استفاده از معادلات (۲-۹۳) و (۲-۱۱۰)، بسادگی می‌توان عبارات زیر را برای $\nabla^2 V$ در مختصات استوانه‌ای و کروی تحقیق نمود. مختصات استوانه‌ای:

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \quad (۸-۴)$$

مختصات کروی:

$$\nabla^2 V = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial V}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \quad (۹-۴)$$

حل معادله پواسون در فضای سه‌بعدی با شرایط مرزی مشخص، معمولاً کار ساده‌ای نیست. در نقاطی از یک محیط ساده که بار آزادی وجود ندارد، $\rho = 0$ و معادله (۴-۶) به صورت

$$\nabla^2 V = 0 \quad (۱۰-۴)$$

که معادله لاپلاس^۱ نامیده می‌شود، ساده می‌گردد. معادله لاپلاس، جایگاه مهمی در الکترومغناطیس دارد. این معادله حاکم بر مسائلی است که شامل مجموعه‌ای از هادیها، همچون خازن‌ها باشد، که در پتانسیل‌های مختلفی نگه داشته شوند. وقتی که V از معادله (۱۰-۴) پیدا شود، \mathbf{E} از روی $-\nabla V$ و توزیع بار روی سطح هادی از روی $\rho_s = \epsilon E_n$ (معادله ۲-۷۲) تعیین می‌شوند.

مثال ۱-۴ دو صفحه خازن صفحه‌ای موازی، به فاصله d از یکدیگر قرار دارند و مطابق شکل ۱-۴ در پتانسیل‌های 0 و V_0 نگه داشته می‌شوند. با فرض اثرات لبه‌ای قابل چشم‌پوشی، (الف) پتانسیل را در تمام نقاط بین صفحات، و (ب) چگالی‌های بار سطحی را روی صفحات، تعیین نمایید.

۱- Laplace's equation

حل (الف) معادله لاپلاس، معادله حاکم بر پتانسیل بین صفحات است. زیرا در آنجا داریم $\rho = 0$. چشم‌پوشی از اثرات لبه‌ای میدان الکتریکی، معادل این فرض است که توزیع میدان بین صفحات، مشابه حالت صفحات بینهایت بزرگ است و در جهت‌های x و z ، هیچ تغییری در V وجود ندارد. بنابراین معادله (۴-۷) به صورت زیر ساده می‌شود

$$\frac{d^2 V}{dy^2} = 0 \quad (۴-۱۱)$$

که d^2/dy^2 به جای $\partial^2/\partial y^2$ بکار رفته است، زیرا y تنها متغیر فضایی است. انتگرال‌گیری از معادله (۴-۱۱) نسبت به y می‌دهد

$$\frac{dV}{dy} = C_1$$

که در آن، ثابت انتگرال‌گیری C_1 هنوز باید تعیین شود. با انتگرال‌گیری دوباره، بدست می‌آوریم

$$V = C_1 y + C_2 \quad (۴-۱۲)$$

برای تعیین دو ثابت انتگرال‌گیری، C_1 و C_2 ، دو شرط مرزی موردنیاز است:

$$y = 0 \text{ در } V = 0 \quad (۴-۱۳ \text{ الف})$$

$$y = d \text{ در } V = V_0 \quad (۴-۱۳ \text{ ب})$$

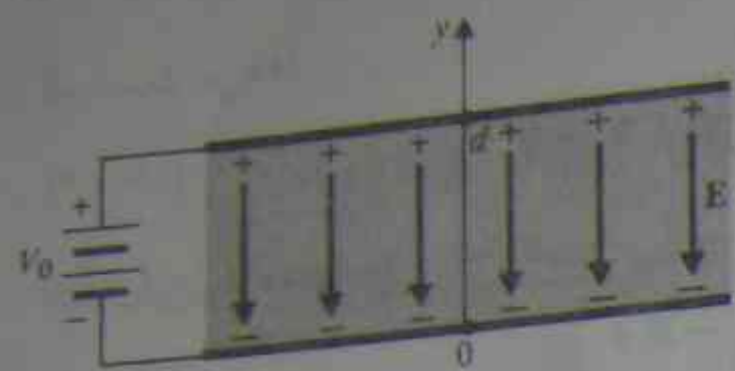
جاگذاری معادلات (۴-۱۳ الف) و (۴-۱۳ ب) در معادله (۴-۱۲) فوراً نتیجه می‌دهد $C_2 = 0$ و $C_1 = V_0/d$. از این رو پتانسیل در هر نقطه دلخواه y بین صفحات، از معادله (۴-۱۲) به صورت زیر بدست می‌آید،

$$V = \frac{V_0}{d} y \quad (۴-۱۴)$$

پتانسیل از $y = 0$ تا $y = d$ به طور خطی افزایش می‌یابد.

(ب) برای یافتن چگالی‌های بار سطحی، نخست باید E را در صفحات هادی، در $y = 0$ و $y = d$ بیابیم. از معادلات (۴-۳) و (۴-۱۴) داریم

$$E = -a_y \frac{dV}{dy} = -a_y \frac{V_0}{d} \quad (۴-۱۵)$$



شکل ۱-۴ یک خازن صفحه‌ای موازی (مثال ۴-۱)

که ثابت و مستقل از y است. دقت کنید که جهت E مخالف جهت افزایش V است. چگالی‌های بار سطحی در صفحات هادی با استفاده از معادله (۳-۷۲) بدست می‌آیند.

$$E_n = a_n \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon} \quad \text{در صفحه پایینی}$$

$$a_n = a_y \quad E_{nt} = -\frac{V_0}{d} \quad \rho_{st} = -\frac{\epsilon V_0}{d} \quad \text{در صفحه بالایی}$$

$$a_n = -a_y \quad E_{nu} = \frac{V_0}{d} \quad \rho_{su} = \frac{\epsilon V_0}{d}$$

خطوط میدان الکتریکی در یک میدان الکتریسیته ساکن، از بارهای مثبت آغاز شده و به بارهای منفی ختم می‌شوند.

مثال ۲-۴ با حل معادلات پواسون و لاپلاس نسبت به V ، میدان E را در درون و بیرون یک ایر الکترونی کروی با چگالی بار حجمی یکنواخت $\rho = -\rho_0$ (که در آن ρ_0 کمیتی مثبت است) در $0 \leq R \leq b$ و $R > b$ تعیین نمایید.

حل به یاد می‌آوریم که این مسئله در فصل ۳ (مثال ۳-۷) با بکارگیری قانون گوس حل شده است. اکنون همان مسئله را برای نمایش حل یک بعدی معادلات پواسون و لاپلاس مورد استفاده قرار می‌دهیم. چون در جهات θ و ϕ تغییراتی وجود ندارد، تنها باتوجهی از R در مختصات کروی سر و کار خواهیم داشت.

(الف) در درون ایر،

$$0 \leq R \leq b \quad \rho = -\rho_0$$

در این ناحیه، معادله پواسون ($\nabla^2 V_i = -\rho/\epsilon_0$) برقرار است. با حذف جملات $\partial/\partial\theta$

و $\partial/\partial\phi$ از معادله (۴-۹)، داریم

$$\frac{1}{R^2} \frac{d}{dR} \left(R^2 \frac{dV_i}{dR} \right) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0}$$

۴ حل مسائل الکتریسیته ساکن

که بدست می‌دهد

$$\frac{d}{dR} \left(R^2 \frac{dV_i}{dR} \right) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} R^2 \quad (۱۶-۴)$$

انتگرال‌گیری از معادله (۱۶-۴) نتیجه می‌دهد

$$\frac{dV_i}{dR} = \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} R + \frac{C_1}{R^2} \quad (۱۷-۴)$$

شدت میدان الکتریکی در درون ابر الکترونی برابر است با

$$E_i = -\nabla V_i = -a_R \left(\frac{dV_i}{dR} \right)$$

چون E_i نمی‌تواند در $R=0$ بینهایت شود، ثابت انتگرال‌گیری C_1 در معادله (۱۷-۴) باید صفر باشد. بدست می‌آید

$$C_1 = 0 \Rightarrow E_i = -a_R \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} R \quad 0 \leq R \leq b \quad (۱۸-۴)$$

(ب) در بیرون ابر

$$R \geq b \quad \rho = 0$$

در این ناحیه، معادله لاپلاس برقرار است. داریم یا

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{dV_o}{dR} \right) = 0 \quad (۱۹-۴)$$

با انتگرال‌گیری از معادله (۱۹-۴) بدست می‌آوریم

$$\frac{dV_o}{dR} = \frac{C_2}{R^2} \quad (۲۰-۴)$$

یا

$$E_o = -\nabla V_o = -a_R \frac{dV_o}{dR} = -a_R \frac{C_2}{R^2} \quad (۲۱-۴)$$

ثابت انتگرال‌گیری C_2 با معادل قرار دادن E_i و E_o در $R=b$ بدست می‌آید، درحالی که هیچ ناپیوستگی در مشخصات محیطی وجود ندارد.

$$\frac{C_2}{b^2} = \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} b$$

که از روی آن می‌یابیم

$$C_2 = \frac{\rho_0 b^3}{2\epsilon_0} \quad (۲۲-۴)$$

و

$$E_o = -a_R \frac{\rho_0 b^3}{2\epsilon_0 R^2} \quad R \geq b \quad (۲۳-۴)$$

۴-۲ معادلات پواسون ولابلاس

چون کل بار موجود در ابر الکترونی برابر

$$Q = -\rho_0 \frac{4\pi}{3} b^3$$

است، معادله (۲۳-۴) می‌تواند به صورت زیر نوشته شود

$$E_o = a_R \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \quad (۲۴-۴)$$

که عبارت آشنای شدت میدان الکتریکی در نقطه‌ای به فاصله R از بار نقطه‌ای Q است.

با بررسی پتانسیل به صورت تابعی از R ، می‌توان بیش‌تر نسبت به این مسئله بدست آورد. با انتگرال‌گیری از معادله (۱۷-۴) و یادآوری اینکه $C_1 = 0$ داریم

$$V_i = \frac{\rho_0 R^2}{6\epsilon_0} + C'_1 \quad (۲۵-۴)$$

مهم است توجه داشته باشیم که ثابت انتگرال‌گیری جدیدی است و برابر C_1 نمی‌باشد. جاگذاری معادله (۲۲-۴) در معادله (۲۰-۴) و انتگرال‌گیری نتیجه می‌دهد

$$V_o = -\frac{\rho_0 b^2}{2\epsilon_0 R} + C'_2 \quad (۲۶-۴)$$

اما C'_2 در معادله (۲۶-۴) باید صفر باشد، زیرا در بینهایت ($R \rightarrow \infty$)، V_o صفر است. چون پتانسیل الکتریسیته ساکن در مرز پیوسته است، C'_1 را با معادل قرار دادن V_i و V_o در $R=b$ تعیین می‌کنیم:

$$\frac{\rho_0 b^2}{6\epsilon_0} + C'_1 = -\frac{\rho_0 b^2}{2\epsilon_0}$$

یا

$$C'_1 = -\frac{\rho_0 b^2}{2\epsilon_0} \quad (۲۷-۴)$$

و از معادله (۲۵-۴)،

$$V_i = -\frac{\rho_0}{2\epsilon_0} \left(\frac{3b^2}{2} - \frac{R^2}{2} \right) \quad (۲۸-۴)$$

ملاحظه می‌کنیم که V_i در معادله (۲۸-۴)، مانند V در معادله (۱۷۲-۳) است. با این توضیح که $\rho = -\rho_0$.

۳-۴ یکتائی جوابهای الکتروسیسته ساکن

در دو مثال نسبتاً ساده بخش قبل، جوابها را با انتگرالگیری مستقیم بدست آوردیم. در موارد پیچیدهتر، روشهای دیگری برای حل باید مورد استفاده قرار گیرند. قبل از اینکه این روشها را بررسی کنیم، مهم است بدانیم که یک جواب معادله پواسون (که معادله لاپلاس حالت خاصی از آن است) که شرایط مرزی مفروضی را برآورده میسازد، جواب یکتاست. این بیان را قضیه یکتائی می نامند. نتیجه قضیه یکتائی این است که یک جواب هر مسئله الکتروسیسته ساکن که در شرایط مرزی آن صدق کند، بدون توجه به روش بدست آوردن آن جواب، تنها جواب ممکن است. حتی جوابی که با حدس هوشمندانه ای بدست آمده باشد، تنها جواب صحیح است. اهمیت این قضیه جوابی که با حدس هوشمندانه ای بدست آمده باشد، مورد توجه قرار خواهد گرفت.

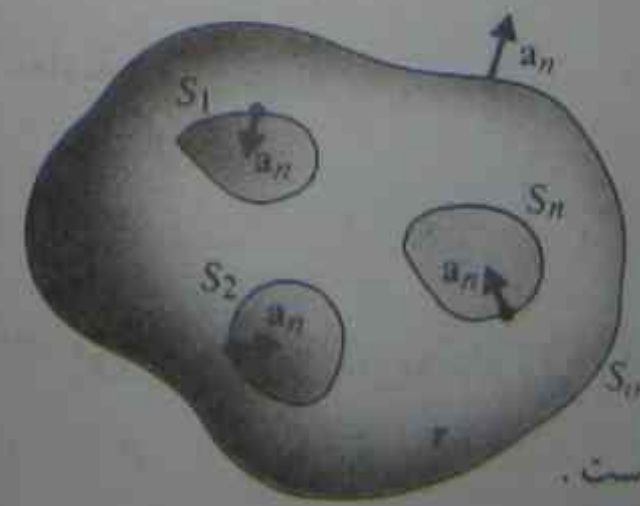
وقتی که روش تصویرها را در بخش ۴-۴ بررسی می کنیم، مورد توجه قرار خواهد گرفت. برای اثبات قضیه یکتائی، فرض کنید حجم τ از بیرون توسط سطح S_1 ، که می تواند سطحی در بینهایت باشد، محصور شده است. در درون سطح بسته S_1 ، تعدادی جسم هادی باردار با سطوح S_1, S_2, \dots, S_n به صورت نشان داده شده، در شکل ۴-۲، در پتانسیل های مشخصی وجود دارند. اکنون فرض کنید که برخلاف قضیه یکتائی، دو جواب V_1 و V_2 برای معادله پواسون در τ وجود داشته باشد:

$$\nabla^2 V_1 = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (۴-۲۹ \text{ الف})$$

$$\nabla^2 V_2 = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (۴-۲۹ \text{ ب})$$

همچنین فرض کنید که هر دوی V_1 و V_2 ، شرایط مرزی یکسانی را روی S_1, S_2, \dots, S_n و S_∞ برآورده می سازند. گیریم یک پتانسیل تفاضلی جدید را تعریف کنیم:

$$V_d = V_1 - V_2 \quad (۴-۳۰)$$



شکل ۴-۲. سطح S_1 ، حجم τ را همراه اجسام هادی احاطه کرده است.

۳-۴ یکتائی جوابهای الکتروسیسته ساکن

از معادلات (۴-۲۹ الف) و (۴-۲۹ ب) ملاحظه می کنیم که V_d معادله لاپلاس را در τ برآورده می کند:

$$\nabla^2 V_d = 0 \quad (۴-۳۱)$$

روی مرزهای هادی، پتانسیل ها معلومند و $V_d = 0$ است. اتحاد برداری (مسئله ۲۰-۲۸)،

$$\nabla \cdot (fA) = f \nabla \cdot A + A \cdot \nabla f \quad (۴-۳۲)$$

را به یاد آورده، با فرض $f = V_d$ و $A = \nabla V_d$ داریم:

$$\nabla \cdot (V_d \nabla V_d) = V_d \nabla^2 V_d + |\nabla V_d|^2 \quad (۴-۳۳)$$

که در آن، به دلیل معادله (۴-۳۱)، جمله اول سمت راست، صفر می شود. انتگرالگیری از معادله (۴-۳۳) روی حجم τ نتیجه می دهد

$$\oint_S (V_d \nabla V_d) \cdot \mathbf{a}_n ds = \int_\tau |\nabla V_d|^2 dv \quad (۴-۳۴)$$

که در آن \mathbf{a}_n ، نمایشگر بردار واحد عمود و به سمت خارج τ است. سطح S شامل S_1 و نیز S_2, \dots, S_n و S_∞ می شود. روی مرزهای هادی، $V_d = 0$ ، روی سطح بزرگ S_∞ ، که کل سیستم را در برمی گیرد، انتگرال سطحی سمت چپ معادله (۴-۳۴)، با در نظر گرفتن S_∞ به صورت سطح یک کره بسیار بزرگ به شعاع R ، قابل محاسبه است. با افزایش R هر دوی V_1 و V_2 (و بنابراین V_d) متناسب با $1/R$ کاهش می یابند؛ در نتیجه، ∇V_d متناسب با $1/R^2$ کاهش می یابد، و باعث می شود عبارت مورد انتگرالگیری $(V_d \nabla V_d)$ متناسب با $1/R^3$ کاهش یابد. اما سطح S_∞ متناسب با R^2 افزایش می یابد. از این رو انتگرال سطحی سمت چپ معادله (۴-۳۴)، با $1/R$ کاهش یافته و در بینهایت صفر می شود. بنابراین انتگرال حجمی سمت راست نیز باید صفر شود. یعنی

$$\int_\tau |\nabla V_d|^2 dv = 0 \quad (۴-۳۵)$$

چون عبارت مورد انتگرالگیری، $|\nabla V_d|^2$ ، همه جا غیرمنفی است، معادله (۴-۳۵) تنها وقتی برقرار است که $|\nabla V_d|$ متحد با صفر باشد. گرادیان صفر در تمامی نقاط بدین معنی است که V_d در تمام نقاط داخل τ مقدار یکسانی دارد، همان مقداری که روی سطوح مرزی S_1, S_2, \dots, S_n داراست، که در آنها $V_d = 0$. در نتیجه در کل حجم τ ، $V_d = 0$ خواهد بود. بنابراین $V_1 = V_2$ ، و تنها یک جواب ممکن وجود دارد.

بسادگی می توان مشاهده نمود که اگر به جای پتانسیل اجسام هادی، توزیع بارهای سطحی $(\rho_s = \epsilon E_n = -\epsilon \partial V / \partial n)$ مشخص شده باشند، قضیه یکتائی برقرار خواهد بود. در چنین

حالتی ∇V_d صفر بوده، که به نوبه خود سمت چپ معادله (۴-۳۴) را صفر کرده و به همان نتایج منجر می‌گردد. در واقع، حتی اگر یک دی الکتریک غیرهمگن (با گذردهی متغیر با مکان) هم حضور داشته باشد، قضیه یکتائی کماکان قابل اعمال خواهد بود. هر چند که اثبات آن پیچیده‌تر است و در اینجا مطرح نخواهد شد.

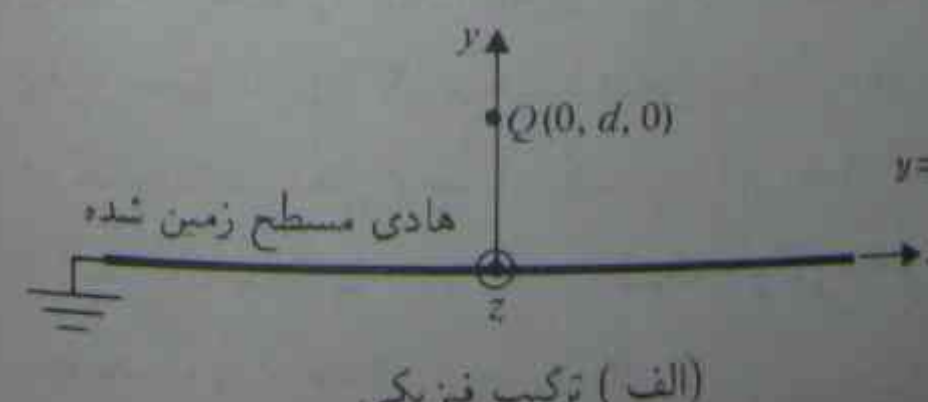
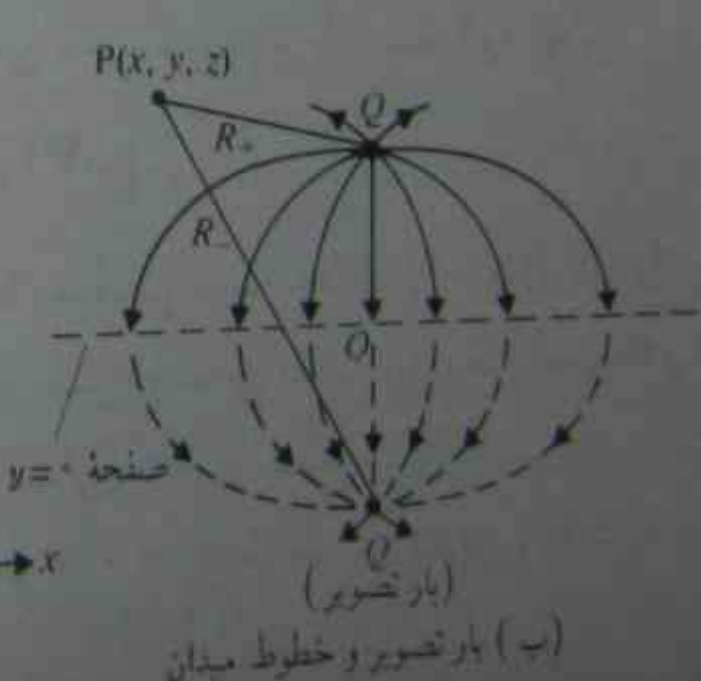
۴-۴ روش تصاویر

دسته‌ای از مسائل الکتریسیته ساکن با شرایط مرزی وجود دارند که اگر معادله لاپلاس حاکم بر آنها را مستقیماً حل کنیم، برقراری این شرایط مشکل خواهد بود، اما شرایط سطوح مرزی در این مسائل، توسط بارهای تصویر (معادل) مناسب قابل تشکیل بوده و توزیع پتانسیل به صورت مستقیمی قابل تعیین است. این روش جایگزینی سطوح مرزی با بارهای تصویر مناسب، به جای حل رسمی معادله لاپلاس را روش تصاویر می‌گویند.

حالتی را در نظر بگیرید، که بار نقطه‌ای مثبت Q ، در فاصله d ، بالای یک صفحه هادی بزرگ زمین شده (پتانسیل صفر)، مطابق شکل ۴-۳ (الف) قرار گرفته باشد. مسئله، پیدا کردن پتانسیل در تمام نقاط بالای صفحه هادی ($y > 0$) است. روش رسمی انجام چنین کاری، حل معادله لاپلاس در مختصات کارتزین است:

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad (۴-۳۶)$$

که در تمام نقاط $y > 0$ بجز در محل بار نقطه‌ای باید برقرار باشد. جواب $V(x, y, z)$ ، باید شرایط صفحه بعد را برآورده سازد:



شکل ۴-۳ بار نقطه‌ای و هادی مسطح زمین شده

۱- در تمام نقاط روی صفحه هادی زمین شده، پتانسیل صفر باشد؛ یعنی،

$$V(x, 0, z) = 0$$

۲- در نقاط بسیار نزدیک به Q ، پتانسیل به سمت پتانسیل یک بار نقطه‌ای تنها میل می‌کند؛ یعنی

$$V \rightarrow \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \quad \text{وقتی که } R \rightarrow 0$$

که R در آن، فاصله از Q است.

۳- در نقاط بسیار دور از Q ($x \rightarrow \pm\infty$ ، $y \rightarrow +\infty$ یا $z \rightarrow +\infty$)، پتانسیل به سمت صفر میل کند.

۴- تابع پتانسیل نسبت به مختصات x و z زوج باشد؛ یعنی،

$$V(x, y, z) = V(-x, y, z)$$

و

$$V(x, y, z) = V(x, y, -z)$$

به نظر مشکل می‌آید که بتوان جوابی برای V تشکیل داد تا تمامی این شرایط را برآورده سازد. از دیدگاه دیگر، می‌توانیم این طور استدلال کنیم که حضور بار مثبت Q در $y = d$ ، باعث القای بارهای منفی روی سطح صفحه هادی می‌شود و چگالی بار سطحی ρ_s را نتیجه می‌دهد. از این رو پتانسیل در نقاط بالای صفحه هادی برابر است با

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\sqrt{x^2 + (y-d)^2 + z^2}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\rho_s}{R_1} ds$$

که در آن، فاصله ds از نقطه مورد نظر و S سطح کل صفحه هادی است. مشکل در اینجا این است که ρ_s باید نخست از شرط مرزی $V(x, 0, z) = 0$ تعیین شود. همچنین، حتی بعد از تعیین ρ_s در تمام نقاط صفحه هادی، محاسبه انتگرال سطحی مشخص شده مشکل خواهد بود. در زیربخشهای بعدی، نشان می‌دهیم که چگونه روش تصاویر به مقدار قابل توجهی این مسائل را تسهیل می‌نماید.

۴-۴-۱ بار نقطه‌ای و صفحات هادی

مسئله شکل ۴-۳ (الف)، مسئله بار نقطه‌ای مثبت Q است که در فاصله d بالای هادی مسطح بزرگی با پتانسیل صفر قرار دارد. اگر هادی را برداشته و آن را با بار نقطه‌ای تصویر $-Q$ در $y = -d$ جایگزین نماییم، آنگاه پتانسیل در نقطه $P(x, y, z)$ در ناحیه $y > 0$ برابر است با $-Q$.

$$V(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_+} - \frac{1}{R_-} \right) \quad (۴-۳۷)$$

که در آن R_+ و R_- به ترتیب فاصله از Q و $-Q$ تا نقطه P می باشند.

$$R_+ = [x^2 + (y-d)^2 + z^2]^{1/2}$$

$$R_- = [x^2 + (y+d)^2 + z^2]^{1/2}$$

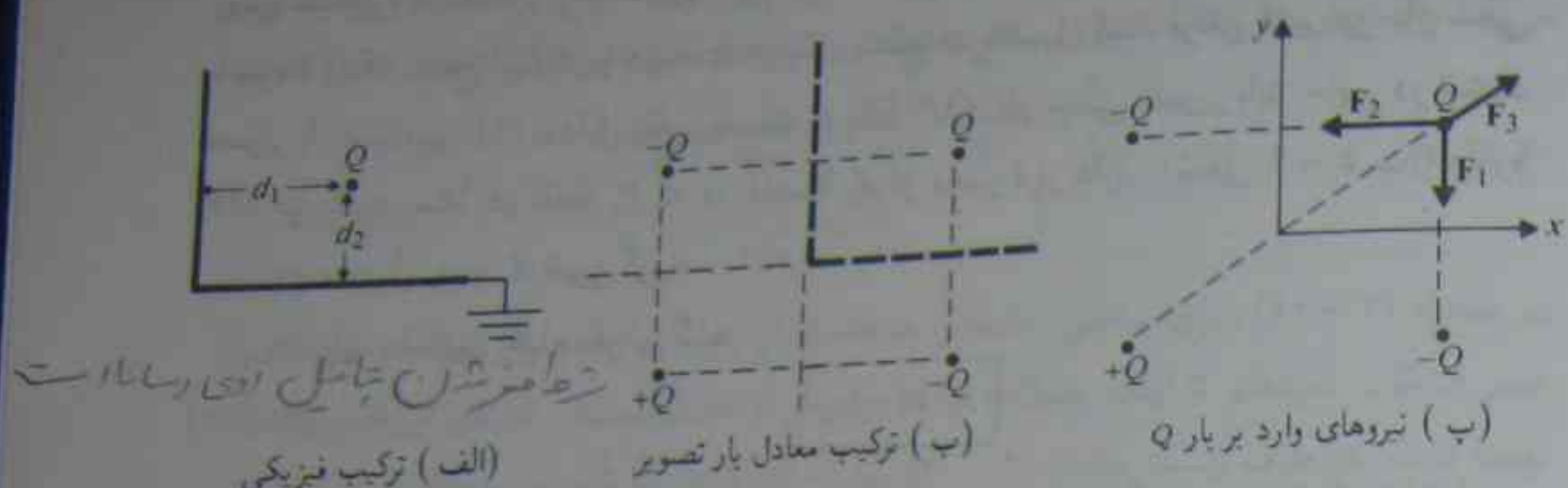
با جاگذاری مستقیم، بسادگی ثابت می شود (مسئله ۴-۵ الف) که $V(x, y, z)$ در معادله (۳۷-۴) در معادله لاپلاس (۴-۳۶) صدق می کند، و روشن است که هر چهار شرط مطرح شده پس از معادله (۴-۳۶) برآورده می شوند. بنابراین معادله (۴-۳۷)، یک جواب این مسئله است؛ و با توجه به قضیه یکتائی، تنها جواب می باشد. $\left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{(x^2 + (y-d)^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{1}{(x^2 + (y+d)^2 + z^2)^{3/2}} \right) \right)$ شدت میدان الکتریکی E در ناحیه $y > 0$ براحتی از $-\nabla V$ و معادله (۴-۳۷) بدست می آید. این میدان، دقیقاً برابر میدان بین دو بار نقطه‌ای $+Q$ و $-Q$ به فاصله $2d$ از یکدیگر است. تعدادی از خطوط میدان را در شکل ۴-۳ (ب) ترسیم نموده ایم. حل این مسئله الکتریسیته ساکن به روش تصویر بسیار ساده است؛ اما باید تأکید شود که بار تصویر در بیرون ناحیه‌ای قرار می گیرد که میدان باید تعیین شود. در این مسئله بارهای نقطه‌ای $+Q$ و $-Q$ نمی توانند برای محاسبه V یا E در ناحیه $y < 0$ بکار روند. در واقع، هم V و هم E در ناحیه $y < 0$ صفر هستند. آیا این مطلب را می توانید توضیح دهید؟

بآسانی دیده می شود که میدان الکتریکی بار خطی p_L در بالای صفحه هادی بینهایت، با استفاده از p_L و تصویر آن $-p_L$ (پس از برداشتن صفحه هادی)، قابل دستیابی است.

مثال ۳-۴ یک بار نقطه‌ای مثبت Q مطابق شکل ۴-۴ الف)، به ترتیب در فواصل d_1 و d_2 از دو نیم صفحه هادی عمود بر هم زمین شده، قرار دارد. نیروی وارد بر Q را در نتیجه بارهای القایی روی صفحات، تعیین کنید.

حل حل رسمی معادله پواسون با شرط مرزی پتانسیل صفر در نیم صفحه‌های هادی کاملاً دشوار خواهد بود. اکنون، بار تصویر $-Q$ در ربع چهارم، پتانسیل نیم صفحه افقی (اما نه نیم صفحه عمودی) را صفر خواهد کرد. به همین ترتیب بار تصویر $-Q$ در ربع دوم، پتانسیل نیم صفحه عمودی (اما نه نیم صفحه افقی) را صفر می نماید. ولی اگر بار تصویر سوم $+Q$ در ربع سوم اضافه گردد، از روی تقارن پیداست که ترکیب شکل ۴-۴ ب) از بارهای تصویر، شرایط مرزی پتانسیل صفر را روی هر دو نیم صفحه برقرار می سازد و از نظر الکتریکی معادل ترکیب فیزیکی شکل ۴-۲ الف) است.

بارهای سطحی منفی روی نیم صفحه‌ها القا خواهند شد، اما تأثیر آنها بر Q ، را می توان از روی تأثیر سه بار تصویر، تعیین نمود. با مراجعه به شکل ۴-۴ ب)، در مورد نیروی خالص وارد



شکل ۴-۲ بار نقطه‌ای و صفحات هادی عمود بر هم

بر Q داریم،

$$F = F_1 + F_2 + F_3$$

که در آن

$$F_1 = -a_y \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 (2d_1)^2}$$

$$F_2 = -a_x \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 (2d_1)^2}$$

$$F_3 = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 [(2d_1)^2 + (2d_2)^2]^{3/2}} (a_x 2d_1 + a_y 2d_2)$$

بنابراین،

$$F = \frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0} \left\{ a_x \left[\frac{d_1}{(d_1^2 + d_2^2)^{3/2}} - \frac{1}{d_1^2} \right] + a_y \left[\frac{d_2}{(d_1^2 + d_2^2)^{3/2}} - \frac{1}{d_2^2} \right] \right\}$$

پتانسیل الکتریکی و شدت میدان الکتریکی در نقاط ربع اول و چگالی بار سطحی القا شده روی دو نیم صفحه نیز با استفاده از سیستم متشکل از چهار بار فوق، قابل محاسبه است (مسئله ۴-۸).

۴-۴-۲ بار خطی و استوانه هادی موازی

اکنون، بار خطی p_L (C/m) قرار گرفته در فاصله d از محور یک استوانه مدور هادی موازی با آن به شعاع a را در نظر می گیریم. هم بار خطی و هم استوانه هادی، بینهایت طولی فرض می شوند. شکل ۴-۵ الف)، مقطع این ترکیب را نشان می دهد. پیش از حل این مسئله به

روش تصاویر، به نکات زیر توجه می‌نماییم: (۱) تصویر باید یک بار خطی موازی در درون استوانه باشد، تا اینکه سطح استوانه را در $r = a$ ، یک سطح هم‌پتانسیل کند. فرض کنید این بار خطی تصویر را ρ_i بنامیم. (۲) به دلیل تقارن نسبت به خط OP ، بار خطی تصویر باید جایی در امتداد OP قرار گیرد، مثلاً در نقطه P_i که در فاصله d_i از محور قرار دارد (شکل ۴-۵ ب). لازم است دو مجهول ρ_i و d_i تعیین گردند.

به‌عنوان نخستین اقدام، فرض کنید

$$\rho_i = -\rho_L$$

(۴-۳۸)

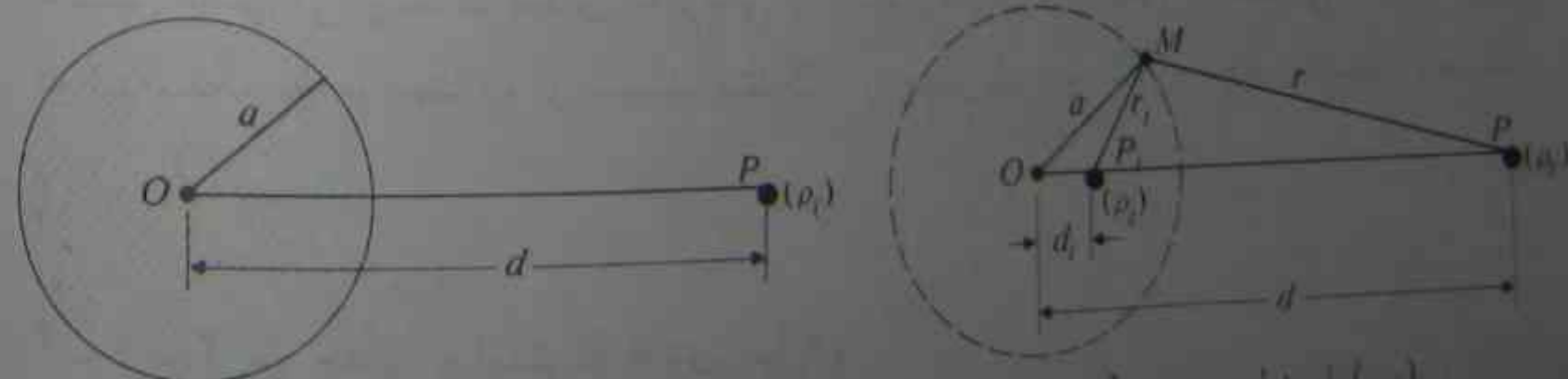
در این مرحله، معادله (۴-۳۸) تنها یک جواب آزمایشی است (یک حدس هوشمندانه)، و مطمئن نیستیم که معتبر باشد. ما از یک طرف، با این جواب آزمایشی پیش خواهیم رفت تا اینکه بفهمیم که شرایط مرزی را برآورده نمی‌سازد. از سوی دیگر اگر معادله (۴-۳۸) به جوابی منجر گردد که تمام شرایط مرزی را برآورده سازد، آنگاه بر اساس قضیه یکتایی این تنها جواب خواهد بود. کار بعدی ما این است که ببینیم آیا می‌توانیم d_i را تعیین کنیم یا خیر.

پتانسیل الکتریکی در فاصله r از بار خطی با چگالی ρ_L با انتگرال‌گیری از شدت میدان الکتریکی E در معادله (۴-۲) بدست می‌آید:

$$V = - \int_{r_i}^r E_r dr = - \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \int_{r_i}^r \frac{1}{r} dr = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{r_i}$$

(۴-۳۹)

دقت کنید که نقطه مرجع برای پتانسیل صفر، r_i نمی‌تواند در بینهایت باشد، زیرا قراردادن $r_i = \infty$ در معادله (۴-۳۹) را در تمام نقاط دیگر بینهایت خواهد کرد. گیریم فعلاً r_i را مشخص نشده



(الف) بار خطی و استوانه هادی موازی

(ب) بار خطی و تصویر آن

شکل ۴-۵ مقطع عرضی یک بار خطی و تصویر آن در یک استوانه مدور هادی موازی با آن

۴-۴ روش تصاویر

رها نماییم. پتانسیل در نقطه‌ای بر روی یا بیرون سطح استوانه‌ای با جمع اثرهای ρ_L و ρ_i بدست می‌آید. بخصوص در نقطه M روی سطح استوانه‌ای نشان داده شده در شکل ۴-۵ (ب) داریم

$$V_M = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_i}{r} - \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_i}{r_i} \quad (۴-۴۰)$$

$$= \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_i}{r}$$

در معادله (۴-۴۰) برای سادگی، نقطه‌ای هم‌فاصله از ρ_L و ρ_i را به‌عنوان نقطه مرجع پتانسیل صفر انتخاب نموده‌ایم تا اینکه جملات $\ln r_i$ یکدیگر را حذف نمایند. در غیر این صورت، یک جمله ثابت، در طرف راست معادله (۴-۴۰) باید اضافه شود، اما تأثیری بر مطالب بعدی نخواهد داشت. سطوح هم‌پتانسیل به‌صورت زیر مشخص می‌شوند

$$\frac{r_i}{r} = \text{ثابت} \quad (۴-۴۱)$$

اگر قرار باشد یک سطح هم‌پتانسیل بر سطح استوانه ($OM = a$) منطبق شود، نقطه P_i باید به‌صورتی قرار گیرد که مثلثهای OMP_i و OPM مشابه باشند. دقت کنید که این دو مثلث یک زاویه مشترک دارند، $\angle MOP_i = \angle OPM$. نقطه P_i باید چنان انتخاب شود که $\angle OMP_i = \angle OPM$ داریم

$$\frac{P_iM}{PM} = \frac{OP_i}{OM} = \frac{OM}{OP}$$

یا

$$\frac{r_i}{r} = \frac{d_i}{a} = \frac{a}{d} = \text{ثابت} \quad (۴-۴۲)$$

از معادله (۴-۴۲) می‌بینیم که، اگر

$$d_i = \frac{a^2}{d} \quad (۴-۴۳)$$

بار خطی تصویر $-\rho_L$ ، به‌همراه ρ_L ، سطح استوانه‌ای خط‌چین شکل ۴-۵ (ب) را هم‌پتانسیل می‌سازند. با تغییر مکان M روی دایره خط‌چین r_i و r هر دو تغییر می‌کنند؛ اما نسبت آنها ثابت و برابر a/d باقی می‌ماند. نقطه P_i را نقطه معکوس P نسبت به دایره‌ای به شعاع a می‌نامند. پس بار خطی تصویر $-\rho_L$ می‌تواند جایگزین سطح استوانه‌ای هادی شود و V و E در هر نقطه خارج سطح، با استفاده از بارهای خطی ρ_L و $-\rho_L$ قابل تعیین می‌باشند. با توجه به تقارن درمی‌یابیم که سطح استوانه‌ای موازی محصورکننده بار خطی اصلی ρ_L ، با شعاع a و با محوری در فاصله d_i سمت راست P نیز یک سطح هم‌پتانسیل است. این ملاحظه، ما را قادر می‌سازد که ظرفیت یک خط انتقال با سیم باز شامل دو هادی موازی با مقطع عرضی مدور را در واحد طول محاسبه کنیم.

مثال ۴-۴ ظرفیت بین دو سیم هادی مدور موازی طویل به شعاع a را در واحد طول تعیین کنید. محور سیم‌ها در فاصله D از یکدیگر قرار دارند.

حل به مقطع عرضی خط انتقال دو-سیمه در شکل ۴-۶ مراجعه کنید. می‌توان چنین تصور کرد که سطح هم‌پتانسیل دو سیم توسط یک جفت بار خطی ρ_L و $-\rho_L$ به فاصله $(D - 2d_1) = d - d_1$ تولید شده‌اند. اختلاف پتانسیل بین دو سیم، برابر اختلاف پتانسیل بین هر دو نقطه روی سیم‌های مربوط است. گیریم سیم‌های پیرامون خطوط بار معادل ρ_L و $-\rho_L$ را به ترتیب با زیرنویس‌های ۱ و ۲ علامت‌گذاری کنیم. از معادلات (۴-۴۰) و (۴-۴۲) داریم،

$$V_1 = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{a}{d}$$

و به‌طور مشابه،

$$V_2 = -\frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{a}{d}$$

توجه کنید که V_1 یک کمیت مثبت است، در حالی که V_2 یک کمیت منفی است زیرا $a < d$. ظرفیت در واحد طول برابر است با

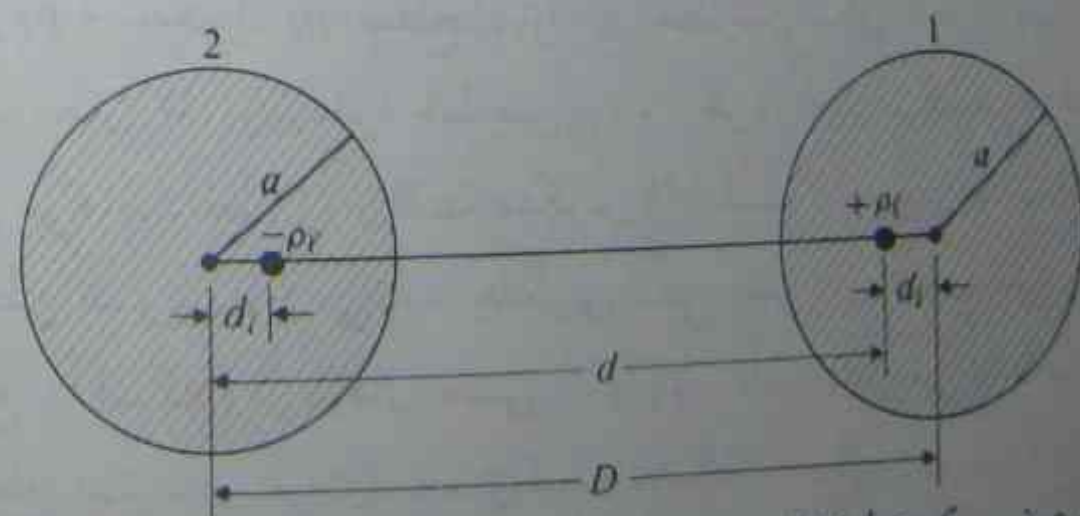
$$C = \frac{\rho_L}{V_1 - V_2} = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln(d/a)} \quad (4-44)$$

که در آن

$$d = D - d_1 = D - \frac{a^2}{d}$$

و از روی آن بدست می‌آوریم

$$d = \frac{1}{2}(D + \sqrt{D^2 - 4a^2}) \quad (4-45)$$



شکل ۶-۴ مقطع عرضی یک خط انتقال دو-سیمه و بارهای خطی معادل آن (مثال ۴-۴)

جواب دیگر: $d = \frac{1}{2}(D - \sqrt{D^2 - 4a^2})$ حذف می‌شود، زیرا معمولاً D و d بسیار بزرگتر از a هستند.

با استفاده از معادله (۴-۴۵) در معادله (۴-۴۴) داریم،

$$C = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln \left[\frac{D}{2a} + \sqrt{\left(\frac{D}{2a}\right)^2 - 1} \right]} \quad (F/m) \quad (4-46)$$

چون، به‌ازای $x > 1$

$$\ln \left[x + \sqrt{x^2 - 1} \right] = \cosh^{-1} x$$

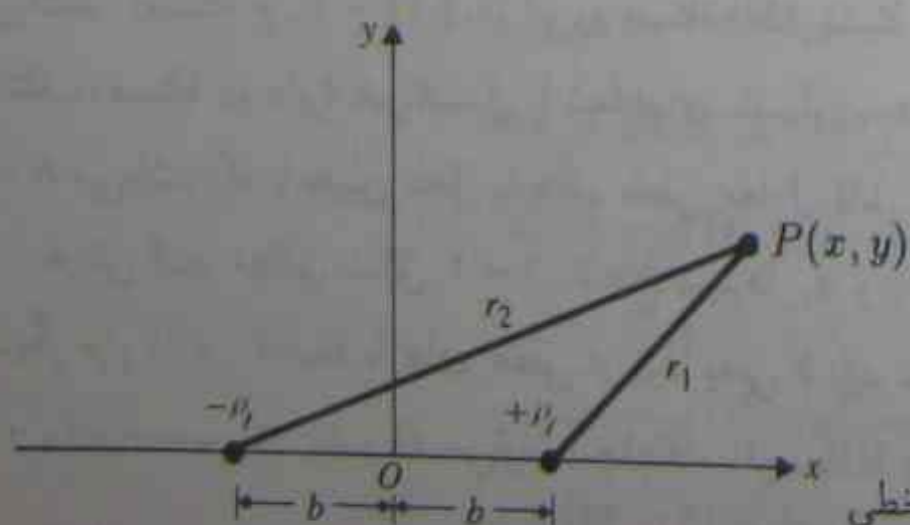
معادله (۴-۴۶) به‌صورت دیگری نیز می‌تواند نوشته شود

$$C = \frac{\pi\epsilon_0}{\cosh^{-1}(D/2a)} \quad (F/m) \quad (4-47)$$

توزیع پتانسیل و شدت میدان الکتریکی در پیرامون خط دو-سیمه شکل ۴-۶ نیز بسادگی از روی بارهای خطی معادل قابل تعیین است.

اکنون، حالت کلی‌تر خط دو-سیمه با شعاع‌های مختلف را در نظر می‌گیریم. می‌دانیم اگر بتوانیم محل بارهای خطی معادلی را پیدا کنیم که سطح سیم‌ها را هم‌پتانسیل نمایند، مسئله حل می‌شود. پس بیایید، نخست توزیع پتانسیل را در پیرامون یک جفت بار خطی مثبت و منفی، که مقطع عرضی آنها در شکل ۴-۷ داده شده است، بررسی نماییم. از معادله (۴-۴۰)، پتانسیل ناشی از $+\rho_L$ و $-\rho_L$ در هر نقطه $P(x, y)$ برابر است با،

$$V_P = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad (4-48)$$



شکل ۷-۴ مقطع عرضی یک جفت بار خطی

در صفحه $x-y$ خطوط هم‌پتانسیل با (ثابت) $r_2/r_1 = k$ تعریف می‌شوند. داریم

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{\sqrt{(x+b)^2 + y^2}}{\sqrt{(x-b)^2 + y^2}} = k \quad (49-4)$$

که به صورت زیر ساده می‌شود

$$\left(x - \frac{k^2 + 1}{k^2 - 1}b\right)^2 + y^2 = \left(\frac{2k}{k^2 - 1}b\right)^2 \quad (50-4)$$

معادله (49-4)، دسته‌ای از دایره‌ها را در صفحه xy با شعاع

$$a = \left| \frac{2kb}{k^2 - 1} \right| \quad (51-4)$$

به نمایش می‌گذارد، که در آن علامت قدرمطلق ضروری است، زیرا k در معادله (49-4) می‌تواند کمتر از واحد و a باید مثبت باشد. مراکز دایره‌ها در فاصله

$$c = \frac{k^2 + 1}{k^2 - 1}b \quad (52-4)$$

از مبدأ قرار دارند. رابطه بسیار ساده‌ای بین a ، b و c وجود دارد:

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad (53-4)$$

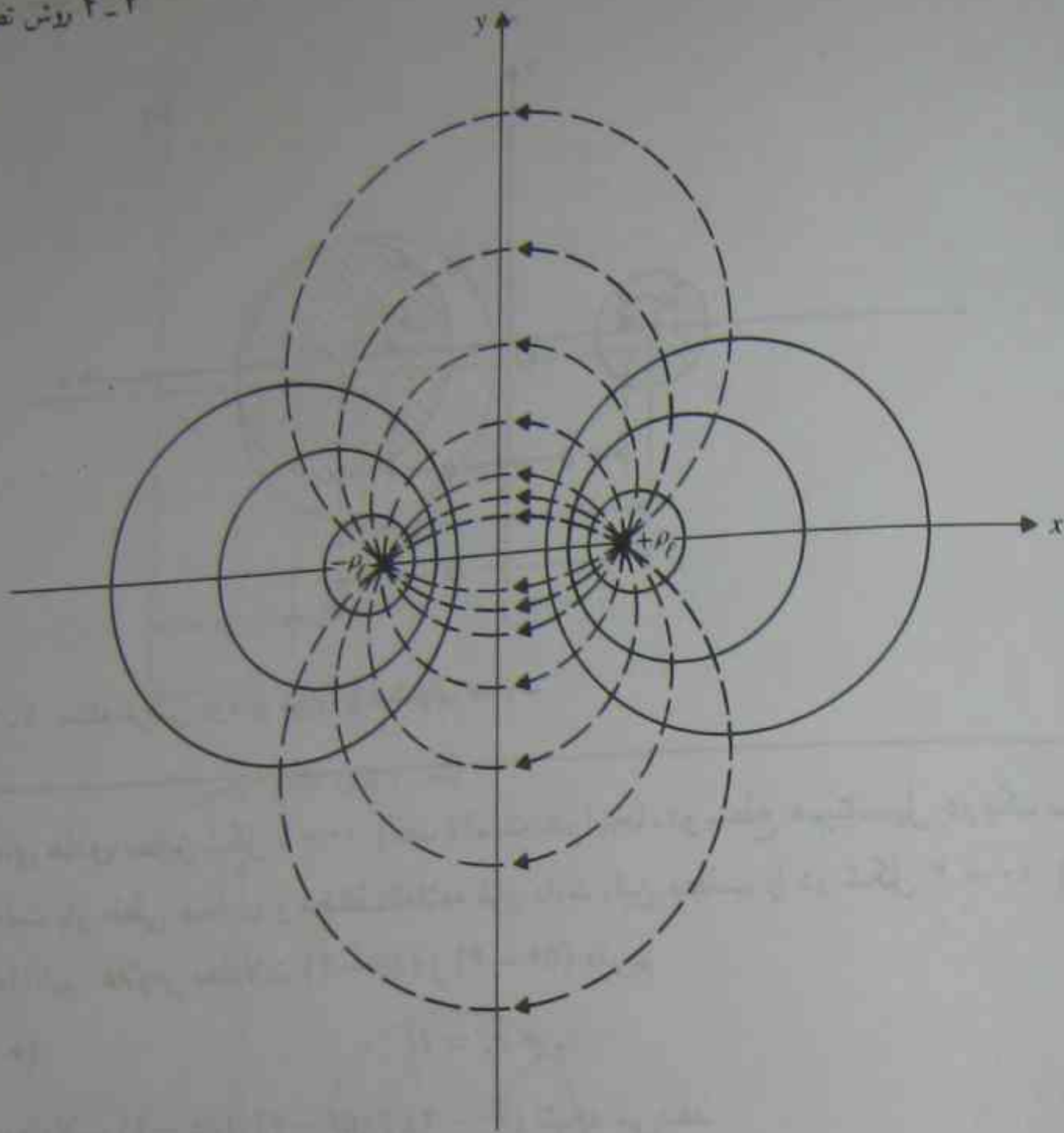
یا

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} \quad (54-4)$$

دو گروه از خطوط هم‌پتانسیل دایره‌ای جایگاشده در شکل ۸-۴ نشان داده شده‌اند: یک گروه به دور $+p_1$ به ازای $k > 1$ و گروه دیگر به دور $-p_2$ به ازای $k < 1$. محور y ، خط پتانسیل صفر (دایره‌ای با شعاع بینهایت) و در ارتباط با $k = 1$ است. خطوط بریده در شکل ۸-۴ دایره‌های نمایش دهنده خطوط میدان الکتریکی هستند که در تمام نقاط عمود بر خطوط هم‌پتانسیل می‌باشند (مسئله ۴-۱۲). از این رو مسئله الکتریسیته ساکن خط دو-سیمه با شعاعهای مختلف، مسئله دو دایره هم‌پتانسیل با شعاعهای نامساوی، هر یک در یک سمت محور y شکل ۸-۴ می‌باشد؛ که با تعیین محل بارهای خطی معادل قابل حل است.

فرض کنید مطابق شکل ۴-۱، شعاع سیم‌ها a_1 و a_2 و محورهای آنها در فاصله D از یکدیگر قرار دارند. فاصله بارهای خطی از مبدأ یعنی b باید تعیین شود. این کار را نخست با بیان c_1 و c_2 بر حسب a_1 ، a_2 و D می‌توان انجام داد. از معادله (۴-۵۴)، داریم

$$b^2 = c_1^2 - a_1^2 \quad (55-4)$$



شکل ۴-۸ خطوط هم‌پتانسیل (توپر) و میدان الکتریکی (خط چین) پیرامون یک جفت بار خطی

و

$$b^2 = c_2^2 - a_2^2 \quad (56-4)$$

اما

$$c_1 + c_2 = D \quad (57-4)$$

حل معادلات (۴-۵۵)، (۴-۵۶) و (۴-۵۷) بدست می‌دهد

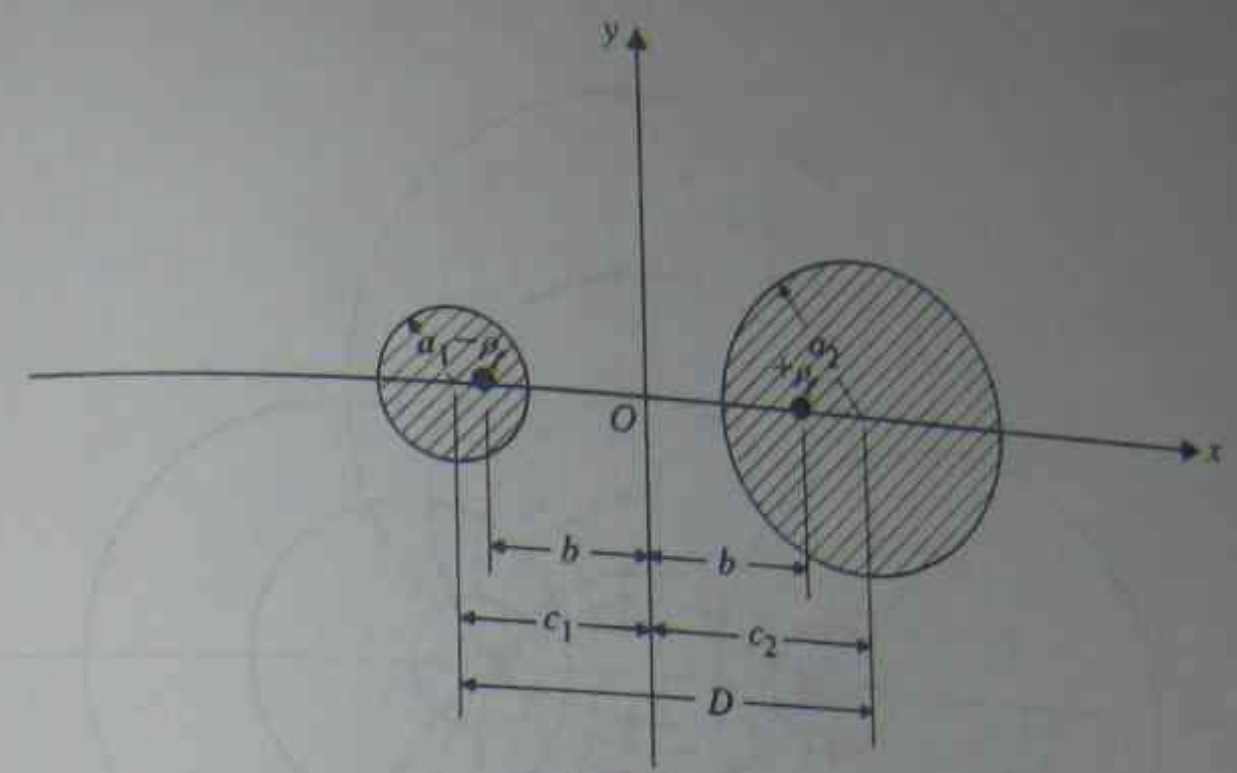
$$c_1 = \frac{1}{2D}(D^2 + a_1^2 - a_2^2) \quad (58-4)$$

و

$$c_2 = \frac{1}{2D}(D^2 + a_2^2 - a_1^2) \quad (59-4)$$

فاصله b را می‌توان از معادله (۴-۵۵) یا معادله (۴-۵۶) بدست آورد.

شکل جالب دیگر مسئله دو-سیمه، مسئله یک هادی خارج از مرکز در داخل یک تونل



شکل ۹-۴. منقطع عرضی دو سیم موازی با شعاعهای متفاوت

استوانه‌های هادی مطابق شکل ۴-۱۰ (الف) است. در اینجا، دو سطح هم‌پتانسیل در یک سمت یک جفت بار خطی مساوی و مختلف‌العلامه قرار دارند. این مطلب را در شکل ۴-۱۰ (ب) نشان داده‌ایم. علاوه بر معادلات (۴-۵۵) و (۴-۵۶) داریم

$$c_2 - c_1 = D \quad (4-60)$$

ترکیب معادلات (۴-۵۵)، (۴-۵۶) و (۴-۶۰) نتیجه می‌دهد

$$c_1 = \frac{1}{2D}(a_2^2 - a_1^2 - D^2) \quad (4-61)$$

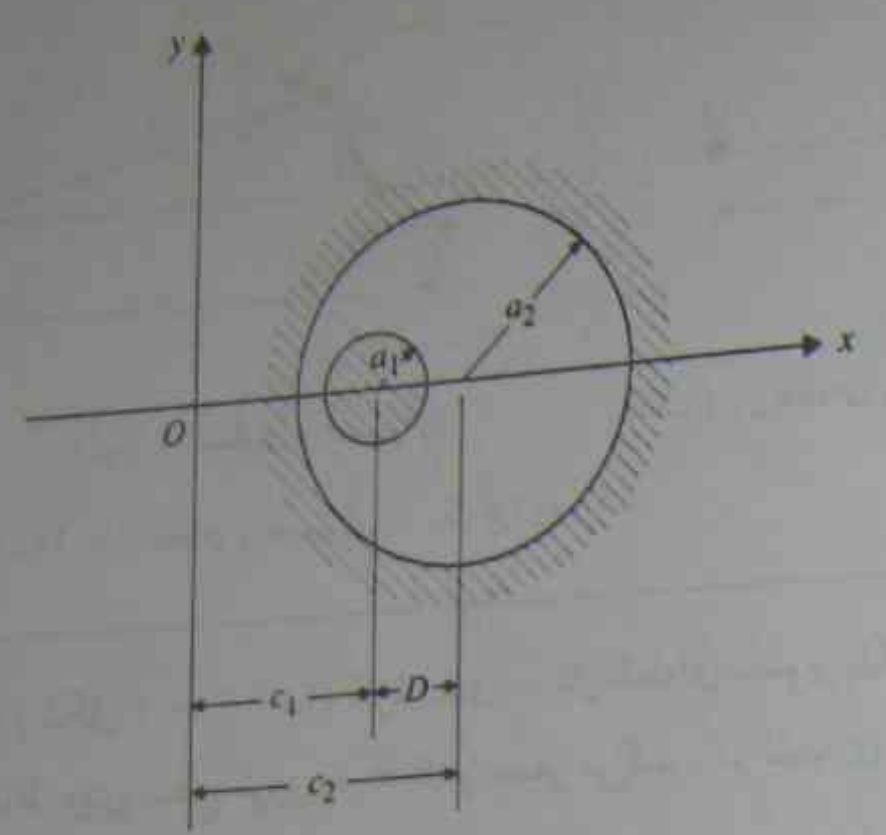
و

$$c_2 = \frac{1}{2D}(a_2^2 - a_1^2 + D^2) \quad (4-62)$$

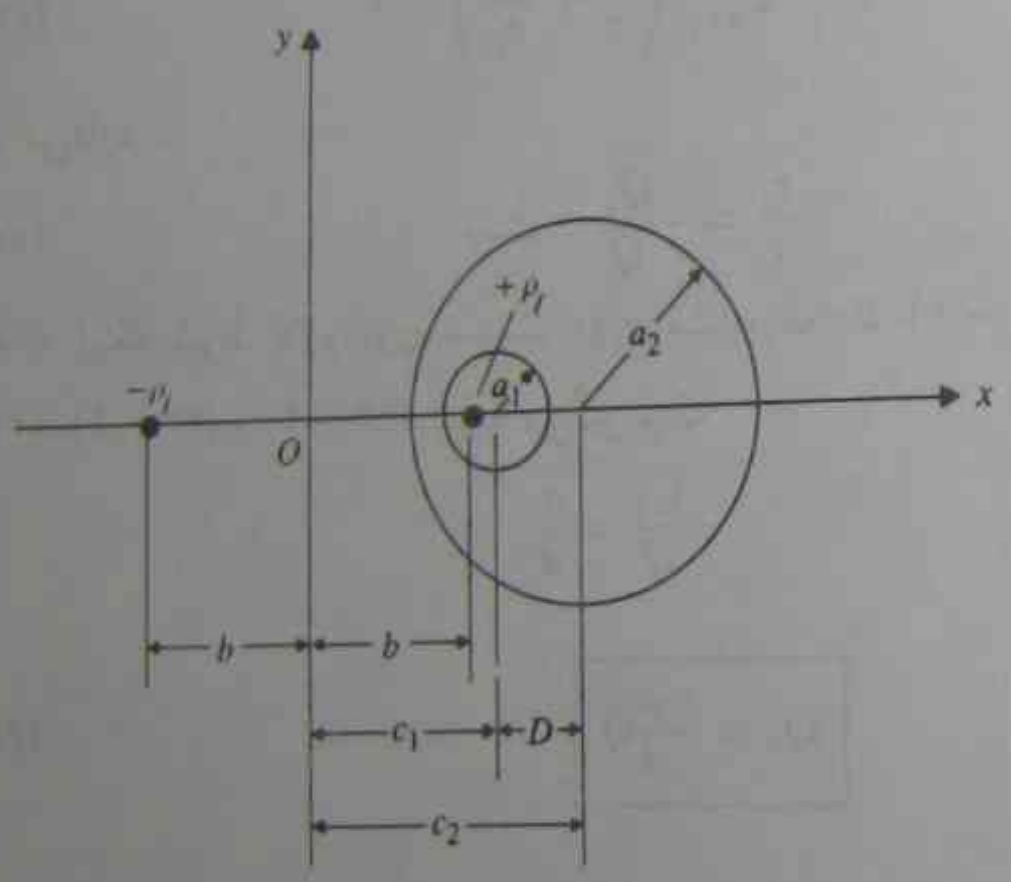
فاصله b را می‌توان از معادله (۴-۵۵) یا معادله (۴-۵۶) بدست آورد. با دانستن محل بارهای خطی معادل، تعیین توزیع پتانسیل و میدان الکتریکی و ظرفیت بین هادیها در واحد طول، سراسر خواهد بود (مسئله‌های م. ۴-۱۳ و م. ۴-۱۴).

۴-۴-۳ بار نقطه‌ای و کره هادی

برای حل مسئله الکتریسته ساکن یک بار نقطه‌ای در حضور هادی کره‌ای نیز می‌توان از روش تصاویر استفاده کرد. اکنون با مراجعه به شکل ۴-۱۱ (الف)، که در آن بار نقطه‌ای مثبت Q در فاصله d از مرکز یک کره هادی به شعاع a ($a < d$) قرار دارد، به تعیین V و E در نقاط خارج کره می‌پردازیم. به دلیل تقارن، انتظار داریم که بار تصویر Q_i ، یک بار نقطه‌ای منفی در درون



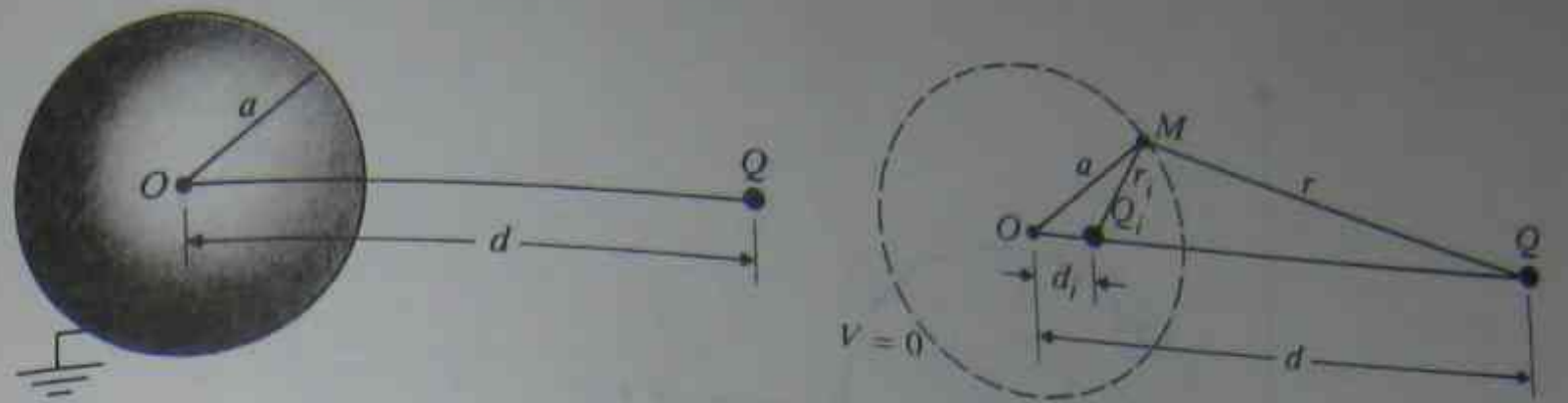
(الف) نمای منقطع عرضی



(ب) بارهای خطی معادل

شکل ۴-۱۰ یک هادی خارج از مرکز در داخل یک تونل استوانه‌ای

کره و روی خط واصل O و Q باشد. فاصله بار تصویر را تا O برابر d_i فرض کنید. واضح است که Q_i نمی‌تواند برابر $-Q$ باشد، زیرا $-Q$ و $+Q$ اصلی، سطح کره $R = a$ را طبق آنچه که لازم است، دارای پتانسیل صفر نمی‌کنند. (اگر $Q_i = -Q$ باشد، سطح پتانسیل صفر چه خواهد بود؟) بنابراین باید هر دوی d_i و Q_i را به عنوان مجهول در نظر بگیریم.



(الف) بار نقطه‌ای و کره هادی زمین شده

(ب) بار نقطه‌ای و تصویر آن

شکل ۴-۱۱ بار نقطه‌ای و تصویر آن در یک کره زمین شده

در شکل ۴-۱۱ (ب) کره هادی، با بار نقطه‌ای تصویر Q_i جایگزین شده است که پتانسیل تمام نقاط روی سطح کره $R = a$ را صفر می‌کند. در نقطه‌ای مثل M ، پتانسیل ناشی از Q و Q_i برابر است با

$$V_M = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{r} + \frac{Q_i}{r_i} \right) = 0 \quad (۴۳-۴)$$

که لازم می‌دارد

$$\frac{r_i}{r} = -\frac{Q_i}{Q} = \text{ثابت} \quad (۴۴-۴)$$

با توجه به اینکه شرط لازم روی نسبت r_i/r مشابه معادله (۴۱-۴) است، از معادلات (۴۲-۴)، (۴۳-۴) و (۴۴-۴) نتیجه می‌گیریم که

$$-\frac{Q_i}{Q} = \frac{a}{d}$$

یا

$$Q_i = -\frac{a}{d}Q \quad (۴۵-۴)$$

و

$$d_i = \frac{a^2}{d} \quad (۴۶-۴)$$

این دو نقطه Q_i ، نقطه معکوس Q نسبت به کره‌ای به شعاع a است. اکنون V و E در تمام نقاط زمین کره زمین شده از روی V و E ناشی از دو بار نقطه‌ای Q و $-aQ/d$ قابل محاسبه است.

مثال ۴-۵ بار نقطه‌ای Q در فاصله d از مرکز کره هادی زمین شده‌ای به شعاع a ($a < d$) قرار دارد. (الف) توزیع بار القاشده روی سطح کره، و (ب) کل بار القاشده روی کره را تعیین نمایید.

حل مسئله فیزیکی را در شکل ۴-۱۱ (الف) نشان داده‌ایم. مسئله را با استفاده از روش تصاویر حل می‌کنیم و کره باردار را با بار تصویر $Q_i = -aQ/d$ در فاصله $d_i = a^2/d$ از مرکز کره، مطابق شکل ۴-۱۲، جایگزین می‌نماییم. پتانسیل الکتریکی V در نقطه دلخواه $P(R, \theta)$ برابر است با

$$V(R, \theta) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_Q} - \frac{a}{dR_{Q_i}} \right) \quad (۴۷-۴)$$

که در آن، با توجه به قانون کسینوس‌ها،

$$R_Q = \left[R^2 + d^2 - 2Rd \cos \theta \right]^{1/2} \quad (۴۸-۴)$$

و

$$R_{Q_i} = \left[R^2 + \left(\frac{a^2}{d} \right)^2 - 2R \left(\frac{a^2}{d} \right) \cos \theta \right]^{1/2} \quad (۴۹-۴)$$

توجه داشته باشید که θ از خط OQ اندازه‌گیری می‌شود. مؤلفه R شدت میدان الکتریکی E_R برابر است با

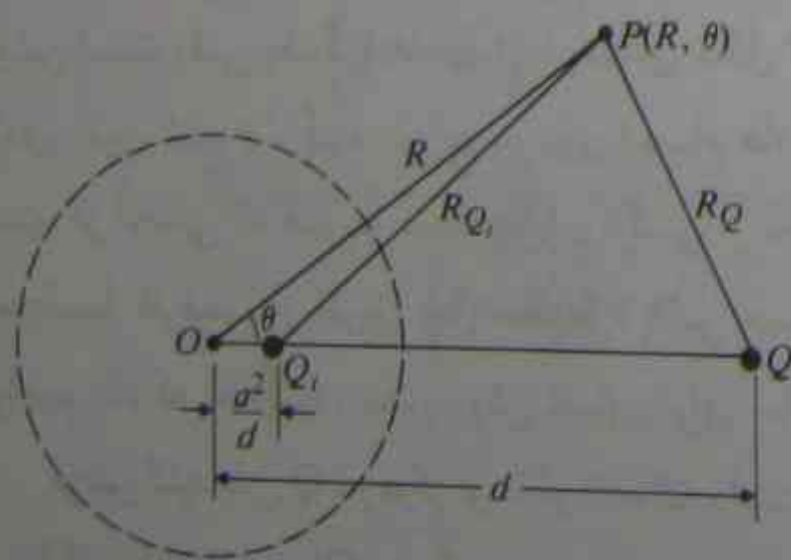
$$E_R(R, \theta) = -\frac{\partial V(R, \theta)}{\partial R} \quad (۷۰-۴)$$

با استفاده از معادله (۴۷-۴) در معادله (۷۰-۴) و با توجه به معادلات (۴۸-۴) و (۴۹-۴) داریم

$$E_R(R, \theta) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{R-d \cos \theta}{(R^2 + d^2 - 2Rd \cos \theta)^{3/2}} - \frac{a[R - (a^2/d) \cos \theta]}{d[R^2 + (a^2/d)^2 - 2R(a^2/d) \cos \theta]^{3/2}} \right\} \quad (۷۱-۴)$$

(الف) برای یافتن بار سطحی القاشده روی کره، در معادله (۷۱-۴) $R = a$ را قرار داده، محاسبه می‌کنیم

$$\rho_s = \epsilon_0 E_R(a, \theta) \quad (۷۲-۴)$$



شکل ۴-۱۲ نمودار محاسبه توزیع بار القاشده (مثال ۴-۵)

که پس از ساده شدن، عبارت زیر را نتیجه می دهد:

$$\rho_s = -\frac{Q(d^2 - a^2)}{4\pi a(a^2 + d^2 - 2ad \cos \theta)^{3/2}} \quad (۷۳-۴)$$

معادله (۷۳-۴) اظهار می دارد که بار سطحی القاشده منفی بوده، اندازه آن در $\theta = 0$ حداکثر و در $\theta = \pi$ حداقل است و همین هم انتظار می رفت.

(ب) کل بار القاشده روی کره با انتگرال گیری از ρ_s روی سطح کره بدست می آید. داریم

$$\begin{aligned} \text{کل بار القاشده} &= \oint \rho_s ds = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \rho_s a^2 \sin \theta d\theta d\phi \\ &= -\frac{a}{d} Q = Q_i \end{aligned} \quad (۷۴-۴)$$

توجه می کنیم که کل بار القاشده دقیقاً برابر بار تصویر Q_i است که جایگزین کره شده است. آیا می توانید این مطلب را توضیح دهید؟

اگر کره هادی از نظر الکتریکی خنثی بوده و زمین نشده باشد، تصویر بار نقطه ای Q در فاصله d از مرکز کره همچنان Q_i در فاصله d_i است که به ترتیب توسط معادلات (۴-۶۵) و (۴-۶۶) مشخص شده اند، تا اینکه سطح کره $R = a$ را هم پتانسیل نماید. اما بار نقطه ای اضافی دیگر

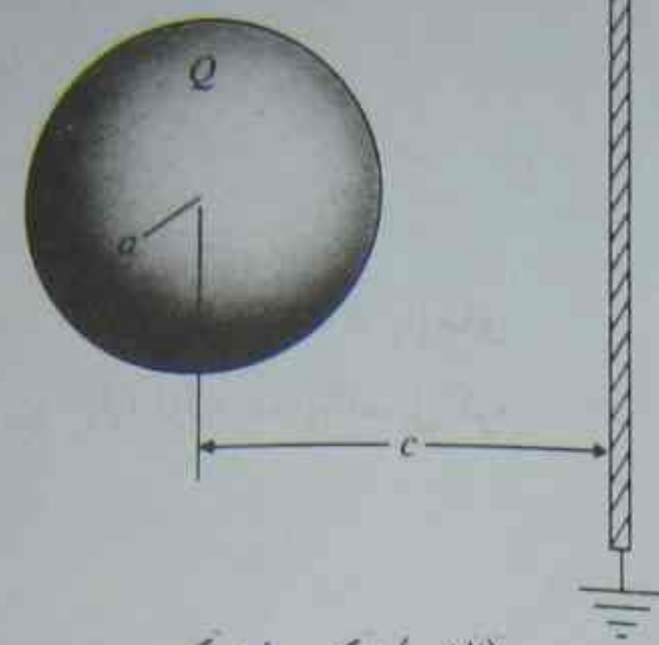
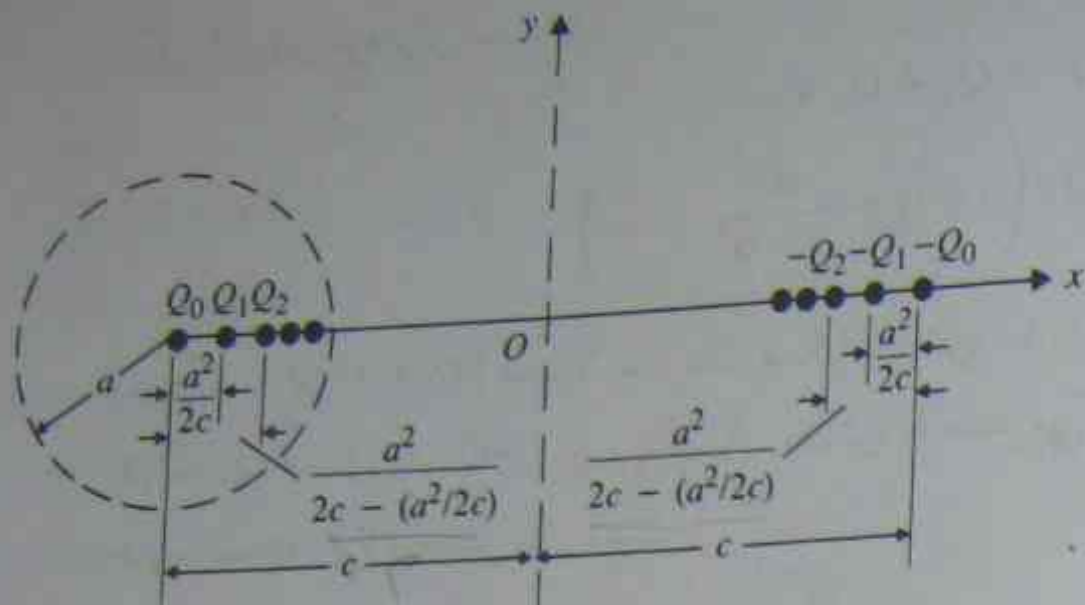
$$Q' = -Q_i = \frac{a}{d} Q \quad (۷۵-۴)$$

در مرکز مورد نیاز خواهد بود تا کل بار روی کره جایگزین شده را صفر نماید. آنگاه، مسئله الکتریسیته ساکن بار نقطه ای Q در حضور یک کره خنثی از نظر الکتریکی را، می توان به صورت مسئله ای با سه بار نقطه ای، Q' در $R=0$ ، Q_i در $R=a^2/d$ و Q در $R=d$ حل نمود.

۴-۴-۴ کره باردار و صفحه زمین شده

روشن است وقتی یک کره هادی باردار مطابق شکل ۴-۱۳ (الف) در نزدیکی یک صفحه بزرگ هادی زمین شده قرار گیرد، توزیع بار روی اجسام هادی و میدان الکتریکی بین آنها غیر یکنواخت است. از آنجائی که هندسه مسئله دارای ترکیبی از مختصات کره و کارتزین است، تعیین میدان و محاسبه ظرفیت از طریق حل معادله لاپلاس مسئله نسبتاً مشکلی خواهد بود. اکنون نشان خواهیم داد که بکارگیری مکرر روش تصاویر برای حل این مسئله می تواند بکار رود.

فرض کنید بار Q در مرکز کره قرار داده شده است. می خواهیم مجموعه ای از بارهای تصویری را پیدا کنیم که به همراه Q ، هم کره و هم صفحه را سطوح هم پتانسیل نمایند. در این صورت، مسئله کره باردار در نزدیکی صفحه زمین شده را می توان با مجموعه بسیار ساده تر بارهای نقطه ای



(الف) ترکیب فیزیکی

(ب) دو گروه از بارهای نقطه ای تصویر

شکل ۴-۱۳ کره باردار و صفحه هادی زمین شده

جایگزین نمود. یک مقطع عرضی در صفحه xy را در شکل ۴-۱۳ (ب) نشان داده ایم. وجود Q در $(-c, 0)$ لازم می دارد که بار تصویر $-Q$ در $(c, 0)$ قرار گیرد تا اینکه صفحه yz هم پتانسیل گردد؛ اما جفت بارهای Q و $-Q$ ویژگی هم پتانسیل بودن کره را از بین می برند، مگر اینکه مطابق معادلات (۴-۶۵) و (۴-۶۶)، بار تصویر $Q_1 = (a/2c)Q$ در $(-c + a^2/2c, 0)$ درون دایره خط چین قرار گیرد. این کار نیز به نوبه خود به بار تصویر $-Q_1$ برای هم پتانسیل ساختن صفحه yz نیاز دارد. این فرآیند بکارگیری متوالی روش تصاویر ادامه می یابد و دو گروه از بارهای نقطه ای تصویر بدست می آوریم: یک گروه $(-Q_1, -Q_2, \dots)$ در طرف راست محور y و گروه دیگر (Q_1, Q_2, \dots) درون کره. داریم

$$Q_1 = \left(\frac{a}{2c}\right) Q = \alpha Q. \quad (۴-۷۶ \text{ الف})$$

$$Q_2 = \frac{a}{\left(2c - \frac{a^2}{2c}\right)} Q_1 = \frac{\alpha^2}{1 - \alpha^2} Q. \quad (۴-۷۶ \text{ ب})$$

$$Q_r = \frac{a}{2c - \frac{a^2}{2c}} Q_r = \frac{\alpha^r}{(1 - \alpha) \left(1 - \frac{\alpha^r}{1 - \alpha^r}\right)} Q. \quad (۴-۷۶ \text{ پ})$$

که در آن

$$\alpha = \frac{a}{2c} \quad (۴-۷۷)$$

کل بار روی کره برابر است با

$$Q = Q_0 + Q_1 + Q_2 + \dots$$

$$= Q_0 \left(1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{1 - \alpha^2} + \dots \right) \quad (78-4)$$

سری معادله (78-4) معمولاً با سرعت همگرا می‌شود ($\alpha < 1/2$). اکنون چون جفت بارهای $(-Q_1, Q_1), (-Q_2, Q_2), \dots$ پتانسیل روی کره را صفر می‌کنند، تنها Q_0 اولیه در پتانسیل کره سهم است. این پتانسیل برابر است با

$$V_0 = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 a} \quad (79-4)$$

از این رو ظرفیت بین کره و صفحه هادی، از معادلات (78-4) و (79-4)، چنین است:

$$C = \frac{Q}{V_0} = 4\pi\epsilon_0 a \left(1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{1 - \alpha^2} + \dots \right) \quad (80-4)$$

که همانطور که انتظار می‌رفت از ظرفیت یک کره مجزا به شعاع a بزرگتر است. توزیع پتانسیل و میدان الکتریکی بین کره و صفحه هادی را می‌توان از روی بارهای نقطه‌ای تصویر بدست آورد.

۵-۴ مسائل مقدار مرزی در مختصات کارتزین

در بخش پیشین ملاحظه کردیم که روش تصاویر در حل انواع معینی از مسائل الکتریسته ساکن که شامل بار آزاد در نزدیکی مرزهای هادی با شکل هندسی ساده هستند، بسیار مفید است. اما اگر مسئله شامل دسته‌ای از هادیهای نگه‌داشته شده در پتانسیل مشخص و بدون بار آزاد مجزا شده باشد، با روش تصاویر قابل حل نخواهد بود. این نوع مسائل به حل معادله لاپلاس نیاز دارند. مثال ۴-۱ (صفحه ۱۸۵) یکی از این نوع مسائل است که در آن پتانسیل الکتریکی تنها تابعی از یکی از مختصات می‌باشد. البته معادله لاپلاس اعمال شده در حالت سه بعدی، یک معادله دیفرانسیل پاره‌ای است که به طور کلی پتانسیل در آن تابعی از هر سه مختصات است. اکنون روشی را برای حل مسائل سه بعدی، که مرزهای آنها بر سطوح مختصاتی یک دستگاه مختصات منحنی الخط متعامد منطبق هستند و روی مرزهای آن پتانسیل یا مشتقات عمودی آن مشخص گردیده‌اند، بنا می‌گذاریم. در چنین مواردی، جواب می‌تواند به صورت حاصلضرب سه تابع یک بعدی، که هر یک جداگانه تنها به یک متغیر مختصاتی وابسته هستند، بیان گردد. این روش کار را روش جداسازی متغیرها گویند.

مسائلی را (الکترومغناطیسی یا نوع دیگر) که از معادلات دیفرانسیل پاره‌ای با شرایط مرزی

۵-۴ مسائل مقدار مرزی در مختصات کارتزین

مشخص تبعیت می‌کنند، مسائل مقدار مرزی می‌گویند. مسائل مقدار مرزی در توابع پتانسیل به سه نوع طبقه‌بندی می‌شوند: (۱) مسائل دیریشله^۱، که در آنها مقدار پتانسیل در تمام نقاط مرزها مشخص شده است؛ (۲) مسائل نوبین^۲، که در آنها مشتق عمودی پتانسیل در تمام نقاط مرزها مشخص شده است؛ (۳) مسائل مقدار مرزی ترکیبی^۳، که در آنها پتانسیل در بعضی نقاط مرزها و مشتق عمودی پتانسیل در بقیه نقاط مشخص شده است. شرایط مرزی مشخص شده متفاوت به انتخاب توابع پتانسیل مختلف نیاز دارند، اما روش حل این نوع مسائل - یعنی به روش جداسازی متغیرها - در هر سه نوع مسائل، مشابه است. جوابهای معادله لاپلاس را اغلب توابع هارمونیک^۴ می‌نامند.

معادله لاپلاس در مورد پتانسیل الکتریکی عددی V ، در مختصات کارتزین عبارت است از

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad (81-4)$$

برای بکارگیری روش جداسازی متغیرها فرض می‌کنیم که جواب $V(x, y, z)$ می‌تواند به صورت حاصلضرب زیر بیان شود:

$$V(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z) \quad (82-4)$$

که در آن، $X(x)$ ، $Y(y)$ و $Z(z)$ به ترتیب، فقط تابعی از x ، y و z هستند. با جاگذاری معادله (82-4) در معادله (81-4) نتیجه می‌دهد

$$Y(y)Z(z) \frac{d^2 X(x)}{dx^2} + X(x)Z(z) \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} + X(x)Y(y) \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} = 0$$

و پس از اینکه بر حاصلضرب $X(x)Y(y)Z(z)$ تقسیم شود، بدست می‌دهد،

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} + \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} + \frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} = 0 \quad (83-4)$$

دقت کنید که هر کدام از سه جمله طرف چپ معادله (83-4) تنها تابعی از یک متغیر مختصاتی است و فقط مشتقات معمولی مطرح هستند. برای اینکه معادله (83-4)، به ازای تمام مقادیر x ، y و z برقرار باشد، هر سه جمله باید ثابت باشند. برای مثال اگر از معادله (83-4) نسبت به x مشتق بگیریم، خواهیم داشت:

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} \right] = 0 \quad (84-4)$$

۱- Dirichlet problems

۲- Neumann problems

۳- Mixed boundary-value problems

۴- Harmonic functions

جدول ۱-۴
جوابهای ممکن $X''(x) + k_x^2 X(x) = 0$

k_x^2	k_x	$X(x)$	صورت‌های نمایی $X(x)$
۰	۰	$A_1 x + B_1$	
+	k	$A_1 \sin kx + B_1 \cos kx$	$C_1 e^{jkx} + D_1 e^{-jkx}$
-	jk	$A_1 \sinh kx + B_1 \cosh kx$	$C_1 e^{kx} + D_1 e^{-kx}$

† صورت‌های نمایی $X(x)$ توسط فرمول‌های زیر به صورت‌های مثلثاتی و هذلولی درج‌شده در ستون سوم مربوط می‌شوند:

$$e^{\mp jkx} = \cos kx \mp j \sin kx, \quad \cos kx = \frac{1}{2} (e^{jkx} + e^{-jkx}), \quad \sin kx = \frac{1}{2j} (e^{jkx} - e^{-jkx})$$

$$e^{\mp kx} = \cosh kx \mp \sinh kx, \quad \cosh kx = \frac{1}{2} (e^{kx} + e^{-kx}), \quad \sinh kx = \frac{1}{2} (e^{kx} - e^{-kx})$$

زیرا دو جمله دیگر مستقل از x هستند. معادله (۸۴-۴) لازم می‌دارد که

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} = -k_x^2 \quad (۸۵-۴)$$

که در آن k_x^2 ثابت انتگرال‌گیری است و باید از شرایط مرزی مسئله تعیین شود. علامت منفی سمت راست معادله (۸۵-۴) درست مانند علامت توان دوم روی k_x ، اختیاری است. ثابت جداسازی k_x می‌تواند یک عدد حقیقی یا موهومی باشد. اگر k_x موهومی باشد، k_x^2 یک عدد حقیقی منفی و $-k_x^2$ یک عدد حقیقی مثبت خواهد بود. راحت‌تر است معادله (۸۵-۴) را به صورت

$$\frac{d^2 X(x)}{dx^2} + k_x^2 X(x) = 0 \quad (۸۶-۴)$$

بنویسیم، به طریق مشابه، داریم

$$\frac{d^2 Y(y)}{dy^2} + k_y^2 Y(y) = 0 \quad (۸۷-۴)$$

و

$$\frac{d^2 Z(z)}{dz^2} + k_z^2 Z(z) = 0 \quad (۸۸-۴)$$

که در آنها، ثابت‌های جداسازی k_y و k_z ، در حالت کلی متفاوت با k_x هستند؛ اما به دلیل معادله (۸۳-۴)، شرط زیر باید برقرار باشد:

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 0 \quad (۸۹-۴)$$

۴-۵ مسائل مقدار مرزی در مختصات کارتزین

مسئله ما اکنون به یافتن جوابهای مناسب $X(x)$ ، $Y(y)$ و $Z(z)$ به ترتیب از روی معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم، (۸۶-۴)، (۸۷-۴) و (۸۸-۴)، خلاصه شده است. جوابهای ممکن معادله (۸۶-۴) با استفاده از مطالعه معادلات دیفرانسیل معمولی با ضرایب ثابت، معلوم هستند. این جوابها را در جدول ۱-۴ درج کرده‌ایم. اینکه جوابهای درج‌شده در معادله (۸۶-۴) صدق می‌کنند، با جاگذاری مستقیم باسانی قابل تحقیق است.

از جوابهای درج‌شده در جدول ۱-۴، اولین جواب، $A_1 x + B_1$ ، به ازای $k_x = 0$ ، خطی مستقیم با شیب A_1 و عرض از مبدأ B_1 در $x = 0$ است. وقتی $A_1 = 0$ است، $X(x) = B_1$ و بدین معنی است که V ، جواب معادله لاپلاس، مستقل از بعد x است.

البته ما با توابع سینوسی و کسینوسی آشنا هستیم که هر دوی آنها متناوب با دوره تناوب 2π هستند. $\sin kx$ و $\cos kx$ در صورتی که بر حسب x رسم شوند، دارای دوره تناوب $2\pi/k$ می‌باشند. غالباً بررسی دقیق یک مسئله ما را قادر می‌سازد که تصمیم بگیریم آیا یک تابع سینوسی یا کسینوسی انتخاب مناسب است یا نه. برای مثال، اگر جواب باید در $x = 0$ صفر شود، $\sin kx$ باید انتخاب شود؛ از سوی دیگر اگر انتظار می‌رود که جواب نسبت به $x = 0$ متقارن باشد، آنگاه $\cos kx$ انتخاب صحیح است. در حالت کلی، هر دو جمله مورد نیاز هستند. گاهی بهتر است، $A_1 \sin kx + B_1 \cos kx$ را به صورت $A_2 \sin(kx + \psi_2)$ یا $A_3 \cos(kx + \psi_3)$ بنویسیم. †

به ازای $k_x = jk$ ، جواب به توابع هذلولی تبدیل می‌شود:

$$\sin jkx = -j \sinh kx$$

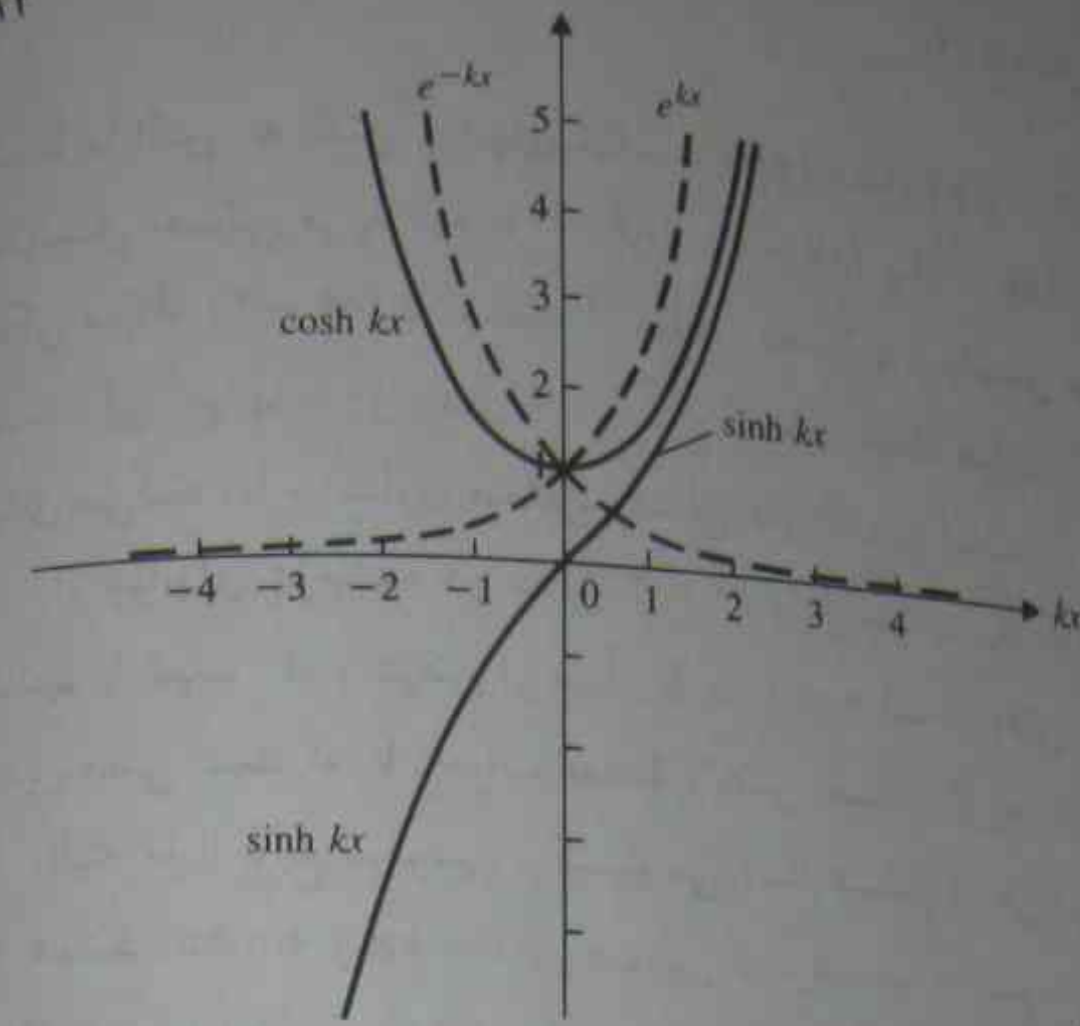
و

$$\cos jkx = \cosh kx$$

توابع هذلولی، ترکیب توابع نمایی با توانهای حقیقی بوده و غیرمتناوب هستند. این توابع را در شکل ۴-۱۴ به منظور مراجعه آسان ترسیم نموده‌ایم. مشخصات مهم $\sinh kx$ عبارتند از اینکه تابعی فرد از x است و با میل نمودن x به سوی $\pm \infty$ ، مقدار آن به سوی $\pm \infty$ میل می‌کند. تابع $\cosh kx$ تابعی زوج از x بوده، در $x = 0$ برابر واحد و با میل نمودن x به سوی $+\infty$ یا $-\infty$ ، به سوی $+\infty$ میل می‌نماید.

شرایط مرزی مشخص شده، انتخاب شکل مناسب جواب و ثابت‌های A و B یا C و D را تعیین خواهند نمود. جوابهای معادلات (۸۷-۴) و (۸۸-۴) در مورد $Y(y)$ و $Z(z)$ نیز کاملاً

† $A_2 \sin(kx + \psi_2) = (A_2 \cos \psi_2) \sin kx + (A_2 \sin \psi_2) \cos kx$; $A_1 = A_2 \cos \psi_2$, $B_1 = A_2 \sin \psi_2$; $A_3 = (A_1^2 + B_1^2)^{1/2}$, $\psi_3 = \tan^{-1}(B_1/A_1)$. $A_3 \cos(kx + \psi_3) = (-A_3 \sin \psi_3) \sin kx + (A_3 \cos \psi_3) \cos kx$; $A_1 = -A_3 \sin \psi_3$, $B_1 = A_3 \cos \psi_3$; $A_2 = (A_1^2 + B_1^2)^{1/2}$, $\psi_2 = \tan^{-1}(A_1/B_1)$.



شکل ۱۴-۴ توابع هذلولی و نمایی

مشابه هستند.

مثال ۶-۴ دو الکترود صفحه‌ای موازی نیمه بینهایت، در فاصله b از یکدیگر قرار دارند. الکترود سومی عمود بر هر دو و مجزاشده از آنها در پتانسیل ثابت V_0 نگه داشته می‌شود (شکل ۱۵-۴). توزیع پتانسیل در ناحیه محصور توسط الکترودها را تعیین کنید.

حل با مراجعه به مختصات شکل ۱۵-۴، شرایط مرزی تابع پتانسیل $V(x, y, z)$ را به صورت زیر می‌نویسیم:

درحالی که V مستقل از z است:

$$V(x, y, z) = V(x, y) \quad (الف \ ۹۰-۴)$$

در جهت x :

$$V(0, y) = V_0 \quad (ب \ ۹۰-۴)$$

$$V(\infty, y) = 0 \quad (پ \ ۹۰-۴)$$

در جهت y :

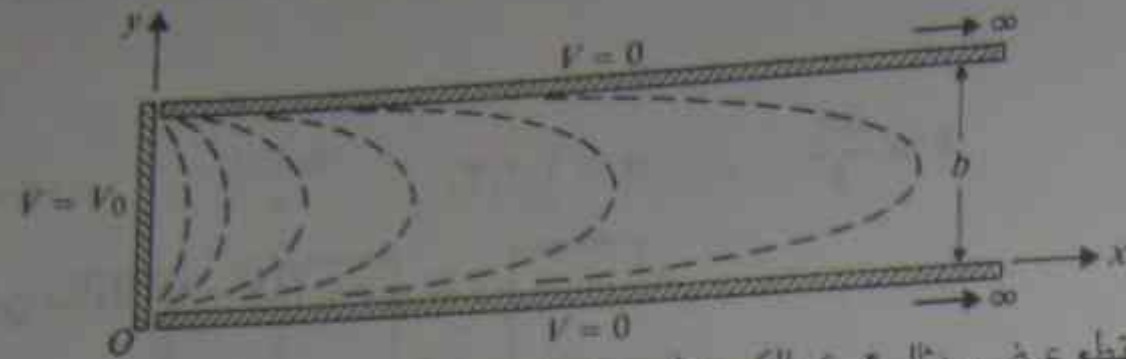
$$V(x, 0) = 0 \quad (ت \ ۹۰-۴)$$

$$V(x, b) = 0 \quad (ث \ ۹۰-۴)$$

شرط (الف ۹۰-۴) ایجاب می‌کند که $k_z = 0$ و از جدول ۱-۴،

$$Z(z) = B,$$

۴-۵ مسائل مقدار مرزی در مختصات کارتزین



شکل ۱۵-۴ شکل مقطع عرضی مثال ۶-۴، الکترودهای صفحه‌ای در جهت z بینهایت هستند.

ثابت A ، صفر می‌شود، زیرا Z مستقل از z است. از معادله (۸۹-۴) داریم

$$k_y^2 = -k_x^2 = k^2 \quad (۹۲-۴)$$

که در آن، یک عدد حقیقی است. این انتخاب k ایجاب می‌کند که k_x موهومی و k_y حقیقی باشد. استفاده از $k_x = iz$ به همراه شرط معادله (۹۰-۴) ب) لازم می‌دارد که صورت نمایی کاهش‌ی برای $X(x)$ انتخاب شود، یعنی

$$X(x) = D_1 e^{-kx} \quad (۹۳-۴)$$

در جهت y ، $k_y = k$ ، شرط (۹۰-۴) ت) نشان می‌دهد که انتخاب مناسب $Y(y)$ از جدول ۱-۴ برابر است با

$$Y(y) = A_1 \sin ky \quad (۹۴-۴)$$

با ترکیب جوابهای داده شده توسط معادلات (۹۱-۴)، (۹۳-۴) و (۹۴-۴) در معادله (۸۲-۴)، جواب مناسب را به صورت زیر بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} V_n(x, y) &= (B_n D_1 A_1) e^{-kx} \sin ky \\ &= C_n e^{-kx} \sin ky \end{aligned} \quad (۹۵-۴)$$

که در آن، ثابت اختیاری C_n به جای حاصلضرب $B_n D_1 A_1$ نوشته شده است.

اکنون، از پنج شرط مرزی درج شده در معادلات (الف ۹۰-۴) تا (ث ۹۰-۴)، شرایط (الف ۹۰-۴)، (ب ۹۰-۴) و (پ ۹۰-۴) مورد استفاده قرار گرفته‌اند. برای برقراری شرط (ث ۹۰-۴)، لازم است

$$V_n(x, b) = C_n e^{-kx} \sin kb = 0 \quad (۹۶-۴)$$

که فقط در صورتی به ازای تمام مقادیر x می‌تواند برقرار باشد که

$$\sin kb = 0$$

یا

$$kb = n\pi$$

یا

$$k = \frac{n\pi}{b}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (۹۷-۴)$$

بنابراین معادله (۹۵-۴) به صورت زیر در می آید

$$V_n(x, y) = C_n e^{-n\pi x/b} \sin \frac{n\pi}{b} y \quad (۹۸-۴)$$

سؤال: چرا صفر و مقادیر صحیح منفی n در معادله (۹۷-۴) بکار نرفته اند؟

با جاگذاری مستقیم، بسادگی ثابت می شود که $V_n(x, y)$ در معادله (۹۸-۴)، معادله لاپلاس (۸۱-۴) را برآورده می سازد. اما $V_n(x, y)$ به تنهایی نمی تواند شرط مرزی باقیمانده (۹۰-۴) ب) را در $x=0$ ، به ازای تمام مقادیر y از 0 تا b برآورده سازد. چون معادله لاپلاس یک معادله دیفرانسیل خطی است، مجموعی (جمع آثار) از $V_n(x, y)$ به صورت معادله (۹۸-۴) با مقادیر متفاوت n نیز یک جواب است. در $x=0$ ، می نویسیم

$$V(0, y) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(0, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi}{b} y \quad (۹۹-۴)$$

$$= V_0 \quad 0 < y < b$$

معادله (۹۹-۴)، اساساً یک بسط سری فوریه موج مستطیلی متناوب در $x=0$ ، نشان داده شده در شکل ۱۶-۴ است که در فاصله $0 < y < b$ دارای مقدار ثابتی است.

برای محاسبه ضرایب C_n ، دو طرف معادله (۹۹-۴) را در $\sin \frac{m\pi}{b} y$ ضرب و از حاصلضرب در فاصله $y=0$ تا $y=b$ انتگرال می گیریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^b C_n \sin \frac{n\pi}{b} y \sin \frac{m\pi}{b} y dy = \int_0^b V_0 \sin \frac{m\pi}{b} y dy \quad (۱۰۰-۴)$$

انتگرال سمت راست معادله (۱۰۰-۴) بسادگی محاسبه می شود:

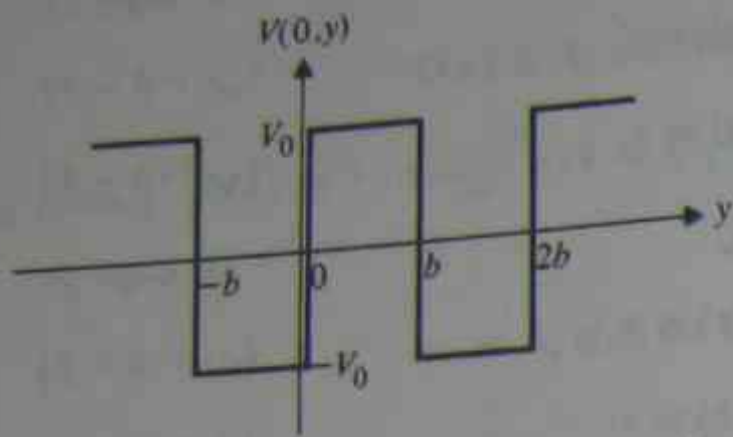
$$\int_0^b V_0 \sin \frac{m\pi}{b} y dy = \begin{cases} \frac{2bV_0}{m\pi} & \text{اگر } m \text{ فرد باشد} \\ 0 & \text{اگر } m \text{ زوج باشد} \end{cases} \quad (۱۰۱-۴)$$

هر انتگرال سمت چپ معادله (۱۰۰-۴) برابر است با

$$\int_0^b C_n \sin \frac{n\pi}{b} y \sin \frac{m\pi}{b} y dy = \frac{C_n}{2} \int_0^b \left[\cos \frac{(n-m)\pi}{b} y - \cos \frac{(n+m)\pi}{b} y \right] dy$$

$$= \begin{cases} \frac{C_n b}{2} & \text{اگر } m = n \\ 0 & \text{اگر } m \neq n \end{cases} \quad (۱۰۲-۴)$$

۴-۵ مسائل مقدار مرزی در مختصات کارتزین



شکل ۱۶-۴ بسط سری فوریه شرط مرزی در $x=0$ (مثال ۴-۶)

جاگذاری معادلات (۱۰۱-۴) و (۱۰۲-۴) در معادله (۱۰۰-۴) بدست می دهد

$$C_n = \begin{cases} \frac{4V_0}{n\pi} & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \\ 0 & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \end{cases} \quad (۱۰۳-۴)$$

در نتیجه، توزیع پتانسیل مورد نظر، جمع $V_n(x, y)$ ها در معادله (۹۸-۴) است.

$$V(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-n\pi x/b} \sin \frac{n\pi}{b} y$$

$$= \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-n\pi x/b} \sin \frac{n\pi}{b} y \quad (۱۰۴-۴)$$

$$n = 1, 3, 5, \dots$$

$$x > 0 \quad \text{و} \quad 0 < y < b$$

معادله (۱۰۴-۴) برای رسم دوبعدی، عبارت نسبتاً پیچیده ای است؛ اما چون دامنه جملات سینوسی موجود در سری با افزایش n بسیار سریع کاهش می یابد، تنها چند جمله اول برای حصول یک تقریب خوب کافی هستند. چند خط هم پتانسیل را در شکل ۱۵-۴ ترسیم کرده ایم. —

مثال ۷-۴ ناحیه ای را در نظر بگیرید که از سه طرف توسط صفحات هادی زمین شده شکل ۱۷-۴ محصور شده است. صفحه انتهائی سمت چپ که از زمین مجزا شده دارای پتانسیل ثابت V_0 است. تمام صفحات در جهت z ، بینهایت طولی فرض می شوند. توزیع پتانسیل را در درون این ناحیه تعیین کنید.

حل شرایط مرزی تابع پتانسیل $V(x, y, z)$ عبارتند از

درحالی که V مستقل از z است:

$$V(x, y, z) = V(x, y) \quad (۱۰۵-۴ \text{ الف})$$

در جهت x :

$$V(0, y) = V_0 \quad (۴-۱۰۵ \text{ ب})$$

$$V(a, y) = 0 \quad (۴-۱۰۵ \text{ پ})$$

در جهت y :

$$V(x, 0) = 0 \quad (۴-۱۰۵ \text{ ت})$$

$$V(x, b) = 0 \quad (۴-۱۰۵ \text{ ث})$$

شرط (۴-۱۰۵ الف) ایجاب می‌کند که $k_x = 0$ و از جدول ۴-۱،
 $Z(z) = B_1$ (۴-۱۰۶)

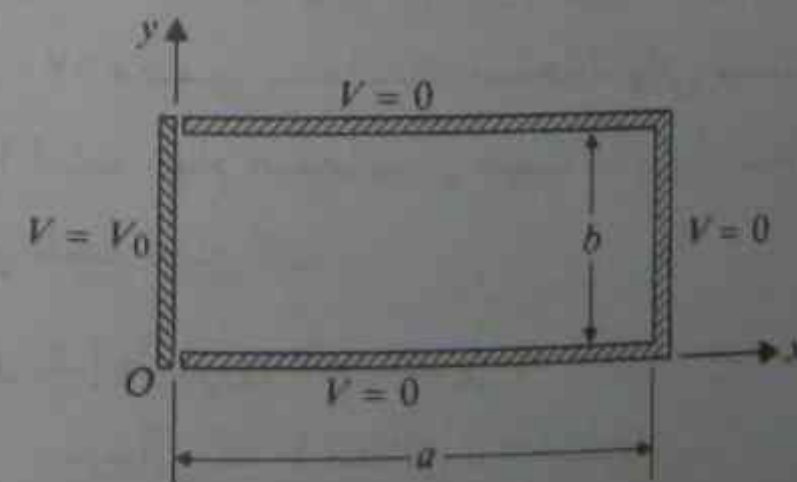
در نتیجه، معادله (۴-۸۱) به صورت زیر ساده می‌شود
 $k_y^2 = -k_x^2 = k^2$ (۴-۱۰۷)

که همان معادله (۴-۹۲) در مثال ۴-۶ است.

شرایط مرزی در جهت y ، معادلات (۴-۱۰۵ ت) و معادله (۴-۱۰۵ ث)، همان شرایط مشخص شده توسط معادلات (۴-۹۰ ت) و (۴-۹۰ ث) هستند. برای اینکه به‌ازای تمام مقادیر x بین 0 و a ، $V(x, 0) = 0$ باشد، $Y(0) = 0$ باید صفر باشد و مثل معادله (۴-۹۴) داریم

$$Y(y) = A_1 \sin ky \quad (۴-۱۰۸)$$

اما $X(x)$ داده شده توسط معادله (۴-۹۳) به روشنی در اینجا یک جواب بشمار نمی‌آید، زیرا شرط مرزی (۴-۱۰۵ پ) را برآورده نمی‌سازد. در این صورت، راحت‌تر است شکل کلی $k_x = kz$ داده شده در ستون سوم جدول ۴-۱ را مورد استفاده قرار دهیم. (شکل نمائی جواب داده شده در ستون آخر نیز می‌توانست بکار رود، اما کار چندان راحت نخواهد بود زیرا ملاحظه شرایطی که تحت آن، جمع دو جمله نمائی در $x = a$ صفر شوند، بسادگی صفرکردن جمله \sinh نیست. این



شکل ۴-۱۷. شکل مقطع عرضی مثال ۴-۷

مطلب هم‌اکنون روشن خواهد شد. (داریم

$$X(x) = A_1 \sinh kx + B_1 \cosh kx \quad (۴-۱۰۹)$$

به دلیل شرط مرزی در معادله (۴-۱۰۵ پ) که لازم می‌دارد $X(a) = 0$ ، رابطه‌ای بین ثابت‌های اختیاری A_1 و B_1 وجود دارد؛ یعنی،

$$0 = A_1 \sinh ka + B_1 \cosh ka$$

یا

$$B_1 = -A_1 \frac{\sinh ka}{\cosh ka}$$

از معادله (۴-۱۰۹) داریم

$$X(x) = A_1 \left[\sinh kx - \frac{\sinh ka}{\cosh ka} \cosh kx \right]$$

$$= \frac{A_1}{\cosh ka} [\cosh ka \sinh kx - \sinh ka \cosh kx] \quad (۴-۱۱۰)$$

$$= A_1 \sinh k(x-a)$$

که در آن A_1 به جای $A_1 / \cosh ka$ نوشته شده است. واضح است که معادله (۴-۱۱۰)، شرط $X(a) = 0$ را برآورده می‌کند. از روی تجربه باید می‌توانستیم جواب معادله (۴-۱۱۰) را، بدون مراحل‌ی که منجر به آن گردید، مستقیماً بنویسیم، زیرا فقط یک انتقال آرگومان در تابع \sinh لازم است تا باعث شود، مقدار آن در $x = a$ صفر گردد.

با گردآوری معادلات (۴-۱۰۶)، (۴-۱۰۸)، (۴-۱۰۸) و (۴-۱۱۰)، جواب را به صورت حاصلضرب مناسب زیر بدست می‌آوریم

$$V_n(x, y) = B_n A_1 A_2 \sinh k(x-a) \sin ky$$

$$= C'_n \sinh \frac{n\pi}{b}(x-a) \sin \frac{n\pi}{b}y, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (۴-۱۱۱)$$

که در آن $C'_n = B_n A_1 A_2$ و k برابر $n\pi/b$ قرار داده شده تا شرط مرزی (۴-۱۰۵ ث) برآورده شود.

اکنون تمام شرایط مرزی، بجز معادله (۴-۱۰۵ پ) را که ممکن است با بسط سری فوریه $V(0, y) = V_0$ روی فاصله $y = 0$ تا $y = b$ برآورده شود، مورد استفاده قرار داده‌ایم. داریم

$$V_0 = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(0, y) = - \sum_{n=1}^{\infty} C'_n \sinh \frac{n\pi}{b}a \sin \frac{n\pi}{b}y \quad 0 < y < b \quad (۴-۱۱۲)$$

توجه می‌کنیم که معادله (۴-۱۱۲) شکلی مشابه معادله (۴-۹۹) دارد، بجز اینکه C_n با $-C'_n \sinh(n\pi a/b)$ جایگزین شده است. آنگاه مقادیر ضرایب C'_n از معادله (۴-۱۰۳) قابل

نوشتن هستند:

$$C'_n = \begin{cases} -\frac{4V_0}{n\pi \sinh(n\pi a/b)} & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \\ 0 & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \end{cases} \quad (113-4)$$

توزیع پتانسیل مورد نظر در درون ناحیه محصور شکل ۴-۱۷، یک جمع بندی روی $V_n(x, y)$ در معادله (۱۱۱-۴) می باشد:

$$V(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C'_n \sinh \frac{n\pi}{b}(x-a) \sin \frac{n\pi}{b}y$$

$$= \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n=\text{فرد}}^{\infty} \frac{\sinh[n\pi(a-x)/b]}{n \sinh(n\pi a/b)} \sin \frac{n\pi}{b}y \quad (114-4)$$

$$n = 1, 3, 5, \dots$$

$$0 < x < a \quad \text{و} \quad 0 < y < b$$

توزیع میدان الکتریکی درون ناحیه محصور از رابطه زیر بدست می آید

$$E(x, y) = -\nabla V(x, y)$$

۴-۶ مسائل مقدار مرزی در مختصات استوانه‌ای

در مسائل با مرزهای استوانه‌ای مدور، معادلات حاکم را در دستگاه مختصات استوانه‌ای می نویسیم. از معادله (۴-۸)، معادله لاپلاس در مورد پتانسیل الکتریکی عددی V ، در مختصات استوانه‌ای برابر است با

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad (115-4)$$

جواب کلی معادله (۴-۱۱۵)، به اطلاعاتی در مورد توابع بسل^۱، که بحث آن تا فصل ۱۰ به تعویق خواهد افتاد، نیاز دارد. در وضعیت‌هایی که بُعد طولی در هندسه استوانه‌ای در مقایسه با شعاع بزرگ است، کمیات میدانی متناظر را می توان به طور تقریبی مستقل از z در نظر گرفت. در چنین مواردی، $\partial^2 V / \partial z^2 = 0$ و معادله (۴-۱۱۵) معادله حاکم بر یک مسئله دوبعدی می شود:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0 \quad (116-4)$$

^۱ Bessel functions

۴-۶ مسائل مقدار مرزی در مختصات استوانه‌ای

روش جداسازی متغیرها را بکار گرفته، جواب را به صورت حاصلضرب فرض می کنیم

$$V(r, \phi) = R(r)\Phi(\phi) \quad (117-4)$$

که در آن $R(r)$ و $\Phi(\phi)$ به ترتیب، فقط توابعی از r و ϕ هستند. جاگذاری جواب (۴-۱۱۷) در معادله (۴-۱۱۶) و تقسیم بر $R(r)\Phi(\phi)$ ، نتیجه می دهد

$$\frac{r}{R(r)} \frac{d}{dr} \left[r \frac{dR(r)}{dr} \right] + \frac{1}{\Phi(\phi)} \frac{d^2 \Phi(\phi)}{d\phi^2} = 0 \quad (118-4)$$

در معادله (۴-۱۱۸)، نخستین جمله سمت چپ تنها تابعی از r و جمله دوم فقط تابعی از ϕ است. (توجه کنید که مشتقات معمولی جایگزین مشتقات پارهای شده اند.) برای برقراری معادله (۴-۱۱۸) به ازای تمام مقادیر r و ϕ ، هر جمله باید ثابت و برابر منفی جمله دیگر باشد. داریم

$$\frac{r}{R(r)} \frac{d}{dr} \left[r \frac{dR(r)}{dr} \right] = k^2 \quad (119-4)$$

و

$$\frac{1}{\Phi(\phi)} \frac{d^2 \Phi(\phi)}{d\phi^2} = -k^2 \quad (120-4)$$

که در آن k ثابت جداسازی است.

معادله (۴-۱۲۰) می تواند به صورت زیر بازنویسی شود

$$\frac{d^2 \Phi(\phi)}{d\phi^2} + k^2 \Phi(\phi) = 0 \quad (121-4)$$

این به همان شکل معادله (۴-۸۶) بوده، و جواب آن یکی از جوابهای درج شده در جدول ۴-۱ است. در شکل بندی های استوانه‌ای مدور، توابع پتانسیل و بنابراین، نسبت به ϕ متناوب بوده و توابع هذلولوی بکار نمی روند. در واقع اگر دامنه ϕ محدود نشده باشد، k باید عدد صحیح باشد. گیریم k برابر n باشد. جواب مناسب برابر خواهد بود با

$$\Phi(\phi) = A_\phi \sin n\phi + B_\phi \cos n\phi \quad (122-4)$$

که A_ϕ و B_ϕ در آن ثابت های اختیاری هستند.

اکنون توجه خود را به معادله (۴-۱۱۹) معطوف می داریم که می تواند به صورت زیر بازنویسی شود

$$r^2 \frac{d^2 R(r)}{dr^2} + r \frac{dR(r)}{dr} - n^2 R(r) = 0 \quad (123-4)$$

که در آن، عدد صحیح n به جای k نوشته شده است و اشاره بر دامنه تغییرات ϕ به اندازه 2π دارد. جواب معادله (۴-۱۲۳) برابر است با

$$R(r) = A_r r^n + B_r r^{-n} \quad (124-4)$$

و می‌تواند با جاگذاری مستقیم تحقیق شود. با در نظر گرفتن ضرب جوابهای (۴-۱۲۲) و (۴-۱۲۴)، جواب کلی معادله لابلاس مستقل از z (۴-۱۱۶) را در نواحی بدون محدودیت ϕ از مختصات استوانه‌ای بدست می‌دهد:

$$V_n(r, \phi) = r^n (A_n \sin n\phi + B_n \cos n\phi) + r^{-n} (A'_n \sin n\phi + B'_n \cos n\phi), \quad n \neq 0 \quad (4-125)$$

بسته به شرایط مرزی، جواب کامل مسئله می‌تواند حاصل جمع جملات در معادله (۴-۱۲۵) باشد. تذکر این نکته سودمند است که وقتی ناحیه مورد نظر شامل محور استوانه‌ای، جایی که $r=0$ است، باشد، جملات شامل عامل r^{-n} نمی‌توانند وجود داشته باشند. از سوی دیگر، اگر ناحیه مورد نظر شامل نقطه‌ای در بینهایت باشد، جملات شامل عامل r^n نمی‌توانند وجود داشته باشند زیرا پتانسیل در $r \rightarrow \infty$ باید صفر باشد.

وقتی که $k=0$ باشد، معادله (۴-۱۲۱) دارای ساده‌ترین شکل است. داریم

$$\frac{d^2 \Phi(\phi)}{d\phi^2} = 0 \quad (4-126)$$

جواب کلی معادله (۴-۱۲۶) $\Phi(\phi) = A_1 \phi + B_1$ است. اگر هیچ تغییرات پیرامونی وجود نداشته باشد، A_1 صفر می‌شود و داریم

$$\Phi(\phi) = B_1, \quad k=0 \quad (4-127)$$

وقتی که $k=0$ باشد، معادله مربوط به $R(r)$ نیز ساده‌تر می‌شود. از معادله (۴-۱۱۹) بدست می‌آید:

$$\frac{d}{dr} \left[r \frac{dR(r)}{dr} \right] = 0 \quad (4-128)$$

که دارای جواب زیر است

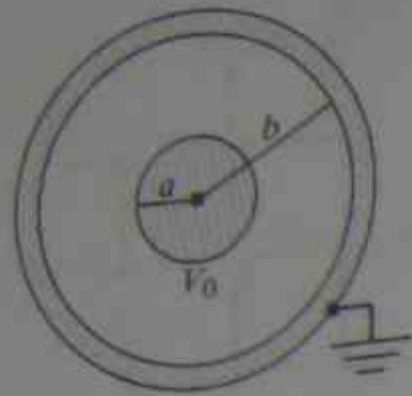
$$R(r) = C_1 \ln r + D_1, \quad k=0 \quad (4-129)$$

حاصلضرب معادلات (۴-۱۲۷) و (۴-۱۲۹)، جوابی را بدست می‌دهد که مستقل از z یا ϕ است:

$$V(r) = C_1 \ln r + C_2 \quad (4-130)$$

که در آن، ثابت‌های دلخواه C_1 و C_2 از شرایط مرزی تعیین می‌شوند.

† اگر تغییرات پیرامونی وجود داشته باشد، جمله $A_1 \phi$ باید نگه‌داشته شود. مثلاً در مسائلی که شامل شکاف هستند. (مسئله ۴-۲۳ را ببینید.)



شکل ۴-۱۸ مقطع عرضی یک کابل هم‌محور (مثال ۴-۸)

اکنون روشهای بالا را با دو مثال روشن خواهیم کرد. یک مثال (مثال ۴-۸) مربوط به حالت تقارن دایره‌ای است و دیگری (مثال ۴-۹) مسئله‌ای را با تغییرات پیرامونی حل می‌کند.

مثال ۴-۸ کابل هم‌محور بسیار طولی را در نظر بگیرید. هادی داخلی، دارای شعاع a است و در پتانسیل V_0 نگه داشته می‌شود. هادی بیرونی، دارای شعاع درونی b است و زمین شده است. توزیع پتانسیل را در فضای بین هادیها تعیین نمایید.

حل شکل ۴-۱۸، مقطع عرضی یک کابل هم‌محور را نشان می‌دهد. فرض می‌کنیم وابستگی به z و به دلیل تقارن، وابستگی به ϕ نیز وجود ندارد ($k=0$). بنابراین، پتانسیل الکتریکی تنها تابعی از r بوده، توسط معادله (۴-۱۳۰) داده می‌شود.

شرایط مرزی عبارتند از

$$V(b) = 0 \quad (4-131 \text{ الف})$$

$$V(a) = V_0 \quad (4-131 \text{ ب})$$

جاگذاری معادلات (۴-۱۳۱ الف) و (۴-۱۳۱ ب)، در معادله (۴-۱۳۰) به دو رابطه منجر می‌شود:

$$C_1 \ln b + C_2 = 0 \quad (4-132 \text{ الف})$$

$$C_1 \ln a + C_2 = V_0 \quad (4-132 \text{ ب})$$

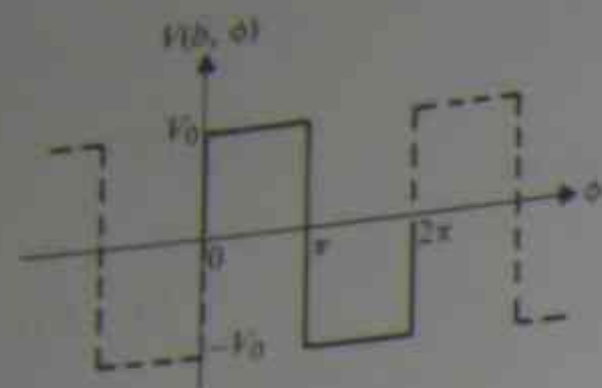
از معادلات (۴-۱۳۲ الف) و (۴-۱۳۲ ب)، C_1 و C_2 بسادگی تعیین می‌شوند:

$$C_1 = -\frac{V_0}{\ln(b/a)}, \quad C_2 = \frac{V_0 \ln b}{\ln(b/a)}$$

بنابراین، توزیع پتانسیل در فضای $a \leq r \leq b$ برابر است با

$$V(r) = \frac{V_0}{\ln(b/a)} \ln \left(\frac{b}{r} \right) \quad (4-133)$$

واضح است که سطح هم‌پتانسیل، سطح استوانه‌ای هم‌محور هستند.



شکل ۶-۲ شرط مرزی مثال ۶-۲

اما چنین جمله‌ای بتنهائی نمی‌تواند شرط مرزی مشخص شده در معادله (۱۳۴-۴) را برآورده سازد. بنابراین سری زیر را به‌عنوان جواب تشکیل می‌دهیم:

$$V(r, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(r, \phi) \quad (134-4)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^n \sin n\phi$$

لازم است معادله (۱۳۴-۴) در $r = b$ برقرار باشد. این مسئله به بسط موج مستطیلی (با دوره تناوب $= 2\pi$) نشان داده شده در شکل ۶-۲. به‌صورت سری فوریه سینوسی منتهی می‌گردد.

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n b^n \sin n\phi = \begin{cases} V_0 & \text{برای } 0 < \phi < \pi \\ -V_0 & \text{برای } \pi < \phi < 2\pi \end{cases} \quad (135-4)$$

ضرایب A_n با استفاده از روش تشریح شده در مثال ۶-۴ بدست می‌آیند. در واقع، چون نتایج آن در معادله (۱۰۳-۴) قبلاً بدست آمده‌اند، مستقیماً می‌توان نوشت

$$A_n = \begin{cases} \frac{4V_0}{n\pi b^n} & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \\ 0 & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \end{cases} \quad (136-4)$$

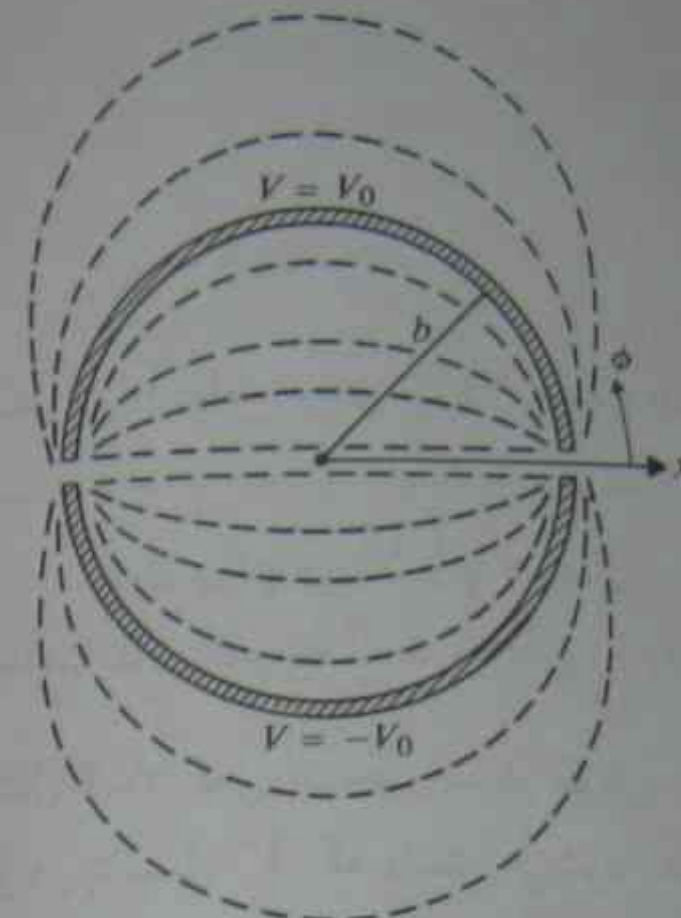
توزیع پتانسیل در درون استوانه، با جاگذاری معادله (۱۳۸-۴) در معادله (۱۳۴-۴) بدست می‌آید:

$$V(r, \phi) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{b}\right)^n \sin n\phi \quad r < b \quad (137-4)$$

(ب) بیرون استوانه.

$$r > b$$

در این ناحیه، به‌ازای $r \rightarrow \infty$ ، پتانسیل باید به صفر کاهش یابد. جملات شامل عامل r^n نمی‌توانند موجود باشند، و صورت مناسب جواب، از معادله (۱۳۵-۴)، چنین است



شکل ۶-۴ مقطع عرضی یک استوانه مدور دونیم شده و خطوط هم‌پتانسیل (مثال ۶-۴)

مثال ۶-۴ یک استوانه مدور هادی نازک بینهایت طویل به شعاع b به دو نیمه تقسیم شده است. نیمه بالائی در پتانسیل $V = V_0$ و نیمه پایینی در $V = -V_0$ است. توزیع پتانسیل را در درون و بیرون استوانه تعیین کنید.

حل مقطع عرضی استوانه مدور دونیم‌شده را در شکل ۶-۴ ملاحظه می‌کنید. چون استوانه بینهایت طویل فرض می‌شود، پتانسیل مستقل از z است و معادله لاپلاس دوبعدی (۱۱۶-۴) بکار می‌رود. شرایط مرزی عبارتند از

$$V(b, \phi) = \begin{cases} V_0 & \text{برای } 0 < \phi < \pi \\ -V_0 & \text{برای } \pi < \phi < 2\pi \end{cases} \quad (138-4)$$

این شرایط را در شکل ۶-۴ ترسیم کرده‌ایم. روشن است که $V(r, \phi)$ تابع فردی از ϕ است. $V(r, \phi)$ را در درون و بیرون استوانه به‌طور جداگانه تعیین خواهیم کرد.

$$r < b$$

چون این ناحیه $r = 0$ را شامل می‌شود، جملات شامل عامل r^{-n} نمی‌توانند موجود باشند. همچنین چون $V(r, \phi)$ تابع فردی از ϕ است، شکل مناسب جواب با استفاده از معادله (۱۳۵-۴) به‌صورت زیر در می‌آید.

$$V_n(r, \phi) = A_n r^n \sin n\phi \quad (139-4)$$

$$V(r, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(r, \phi) \\ = \sum_{n=1}^{\infty} B'_n r^{-n} \sin n\phi \quad (140-4)$$

در $r = b$

$$V(b, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} B'_n b^{-n} \sin n\phi \\ = \begin{cases} V_0 & \text{برای } 0 < \phi < \pi \\ -V_0 & \text{برای } \pi < \phi < 2\pi \end{cases} \quad (141-4)$$

ضرایب B'_n در معادله (141-4)، مشابه A_n در معادله (137-4) هستند. از معادله (138-4) داریم

$$B_n = \begin{cases} \frac{4V_0 b^n}{n\pi} & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \\ 0 & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \end{cases} \quad (142-4)$$

بنابراین، توزیع پتانسیل در بیرون استوانه، از معادله (140-4)، برابر است با

$$V(r, \phi) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{b}{r}\right)^n \sin n\phi \quad r > b \quad (143-4)$$

چند خط هم‌پتانسیل، هم درون و هم بیرون استوانه، در شکل ۱۹-۴ ترسیم شده است.

۷-۴ مسائل مقدار مرزی در مختصات کروی

حل کلی معادله لاپلاس در مختصات کروی، روند بسیار پیچیده‌ای است، بنابراین بحث خود را به حالت‌هایی که پتانسیل الکتریکی مستقل از زاویه سمت ϕ است محدود می‌سازیم. حتی با این محدودیت لازم خواهد بود که توابع جدیدی را تعریف کنیم. از معادله (۹-۴) داریم

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial V}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (144-4)$$

با بکارگیری روش جداسازی متغیرها، جواب زیر را به صورت حاصلضرب فرض می‌کنیم

$$V(R, \theta) = \Gamma(R)\Theta(\theta) \quad (145-4)$$

جاگذاری این جواب در معادله (144-4)، پس از مرتب‌کردن، نتیجه می‌دهد

$$\frac{1}{\Gamma(R)} \frac{d}{dR} \left[R^2 \frac{d\Gamma(R)}{dR} \right] + \frac{1}{\Theta(\theta) \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left[\sin \theta \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} \right] = 0 \quad (146-4)$$

۷-۴ مسائل مقدار مرزی در مختصات کروی

در معادله (۴-۱۴۶)، نخستین جمله سمت چپ فقط تابعی از R و جمله دوم تنها تابعی از θ است. اگر معادله فوق بخواهد به‌آزای هر R و θ برقرار باشد، هر جمله باید ثابت و منهای دیگری باشد. می‌نویسیم

$$\frac{1}{\Gamma(R)} \frac{d}{dR} \left[R^2 \frac{d\Gamma(R)}{dR} \right] = k^2 \quad (147-4)$$

و

$$\frac{1}{\Theta(\theta) \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left[\sin \theta \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} \right] = -k^2 \quad (148-4)$$

که k در آن، ثابت جداسازی است. اکنون باید دو معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم (۴-۱۴۷) و (۴-۱۴۸) را حل کنیم.

معادله (۴-۱۴۷) به صورت

$$R^2 \frac{d^2 \Gamma(R)}{dR^2} + 2R \frac{d\Gamma(R)}{dR} - k^2 \Gamma(R) = 0 \quad (149-4)$$

بازنویسی شده و دارای جوابی به صورت

$$\Gamma_n(R) = A_n R^n + B_n R^{-(n+1)} \quad (150-4)$$

است. در معادله (۴-۱۵۰)، A_n و B_n ثابت‌های اختیاری هستند و رابطه زیر بین n و k یا استفاده از جاگذاری قابل تحقیق است:

$$n(n+1) = k^2 \quad (151-4)$$

در این رابطه، $n = 0, 1, 2, \dots$ یک عدد صحیح مثبت است.

درحالی که مقدار k^2 در معادله (۴-۱۵۱) داده شده است، از معادله (۴-۱۴۸) داریم،

$$\frac{d}{d\theta} \left[\sin \theta \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} \right] + n(n+1)\Theta(\theta) \sin \theta = 0 \quad (152-4)$$

که شکلی از معادله لژاندر است. در مسائلی که شامل دامنه کامل تغییرات θ ، از 0 تا π هستند، جوابهای معادله لژاندر (۴-۱۵۲) را توابع لژاندر نامیده، معمولاً با $P(\cos \theta)$ نمایش می‌دهند. چون توابع لژاندر، به‌آزای مقادیر صحیح n ، چندجمله‌ایهایی از $\cos \theta$ هستند، آنها را چندجمله‌ای‌های لژاندر نیز می‌نامند. می‌نویسیم

$$\Theta_n(\theta) = P_n(\cos \theta) \quad (153-4)$$

جدول ۴-۲
چند تا از چند جمله‌ای‌های لژاندر

$P_n(\cos \theta)$	n
۱	۰
$\cos \theta$	۱
$\frac{1}{2}(3 \cos^2 \theta - 1)$	۲
$\frac{1}{2}(5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta)$	۳

در جدول ۴-۲ عبارات مربوط به چند جمله‌ای‌های لژاندر[†] به‌ازای چند مقدار n درج شده است. با ترکیب جوابهای (۴-۱۵۰) و (۴-۱۵۳) در معادله (۴-۱۴۵)، در مورد مسائل مقدار مرزی کروی بدون تغییرات زاویه سمتی خواهیم داشت.

$$V_n(R, \theta) = [A_n R^n + B_n R^{-(n+1)}] P_n(\cos \theta) \quad (۴-۱۵۴)$$

بسته به شرایط مرزی مسئله داده شده، جواب کامل ممکن است به صورت حاصل جمع از جملات معادله (۴-۱۵۴) باشد. در مثال زیر، کاربرد چند جمله‌ای‌های لژاندر را در حل یک مسئله مقدار مرزی ساده نمایش می‌دهیم.

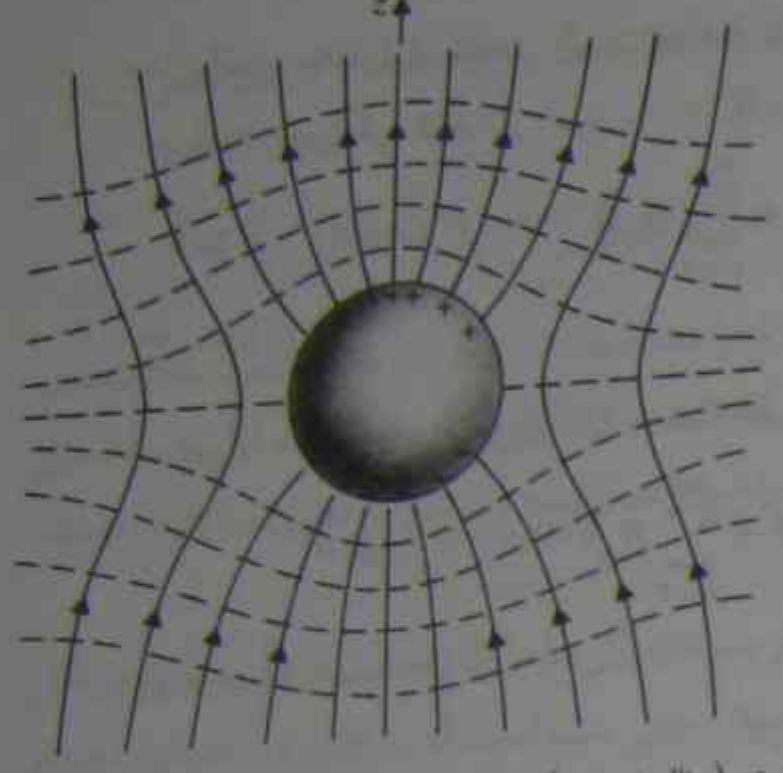
مثال ۴-۱۰ یک کره هادی بدون بار، به شعاع b ، در میدان الکتریکی یکنواخت اولیه $E_0 = a_z E_0$ قرار دارد. (الف) توزیع پتانسیل $V(R, \theta)$ و (ب) شدت میدان الکتریکی $E(R, \theta)$ را پس از قراردادن کره، تعیین نمایید.

حل پس از قراردادن کره هادی در میدان الکتریکی، جداسازی و توزیع دوباره بارها به صورتی انجام خواهد گرفت که سطح کره هم‌پتانسیل بماند. شدت میدان الکتریکی در درون کره صفر است. در بیرون کره، خطوط میدان به صورت عمودی سطح را قطع خواهند کرد و در نقاط بسیار دور از کره، شدت میدان تأثیر چندانی نخواهد پذیرفت. شکل هندسی مسئله در شکل ۴-۲۱ ترسیم گشته است. روشن است که پتانسیل مستقل از زاویه سمت ϕ ، است و جواب بدست آمده در این بخش بکار می‌رود.

الف) برای تعیین توزیع پتانسیل $V(R, \theta)$ در ناحیه $R \geq b$ ، شرایط مرزی زیر را مورد توجه قرار

[†] در واقع، چند جمله‌ای‌های لژاندر، توابع لژاندر نوع اول هستند. دسته دیگری از جوابهای معادله لژاندر نیز به نام توابع لژاندر نوع دوم وجود دارد؛ اما این جوابها، دارای مقادیر ویژه‌ای در $\theta = 0$ و $\theta = \pi$ هستند و بنابراین، در صورتی که محور قطبی، یک ناحیه مورد توجه باشد، باید مورد نظر قرار نگیرند.

۷-۴ مسائل مقدار مرزی در مختصات کروی



خطوط میدان الکتریکی
خطوط هم‌پتانسیل

شکل ۴-۲۱ کره هادی در میدان الکتریکی یکنواخت (مثال ۴-۱۰)

می‌دهیم:

$$V(b, \theta) = \dot{V} \quad (۴-۱۵۵ \text{ الف})$$

$$V(R, \theta) = -E_0 z = -E_0 R \cos \theta \quad R \gg b \quad (۴-۱۵۵ \text{ ب})$$

معادله (۴-۱۵۵ ب) بدین مفهوم است که E_0 اولیه در نقاط بسیار دور از کره، تحت تأثیر قرار نمی‌گیرد. با استفاده از معادله (۴-۱۵۴)، جواب کلی را چنین می‌نویسیم

$$V(R, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n R^n + B_n R^{-(n+1)}] P_n(\cos \theta), \quad R \geq b \quad (۴-۱۵۶)$$

اما با توجه به معادله (۴-۱۵۵ ب)، تمام مقادیر A_n ، بجز A_1 باید صفر شوند و $A_1 = -E_0$ ، از معادله (۴-۱۵۶) و جدول ۴-۲ داریم،

$$\begin{aligned} V(R, \theta) &= -E_0 R P_1(\cos \theta) + \sum_{n=2}^{\infty} B_n R^{-(n+1)} P_n(\cos \theta) \\ &= B_0 R^{-1} + (B_1 R^{-2} - E_0 R) \cos \theta + \sum_{n=2}^{\infty} B_n R^{-(n+1)} P_n(\cos \theta), \quad R \geq b \end{aligned} \quad (۴-۱۵۷)$$

[†] در این مسئله راحت‌تر است در صفحه استوانی $(\theta = \pi/2)$ فرض شود که به رابطه $V(b, \theta) = \dot{V}$ منجر خواهد شد، زیرا سطح کره هادی، هم‌پتانسیل است. برای حالت $V(b, \theta) = V_0$ ، مسئله م. ۴-۲۸ را ببینید.

در واقع، جمله اول سمت راست معادله (۴-۱۵۷) به پتانسیل یک کره باردار مربوط می‌شود. چون کره فاقد بار است، $B_n = 0$ ، و معادله (۴-۱۵۷) به صورت

$$V(R, \theta) = \left(\frac{B_1}{R^2} - E_0 R \right) \cos \theta + \sum_{n=2}^{\infty} B_n R^{-(n+1)} P_n(\cos \theta), \quad R \geq b \quad (۴-۱۵۸)$$

در می‌آید. اکنون شرط مرزی (۴-۱۵۵ الف) را در $R = b$ اعمال می‌کنیم، لازم است

$$0 = \left(\frac{B_1}{b^2} - E_0 b \right) \cos \theta + \sum_{n=2}^{\infty} B_n b^{-(n+1)} P_n(\cos \theta)$$

و از روی آن بدست می‌آید

$$B_1 = E_0 b^2$$

$$B_n = 0, \quad n \geq 2$$

سرانجام، از معادله (۴-۱۵۸) داریم،

$$V(R, \theta) = -E_0 \left[1 - \left(\frac{b}{R} \right)^2 \right] R \cos \theta, \quad R \geq b \quad (۴-۱۵۹)$$

ب) شدت میدان الکتریکی $\mathbf{E}(R, \theta)$ در ناحیه $R \geq b$ ، بسادگی با استفاده از $-\nabla V(R, \theta)$ تعیین می‌شود:

$$\mathbf{E}(R, \theta) = a_R E_R + a_\theta E_\theta \quad (۴-۱۶۰)$$

که در آن

$$E_R = -\frac{\partial V}{\partial R} = E_0 \left[1 + 2 \left(\frac{b}{R} \right)^2 \right] \cos \theta, \quad R \geq b \quad (۴-۱۶۰ الف)$$

$$E_\theta = -\frac{\partial V}{R \partial \theta} = -E_0 \left[1 - \left(\frac{b}{R} \right)^2 \right] \sin \theta, \quad R \geq b \quad (۴-۱۶۰ ب)$$

چگالی بار سطحی روی کره را می‌توان با توجه به رابطه زیر پیدا کرد

$$\rho_s(\theta) = \epsilon_0 E_R \Big|_{R=b} = 2\epsilon_0 E_0 \cos \theta \quad (۴-۱۶۱)$$

که متناسب با $\cos \theta$ و در $\theta = \pi/2$ صفر است. چندین خط هم‌پتانسیل و خط میدان در شکل ۴-۲۱ ترسیم شده است.

تذکر این نکته از معادله (۴-۱۵۹) قابل توجه است که پتانسیل، مجموع دو جمله است:

$-E_0 R \cos \theta$ ناشی از میدان الکتریکی یکنواخت اعمال شده؛ و $(E_0 b^2 \cos \theta)/R^2$ ناشی از یک دوقطبی الکتریکی با گشتاور دوقطبی:

$$p = 2\pi\epsilon_0 b^2 E_0 \quad (۴-۱۶۲)$$

واقع در مرکز کره. سهم دوقطبی معادل را می‌توان با مراجعه به معادله (۳-۵۴) تحقیق نمود. عبارت‌های (۴-۱۶۰ الف) و (۴-۱۶۰ ب) در مورد شدت میدان الکتریکی حاصل که از روی پتانسیل بدست آمده‌اند نیز به روشنی ترکیب میدان یکنواخت اعمال شده و میدان دوقطبی معادل داده شده در معادله (۳-۵۴) را نشان می‌دهند.

در این فصل، حل تحلیلی مسائل الکتریسیته ساکن را با استفاده از روش تصاویر و حل مستقیم معادله لاپلاس بررسی کردیم. روش تصاویر وقتی مفید است که بارهایی در نزدیکی اجسام هادی با یک شکل هندسی ساده و مناسب قرار داشته باشند: یک بار نقطه‌ای در نزدیکی کره هادی یا صفحه هادی بینهایت؛ و یک بار خطی نزدیک استوانه هادی موازی یا صفحه هادی موازی. حل معادله لاپلاس به روش جداسازی متغیرها لازم می‌دارد که مرزها بر سطوح مختصاتی منطبق باشند. این ملزومات، سودمندی هر دو روش را محدود می‌سازند. در مسائل عملی، اغلب با مرزهای پیچیده‌تری مواجه هستیم که قابل جوابگویی با راه‌حل‌های تحلیلی مرتبی نیستند. در چنین مواردی، به روش تقریبی ترسیمی یا عددی متوسل می‌شویم. این روشها از حدود این کتاب فراتر می‌روند. †

پرسش‌های دوره‌ای

د. ۴-۱. معادله پواسون را به صورت نمایش برداری

الف) در یک محیط ساده،

ب) در یک محیط خطی، همه‌سویکسان ولی غیرهمگن،

بنویسید.

د. ۴-۲. هر دو بند پرسش د. ۴-۱ را در مختصات کارتزین تکرار کنید.

د. ۴-۳. معادله لاپلاس را برای یک محیط ساده

الف) به صورت نمایش برداری، ب) در مختصات کارتزین، بنویسید.

† برای مثال، فصل ۵ کتاب *Introductory Engineering Electromagnetics* نوشته B. D. Popović، چاپ

شرکت Addison-Wesley Reading Mass. (۱۹۷۱) را ببینید.

- ۴.۴.د اگر $\nabla^2 U = 0$ باشد، چرا نتیجه نمی شود که U متحد با صفر است؟
 ۵.۴.د ولتاژ ثابتی به دو سر یک خازن صفحه‌ای موازی متصل شده است.
 الف) آیا شدت میدان الکتریکی در فضای بین صفحات به گذردهی محیط بستگی دارد؟
 ب) آیا چگالی شار الکتریکی به گذردهی محیط وابسته است؟
 توضیح دهید.

- ۶.۴.د فرض کنید بارهای ثابت $+Q$ و $-Q$ روی صفحات یک خازن صفحه‌ای موازی مجزا قرار دارند.
 الف) آیا شدت میدان الکتریکی در فضای بین صفحات به گذردهی محیط بستگی دارد؟
 ب) آیا چگالی شار الکتریکی به گذردهی محیط وابسته است؟
 توضیح دهید.

۷.۴.د چرا پتانسیل الکتریسته ساکن در مرز پیوسته است؟

۸.۴.د قضیهٔ یکتائی را در الکتریسته ساکن با جملات بیان کنید.

۹.۴.د تصویر یک ابر کروی از الکترونها نسبت به صفحهٔ هادی بینهایت چیست؟

۱۰.۴.د چرا نقطه‌ای در بینهایت را نمی توان به عنوان نقطهٔ پتانسیل مرجع صفر در مورد بار خطی بینهایت، مثل بار نقطه‌ای بکار برد؟ دلیل فیزیکی این تفاوت چیست؟

۱۱.۴.د تصویر یک بار خطی بینهایت طویل با چگالی ρ_L نسبت به استوانهٔ مدور هادی موازی چیست؟

۱۲.۴.د سطح پتانسیل صفر در خط انتقال دو-سیمهٔ شکل ۴-۶ کجاست؟

۱۳.۴.د در پیدا کردن بار سطحی القاشده روی یک کرهٔ زمین شده که توسط بار نقطه‌ای بوجود آمده است، آیا می توانیم در معادلهٔ $R = a_0(67 - 4)$ قرار داده و سپس ρ_s را از روی $-\epsilon_0 \partial V(a, \theta) / \partial R$ محاسبه کنیم؟ توضیح دهید.

۱۴.۴.د روش جداسازی متغیرها چیست؟ تحت چه شرایطی در حل معادلهٔ لاپلاس مفید است؟

۱۵.۴.د مسائل مقدار مرزی چه هستند؟

۱۶.۴.د آیا هر سه ثابت جداسازی (k_x, k_y, k_z) در مختصات کارتزین، می توانند حقیقی باشند؟ آیا می توانند همهٔ آنها موهومی باشند؟ توضیح دهید.

۱۷.۴.د آیا ثابت جداسازی k در جواب معادلهٔ لاپلاس دوبعدی (۴-۱۲۰) می تواند موهومی باشد؟ توضیح دهید.

۱۸.۴.د برای اصلاح جواب مثال ۴-۸ در معادلهٔ (۴-۱۳۳) چه باید بکنیم، اگر هادی درونی کابل هم محور زمین شده و هادی بیرونی در پتانسیل V_0 نگه داشته شود؟

۱۹.۴.د اگر استوانهٔ مدور هادی در جهت عمودی به دو نیمه تقسیم شده باشد، یعنی $V = V_0$ به ازای

- ۲۰.۴.د اگر C_1 و C_2 ثابت‌های اختیاری باشند، آیا توابع $V_1(R, \theta) = C_1 R \cos \theta$ و $V_2(R, \theta) = C_2 R^{-2} \cos \theta$ می توانند جواب معادلهٔ لاپلاس در مختصات کروی باشند؟ توضیح دهید.

مسائل

۱.۴.م صفحات هادی بالائی و پایینی یک خازن صفحه‌ای موازی بزرگ در فاصلهٔ d از یکدیگر قرار داشته و به ترتیب در پتانسیل‌های V_0 و 0 نگهداری می شوند. یک باریکهٔ دی الکتریک با ضریب دی الکتریک ϵ_r و ضخامت یکنواخت $\epsilon_r d$ را روی صفحهٔ پایینی قرار می دهیم. با صرف نظر کردن از اثرات لبه‌ای، تعیین کنید.

الف) توزیع پتانسیل و میدان الکتریکی را در باریکهٔ دی الکتریک.

ب) توزیع پتانسیل و میدان الکتریکی را در فاصلهٔ هوایی بین باریکهٔ دی الکتریک و صفحهٔ بالائی.

پ) چگالی‌های بار سطحی را روی صفحات بالائی و پایینی.

ت) نتایج بند (ب) را با نتایج در حالت بدون باریکهٔ دی الکتریک مقایسه کنید.

۲.۴.م ثابت کنید، پتانسیل عددی V در معادلهٔ (۳-۶۱) در معادلهٔ پواسون (۴-۶) صدق می کند.

۳.۴.م ثابت کنید، تابع پتانسیلی که در ناحیهٔ مشخصی معادلهٔ لاپلاس را برآورده می سازد، دارای هیچ ماکزیمم یا می نیمی در این ناحیه نیست.

۴.۴.م اگر C_1 و C_2 ثابت‌های دلخواه باشند، تحقیق کنید که

$$V_1 = C_1/R \quad \text{و} \quad V_2 = C_2 z / (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$$

جوابهای معادلهٔ لاپلاس هستند.

۵.۴.م فرض کنید بار نقطه‌ای Q ، بالای یک صفحهٔ هادی بینهایت در $y = 0$ قرار دارد.

الف) ثابت کنید اگر صفحهٔ هادی در پتانسیل صفر نگه داشته شود، $V(x, y, z)$ در معادلهٔ (۴-۳۷)، معادلهٔ لاپلاس را برآورده می سازد.

ب) اگر صفحهٔ هادی، دارای پتانسیل غیر صفر V_0 باشد، عبارت $V(x, y, z)$ به چه صورتی خواهد بود؟

پ) نیروی جاذبهٔ الکتریسته ساکن بین بار Q و صفحهٔ هادی چیست؟

۶.۴.۴. فرض کنید فضای بین هادیهای درونی و بیرونی یک سازه استوانه‌ای هم‌محور طویل، با ابر الکتریکی به چگالی بار حجمی $\rho = A/r$ در فاصله $a < r < b$ پر شده باشد که در آن a و b به ترتیب شعاع‌های هادیهای درونی و بیرونی هستند. هادی درونی در پتانسیل V_0 نگه داشته شده و هادی بیرونی زمین شده است. توزیع پتانسیل را در ناحیه $a < r < b$ با استفاده از حل معادله پواسون تعیین کنید.

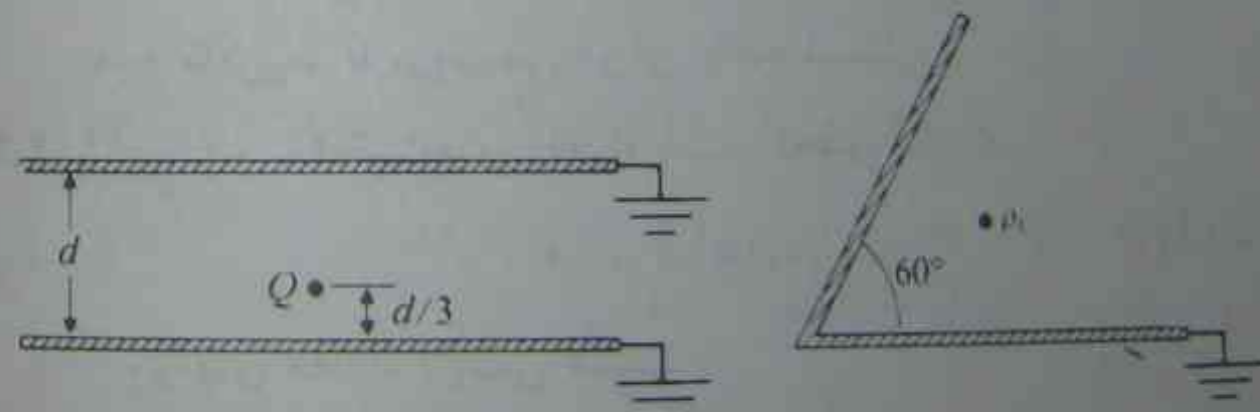
۷.۴.۴. بار نقطه‌ای Q در فاصله d بالای یک صفحه بزرگ هادی زمین شده وجود دارد. تعیین کنید: الف) چگالی بار سطحی ρ_s ب) کل بار القاشده روی صفحه هادی.

۸.۴.۴. در مورد بار نقطه‌ای مثبت Q که به ترتیب در فاصله d_1 و d_2 از دو نیم صفحه هادی عمود بر هم زمین شده در شکل ۴-۴ الف) قرار گرفته است، عبارتهایی برای الف) پتانسیل و شدت میدان الکتریکی در نقطه دلخواه $P(x, y)$ در ربع اول را بیابید. ب) چگالی بار سطحی القاشده روی دو نیم صفحه را بیابید. تغییرات چگالی‌های بار سطحی را در صفحه xy رسم کنید.

۹.۴.۴. در حالات زیر، مجموعه‌ای از بارهای تصویر را تعیین کنید که به جای مرزهای هادی دارای پتانسیل صفر، قرار می‌گیرند.

الف) بار نقطه‌ای Q بین دو صفحه بزرگ هادی موازی و زمین شده مطابق شکل ۴-۲۲ الف) قرار دارد.

ب) بار خطی بینهایت ρ_L در وسط دو صفحه هادی بزرگ متقاطع با زاویه 60° درجه مطابق شکل ۴-۲۲ ب) قرار گرفته است.



ب) بار خطی بین صفحات متقاطع زمین شده الف) بار نقطه‌ای بین صفحات موازی زمین شده

شکل ۴-۲۲ شکل‌های مسئله ۹-۴

۱۰.۴.۴. یک سیم هادی مستقیم به شعاع a به موازات سطح زمین و در فاصله h بالای آن قرار دارد. با فرض اینکه زمین کاملاً هادی است ظرفیت و نیروی بین سیم و زمین را در واحد طول تعیین کنید.

۱۱.۴.۴. یک خط انتقال دو-سیمه بسیار طویل، هر سیم به شعاع a و در فاصله d از یکدیگر، در

ارتفاع h از سطح زمین هادی هموار نگه داشته شده است. با فرض اینکه هم d و هم h بسیار بزرگتر از a هستند، ظرفیت در واحد طول خط را پیدا کنید. ۱۲.۴.۴. برای جفت بارهای خطی مساوی و مختلف‌العلامه نشان داده شده در شکل ۴-۷، الف) عبارتی برای شدت میدان الکتریکی E در نقطه $P(x, y)$ ، در مختصات کارتزین، بنویسید.

ب) معادله خطوط میدان الکتریکی ترسیم شده در شکل ۴-۸ را پیدا کنید. ۱۳.۴.۴. ظرفیت واحد طول یک خط انتقال دو-سیمه با استوانه‌های هادی موازی و به شعاعهای متفاوت، a_1 و a_2 که محور آنها در فاصله D ($D > a_1 + a_2$) از یکدیگر قرار دارند را تعیین کنید.

۱۴.۴.۴. سیم طویلی به شعاع a_1 ، در درون تونل هادی مدوری به شعاع a_2 ، مطابق شکل ۴-۱۰ الف) قرار دارد. فاصله بین محور آنها D است. الف) ظرفیت در واحد طول را پیدا کنید.

ب) اگر سیم و تونل، بارهای خطی مساوی و مختلف‌العلامه با اندازه ρ_L را حمل نمایند، نیروی وارد بر سیم را در واحد طول تعیین کنید.

۱۵.۴.۴. بار نقطه‌ای Q در درون و در فاصله d از مرکز یک پوسته هادی کروی زمین شده به شعاع b (که در آن $b > d$) قرار دارد. با استفاده از روش تصاویر، تعیین کنید الف) توزیع پتانسیل درون پوسته را.

ب) چگالی بار القاشده ρ_s روی سطح درونی پوسته را.

۱۶.۴.۴. دو کره هادی با شعاعهای مساوی a ، به ترتیب در پتانسیل‌های V_0 و 0 ، نگه داشته شده‌اند. مراکز آنها در فاصله D از یکدیگر قرار دارند.

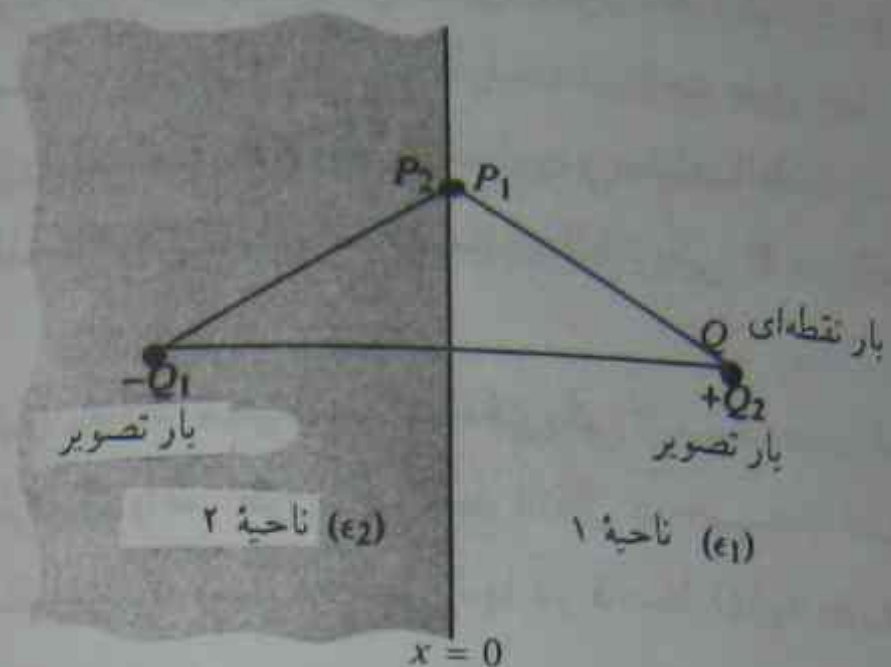
الف) بارهای تصویر و محل آنها را که می‌توانند از نظر الکتریکی جایگزین دو کره شوند، بدست آورید.

ب) ظرفیت بین دو کره را بیابید.

۱۷.۴.۴. دو محیط دی‌الکتریک با ضرایب دی‌الکتریک ϵ_1 و ϵ_2 ، توسط یک مرز مسطح در $x = 0$ ، مطابق شکل ۴-۲۳ از یکدیگر جدا شده‌اند. بار نقطه‌ای Q در محیط ۱، در فاصله d از مرز قرار دارد.

الف) تحقیق کنید که میدان در محیط ۱ را می‌توان با استفاده از Q و بار تصویر $-Q$ ، در حالی که تأثیر هر دو در محیط ۱ در نظر گرفته می‌شود، بدست آورد.

ب) تحقیق کنید که میدان در محیط ۲ را می‌توان با استفاده از Q و بار تصویر $+Q$ ، منطبق بر Q در حالی که تأثیر هر دو در محیط ۲ در نظر گرفته می‌شود، بدست آورد.



شکل ۲۳-۴ بارهای تصویر در محیط دی الکتریک (مسئله ۴-۱۷)

پ) Q_1 و Q_2 را تعیین کنید. (راهنمایی: نقاط مجاور P_1 و P_2 را به ترتیب در محیط‌های ۱ و ۲ در نظر گرفته، و از پیوستگی مؤلفه مماسی میدان E و مؤلفه عمودی میدان D استفاده نمایید.)

۱۸-۴. م وضعیت هندسی ناحیه‌ای را توصیف کنید که در آن تابع پتانسیل را می‌توان با یک جمله به صورت زیر بیان نمود:

$$V(x, y) = c_1 xy \quad (\text{الف})$$

$$V(x, y) = c_2 \sin kx \sinh ky \quad (\text{ب})$$

c_1, c_2 و k را بر حسب ابعاد و پتانسیل ثابت V_0 بیابید.

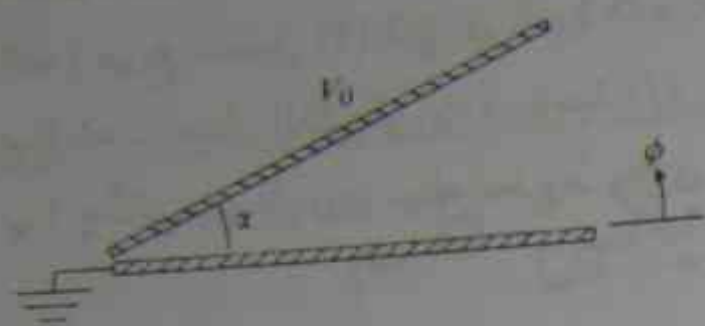
۱۹-۴. م اگر شرایط مرزی روی صفحات بالائی، پایینی و سمت راست شکل ۴-۱۷، به صورت $\partial V / \partial n = 0$ باشد، به چه صورت باید جواب مثال ۴-۷ را در معادله (۴-۱۱۴) اصلاح کنیم؟

۲۰-۴. م اگر صفحات بالائی، پایینی و سمت چپ شکل ۴-۱۷ زمین شوند ($V = 0$)، و صفحه انتهائی در سمت راست در پتانسیل ثابت V_0 نگه داشته شود، به چه صورت باید جواب مثال ۴-۷ را در معادله (۴-۱۱۴) اصلاح کنیم؟

۲۱-۴. م ناحیه مستطیلی نشان داده شده در شکل ۴-۱۷ را به عنوان مقطع عرضی محفظه‌ای که توسط چهار صفحه هادی تشکیل یافته است، در نظر بگیرید. صفحات سمت چپ و راست زمین شده‌اند و صفحات بالائی و پایینی به ترتیب در پتانسیل‌های ثابت V_1 و V_2 نگه داشته می‌شوند. توزیع پتانسیل را در درون محفظه تعیین نمایید.

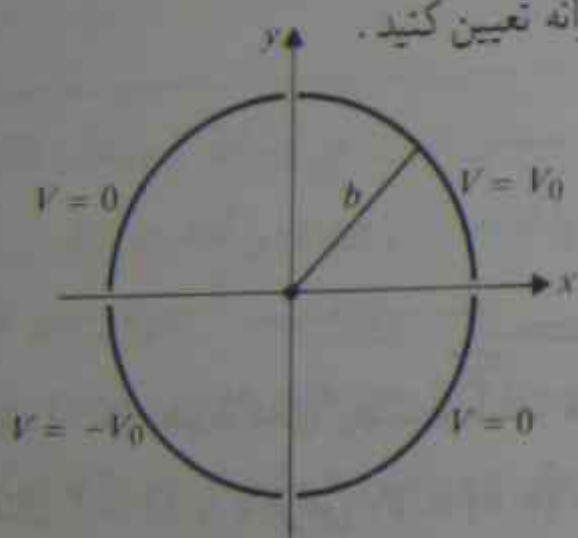
۲۲-۴. م یک جعبه مکعب مستطیلی شکل فلزی به اضلاع a و b و ارتفاع c را در نظر بگیرید. دیواره‌های جانبی و سطح پایینی زمین شده‌اند. سطح بالائی مجزا شده و در پتانسیل ثابت V_0 نگه

داشته می‌شود. توزیع پتانسیل را در درون جعبه تعیین کنید. ۲۳-۴. م دو صفحه هادی بینهایت مجزا شده در پتانسیل‌های 0 و V_0 نگه داشته شده و مطابق شکل ۴-۲۴، به صورت گوه شکل یافته‌اند. توزیع پتانسیل را برای نواحی (الف) $0 < \phi < \alpha$ و (ب) $\alpha < \phi < 2\pi$ تعیین کنید.



شکل ۲۴-۴ دو صفحه هادی بینهایت مجزا شده که در پتانسیل‌های ثابت نگه داشته شده‌اند (مسئله ۴-۲۳)

۲۴-۴. م یک استوانهٔ مدور هادی بینهایت طولی نازک به شعاع b ، مطابق شکل ۴-۲۵ به چهار ربع استوانه تقسیم شده است. ربع استوانه‌های قرار گرفته در ربع دوم و چهارم زمین شده و ربع استوانه‌های قرار گرفته در ربع اول و سوم به ترتیب در پتانسیل‌های V_0 و $-V_0$ نگه داشته شده‌اند. توزیع پتانسیل را در درون و بیرون استوانه تعیین کنید.



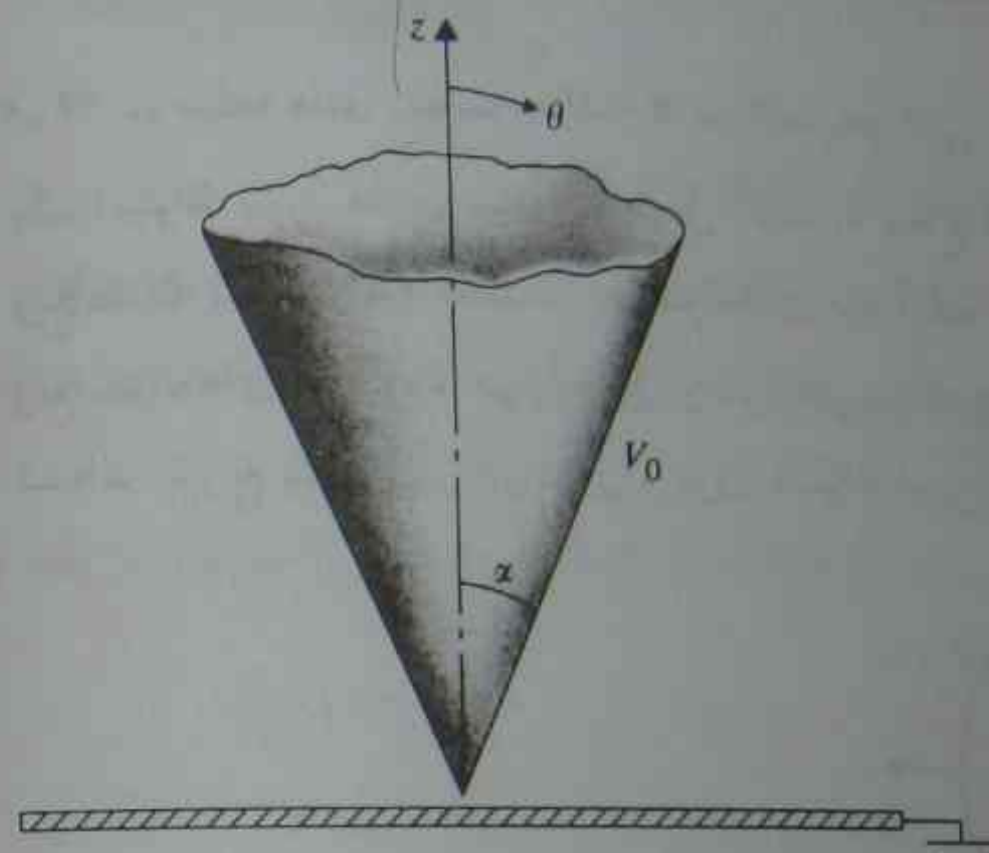
شکل ۲۵-۴ مقطع عرضی استوانهٔ مدور طولی که به چهار ربع تقسیم شده است (مسئله ۴-۲۴)

۲۵-۴. م استوانهٔ هادی طولی زمین شده‌ای به شعاع b ، در امتداد محور z ، در درون میدان الکتریکی یکنواخت اولیه $E_0 = a_y E_0$ قرار داده می‌شود. توزیع پتانسیل $V(r, \phi)$ و شدت میدان الکتریکی $E(r, \phi)$ را در بیرون استوانه تعیین کنید. نشان دهید که شدت میدان الکتریکی در سطح استوانه می‌تواند دو برابر شدت میدان در فاصله‌ای باشد که می‌تواند یک شکست محلی یا کرونا ایجاد نماید. (این پدیدهٔ تخلیهٔ کرونا در امتداد طناب‌های کشتی‌ها و هواپیماها در نزدیکی طوفانها، آتش سنت‌الموز خوانده می‌شود. †)

۲۶-۴. م یک استوانهٔ دی الکتریک طولی به شعاع b ، و ضریب دی الکتریک ϵ_r در امتداد محور z در

† کتاب آذرخش، R. H. Golde (ویراستار) از انتشارات آکادمیک پرس، نیویورک، ۱۹۷۷، جلد ۲، فصل ۲۱.

درون میدان الکتریکی یکنواخت اولیه $E_0 = a_z E_0$ قرار داده می شود. $V(r, \phi)$ و $E(r, \phi)$ را هم در درون و هم در بیرون استوانه دی الکتریک تعیین کنید.
 ۲۷-۴-۴. م یک مخروط هادی بینهایت با نیم زاویه α در پتانسیل V_0 نگه داشته می شود و از صفحه هادی زمین شده ای مطابق شکل ۴-۲۶ مجزا می گردد. تعیین کنید:
 الف) توزیع پتانسیل $V(\theta)$ را، در ناحیه $\alpha < \theta < \pi/2$.
 ب) شدت میدان الکتریکی را، در ناحیه $\alpha < \theta < \pi/2$.
 پ) چگالی های بار روی سطح مخروط و روی صفحه زمین شده را.



شکل ۴-۲۶ یک مخروط هادی بینهایت و صفحه هادی زمین شده (مسئله ۴-۲۷)

۲۸-۴-۴. م مثال ۴-۱۰ را با فرض $V(b, \theta) = V_0$ در معادله (۴-۱۵۵ الف) دوباره حل کنید.

۲۹-۴-۴. م یک کره دی الکتریک به شعاع b و ضریب دی الکتریک ϵ_r در درون میدان الکتریکی یکنواخت اولیه $E_0 = a_z E_0$ در هوا قرار داده می شود. $V(R, \theta)$ و $E(R, \theta)$ را هم در درون و هم در بیرون کره دی الکتریک تعیین کنید.

۵

جریان های الکتریکی دائم

۱-۵ مقدمه

در فصل های ۳ و ۴، با مسائل الکتریسیته ساکن و مسائل میدان در ارتباط با بارهای الکتریکی در حال سکون سروکار داشتیم. اکنون بارهای متحرک را که جریان را ایجاد می کنند، در نظر می گیریم. جریان های الکتریکی ناشی از حرکت بارهای آزاد، بر چند نوع هستند: ۱- جریان های هدایتی در هادیها و نیمه هادیها توسط حرکت رانشی الکترون ها و/یا حفره های هدایتی بوجود می آیند؛ ۲- جریان های الکترولیتیکی نتیجه نقل مکان یون های مثبت و منفی هستند؛ و ۳- جریان های انتقالی از حرکت الکترون ها و/یا یون ها در خلا نتیجه می شوند. در این فصل توجه خاص خود را به جریان های هدایتی که قانون اهم بر آنها حاکم است، معطوف خواهیم داشت. نقطه شروع کار ما، شکل نقطه ای قانون اهم خواهد بود که چگالی جریان و شدت میدان الکتریکی را به هم ارتباط می دهد و رابطه $V = IR$ را در نظریه مدار بدست می آوریم. همچنین مفهوم نیروی محرکه الکتریکی را معرفی نموده و قانون آشنای ولتاژ کیرشف را استخراج خواهیم نمود. با استفاده از اصل بقای بار،

۱- Conduction currents

۲- Electrolytic currents

۳- Convection currents

۴- Electromotive force

۵- Conservation of charge

† در حالات متغیر با زمان، نوع دیگری از جریان توسط بارهای متغیر بوجود می آید. نرخ زمانی تغییر جابجایی الکتریکی به جریان جابجایی منجر می شود. این مطلب در فصل ۷ بررسی خواهد شد.

نشان خواهیم داد که چگونه رابطه ای نقطه ای بین چگالی های جریان و بار را بدست می آوریم. رابطه ای که معادله پیوستگی^۱ نامیده شده و از روی آن قانون جریان کیرشلف نتیجه می شود.

هنگامی که جریانی از فصل مشترک بین دو محیط با رسانندگی های متفاوت عبور می کند، شرایط مرزی مشخصی باید برآورده شوند، و جهت عبور جریان تغییر خواهد نمود. این شرایط مرزی را بررسی خواهیم کرد. همچنین نشان خواهیم داد که در یک محیط هادی همگن، چگالی جریان را می توان به صورت گرادیان یک میدان عددی، که در معادله لاپلاس صدق می کند، بیان نمود. از این رو وضعیت مشابهی بین جریان دائم و میدان های الکتریسیته ساکن وجود دارد که اساس نگاشت^۲ توزیع پتانسیل یک مسئله الکتریسیته ساکن را در یک مخزن الکترولیتی^۳ تشکیل می دهد.

الکترولیت در یک مخزن الکترولیتی، اساساً یک محیط مایع با رسانائی پایین و معمولاً محلول نمک رقیق است. الکترودهای فلزی با هدایت بالا، در درون محلول قرار داده می شوند. وقتی یک ولتاژ با اختلاف پتانسیل به الکترودها اعمال می شود، در درون محلول، میدان الکتریکی تشکیل شده و مولکول های الکترولیت بر اثر یک فرآیند شیمیائی به نام الکترولیز^۴ به یون های باردار مخالف تجزیه می شوند. یون های مثبت در جهت میدان الکتریکی و یون های منفی در خلاف جهت میدان حرکت نموده، هر دو در تولید جریانی هم جهت با میدان، مشارکت می کنند. با استفاده از الکترودهائی با شکل هندسی مناسب که مرزهای مسائل الکتریسیته ساکن را شبیه سازی نماید، می توان یک مدل آزمایشگاهی در مخزن الکترولیتی تشکیل داد. در این صورت، توزیع پتانسیل اندازه گیری شده در الکترولیت، جواب معادله لاپلاس در مورد مسائلی است که در یک محیط همگن، مرزهای پیچیده ای داشته و حل تحلیلی ساده ای ندارند.

جریان های انتقالی، نتیجه حرکت ذرات باردار مثبت یا منفی در خلا^۵ یا گازهای رقیق^۵ هستند. از مثالهای آشنا می توان اشعه الکترونی در لامپ پرتوکاتی و حرکت های مغشوش ذرات باردار در طوفان همراه با رعد و برق را نام برد. جریانهای انتقالی، از حرکت هیدرودینامیکی که شامل انتقال جرم است، نتیجه شده و از قانون اهم تبعیت نمی کنند.

مکانیزم جریانهای هدایتی، هم با جریانهای انتقالی و هم با جریانهای الکترولیتی تفاوت دارد. در حالت عادی اتم های یک هادی محل های منظمی را در یک ساختار کریستالی اشغال می کنند. این اتم ها، از یک هسته با بار مثبت و در اطراف آن، الکترونهائی با یک ترتیب

یوسته ای تشکیل می شوند. الکترون های پوسته های درونی به شدت در قید هسته بوده، برای حرکت، آزاد نیستند. الکترون های بیرونی ترین پوسته های اتم هادی، به طور کامل آن پوسته ها را پر نمی کنند؛ این الکترون ها را الکترون های ظرفیت یا هدایت گویند که به طور بسیار سستی به هسته مقید می باشند. الکترون های اخیر، می توانند از یک اتم به اتم دیگر به صورت تصادفی حرکت کنند. به طور متوسط، اتم ها از نظر الکتریکی خنثی می باشند و حرکت رانشی خالص الکترون ها صفر است. با اعمال میدان الکتریکی بیرونی به هادی، حرکتی منظم از الکترون های هدایتی نتیجه شده، جریان الکتریکی تولید می شود. سرعت رانش متوسط الکترون ها، حتی در مورد هادیهای بسیار خوب، ناچیز است (از مرتبه $10^{-2}m/s$ یا 10^{-4}). زیرا در مسیر حرکت خود، یا اتم ها برخورد می کنند و بخشی از انرژی جنبشی خود را به صورت حرارت از دست می دهند. حتی با وجود حرکت رانشی الکترون های هدایتی، هادی از نظر الکتریکی خنثی می ماند. نیروهای الکتریکی مانع از انباشته شدن الکترون های اضافی در یک نقطه هادی می شوند. به طور تحلیلی نشان خواهیم داد که چگالی بار یک هادی به صورت نمائی با زمان کاهش می یابد. در هادیهای خوب، با رفتن به حالت تعادل، چگالی بار با سرعت فوق العاده زیادی به سوی صفر میل می نماید.

۲-۵ چگالی جریان و قانون اهم

حرکت دائم یک نوع حاملهای بار، هر یک با بار q (که در مورد الکترون ها منفی است) گذرنده از جزء کوچک سطحی Δs را با سرعت u مطابق شکل ۵-۱ در نظر بگیرید. اگر N تعداد حاملهای بار در واحد حجم باشد، آنگاه در مدت زمان Δt ، هر حامل بار، مسافت $u\Delta t$ را طی نموده و مقدار بار گذرنده از سطح Δs ، برابر است با:

$$\Delta Q = Nqu \cdot a_n \Delta s \Delta t \quad (C) \quad (1-5)$$

چون جریان، نرخ زمانی تغییر بار است، داریم

$$\Delta I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = Nqu \cdot a_n \Delta s = Nqu \cdot \Delta s \quad (A) \quad (2-5)$$

در معادله (۲-۵)، $\Delta s = a_n \Delta s$ را به صورت یک کمیت برداری نوشته ایم. بهتر است که یک تابع نقطه ای برداری به نام چگالی جریان حجمی یا به طور ساده چگالی جریان J ، را با واحد آمپر بر متر مربع تعریف کنیم.

$$J = Nqu \quad (A/m^2) \quad (3-5)$$

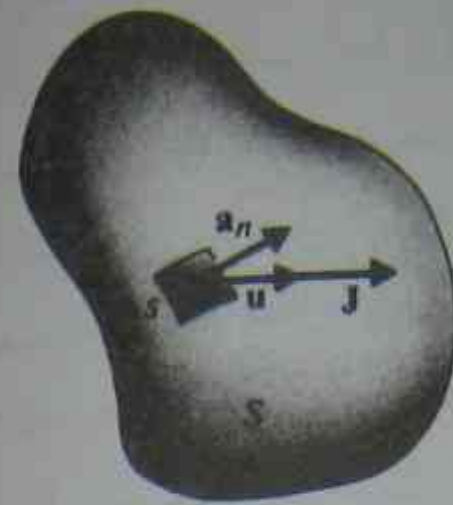
۱- Equation of continuity

۲- Mapping

۳- Electrolytic tank

۴- Electrolysis

۵- Rarefied gas



شکل ۱-۵ جریان هدایتی ناشی از حرکت رانشی حامل های بار گذرنده از یک سطح

تا اینکه معادله (۲-۵) بتواند به صورت

$$\Delta I = \mathbf{J} \cdot \Delta \mathbf{s} \quad (۴-۵)$$

نوشته شود. در نتیجه کل جریان \$I\$ که از سطح دلخواه \$S\$ می گذرد، شار بردار \$\mathbf{J}\$ گذرنده از \$S\$ می باشد:

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} \quad (A) \quad (۵-۵)$$

با توجه به اینکه حاصلضرب \$Nq\$ در واقع بار آزاد در واحد حجم است، می توانیم معادله (۳-۵) را به صورت زیر بازنویسی نماییم:

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{u} \quad (A/m^2) \quad (۶-۵)$$

که رابطه بین چگالی جریان انتقالی و سرعت حامل بار است.

مثال ۱-۵ در دیوهای لامپ خلا، الکترون ها از یک کاتد گرم، در پتانسیل صفر انتشار یافته و توسط آند که در پتانسیل \$V\$ نگه داشته شده است جمع آوری می شوند. در نتیجه جریان انتقالی حاصل می گردد. با فرض اینکه کاتد و آند به صورت صفحات هادی موازی بوده و الکترون ها کاتد را با سرعت اولیه صفر ترک می کنند (شرط محدود کننده بار فضائی)، رابطه بین چگالی جریان \$J\$ و \$V\$ را بیابید.

حل ناحیه بین کاتد و آند در شکل ۲-۵ نشان داده شده است؛ در این شکل ابری از الکترون ها (بار فضائی منفی) چنان موجود است که نیروی دافعه باعث می شود که الکترون ها از کاتد گرم

۲-۵ چگالی جریان و قانون اهم

بیرون جوشیده و اساساً با سرعت صفر کاتد را ترک نمایند. به عبارت دیگر، میدان الکتریکی خالص در کاتد صفر است. با چشم پوشی از اثرات لبه ای، داریم

$$E(y) = a_y E_y(y) = -a_y \left. \frac{dV(y)}{dy} \right|_{y=0} = 0 \quad (۷-۵)$$

در حالت دائم، چگالی جریان ثابت و مستقل از \$y\$ است:

$$\mathbf{J} = -a_y J = a_y \rho(y) \mathbf{u}(y) \quad (۸-۵)$$

که در آن چگالی بار \$\rho(y)\$ یک کمیت منفی است. سرعت \$\mathbf{u} = a_y u(y)\$ توسط قانون حرکت نیوتون به شدت میدان الکتریکی \$E(y) = a_y E(y)\$ مربوط می شود:

$$m \frac{du(y)}{dt} = -eE(y) = e \frac{dV(y)}{dy} \quad (۹-۵)$$

که در آن \$m = 9.11 \times 10^{-31} (kg)\$ و \$-e = -1.6 \times 10^{-19} (C)\$ به ترتیب جرم و بار یک الکترون هستند. با توجه به اینکه

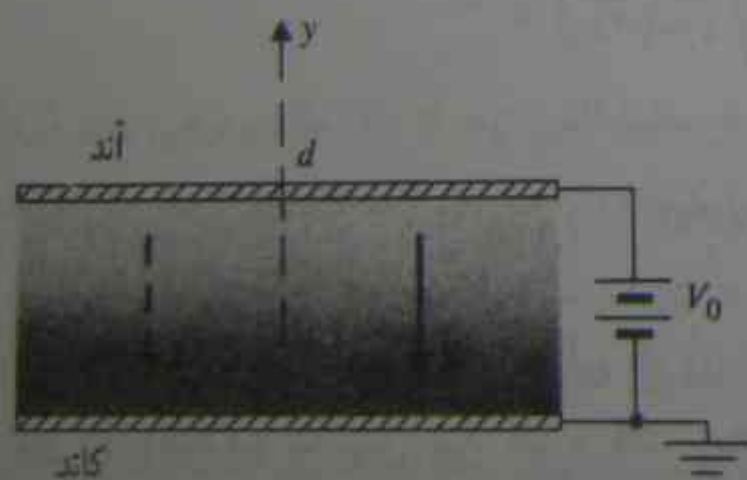
$$m \frac{du}{dt} = m \frac{du}{dy} \frac{dy}{dt} = mu \frac{du}{dy} = \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{2} mu^2 \right)$$

معادله (۹-۵) را به صورت زیر می توان بازنویسی نمود

$$\frac{d}{dy} \left(\frac{1}{2} mu^2 \right) = e \frac{dV}{dy} \quad (۱۰-۵)$$

انتگرال گیری از معادله (۱۰-۵) بدست می دهد

$$\frac{1}{2} mu^2 = eV \quad (۱۱-۵)$$



شکل ۲-۵ دیود خلا با بار فضائی محدود شده (مثال ۱-۵)

که در آن ثابت انتگرال گیری صفر گرفته شده است، زیرا در $y = 0$ ، $u(0) = V(0) = 0$ ، از معادله (۱۱-۵) بدست می آید

$$u = \left(\frac{2e}{m} V \right)^{1/2} \quad (12-5)$$

برای یافتن $V(y)$ در ناحیه بین الکترودها باید معادله پواسون را در حالیکه ρ از معادله (۸-۵) بر حسب $V(y)$ بیان شده است، حل نماییم:

$$\rho = -\frac{J}{u} = -J \sqrt{\frac{m}{2e}} V^{-1/2} \quad (13-5)$$

از معادله (۴-۶) داریم

$$\frac{d^2 V}{dy^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} = \frac{J}{\epsilon_0} \sqrt{\frac{m}{2e}} V^{-1/2} \quad (14-5)$$

اگر هر دو طرف معادله (۱۴-۵) را نخست در dV/dy ضرب کنیم، این معادله را می توان انتگرال گیری نمود. نتیجه چنین است

$$\left(\frac{dV}{dy} \right)^2 = \frac{4J}{\epsilon_0} \sqrt{\frac{m}{2e}} V^{1/2} + c \quad (15-5)$$

در $V = 0$ ، $y = 0$ و از معادله (۱۵-۵)، $dV/dy = 0$ ، بنابراین $c = 0$. معادله (۱۵-۵) چنین می شود

$$V^{-1/2} dV = \sqrt{\frac{J}{\epsilon_0}} \left(\frac{m}{2e} \right)^{1/2} dy \quad (16-5)$$

با انتگرال گیری از سمت چپ معادله (۱۶-۵) از $V = 0$ تا V و از سمت راست آن از $y = 0$ تا d بدست می آوریم

$$\frac{2}{3} V^{3/2} = \sqrt{\frac{J}{\epsilon_0}} \left(\frac{m}{2e} \right)^{1/2} d$$

یا

$$J = \frac{4\epsilon_0}{9d^2} \sqrt{\frac{2e}{m}} V^{3/2} \quad (A/m^2) \quad (17-5)$$

معادله (۱۷-۵) بیان می دارد که چگالی جریان انتقالی در دیود خلا^۱ با بار فضائی محدود شده با توان $\frac{2}{3}$ اختلاف پتانسیل بین آند و کاتد، متناسب است. این رابطه غیر خطی به قانون چایلد-لانگموئر^۲ معروف است.

۱- Child-Langmuir law

۲-۵ چگالی جریان و قانون اهم

در مورد جریانهای هدایتی، ممکن است بیش از یک نوع حامل بار (الکترون ها، حفره ها و یون ها) با سرعت های رانشی متفاوت موجود باشد. در این صورت معادله (۳-۵) باید به صورت زیر تعمیم یابد:

$$J = \sum_i N_i q_i u_i \quad (A/m^2) \quad (18-5)$$

به طوری که در بخش ۱-۵ خاطر نشان گردید، جریانهای هدایتی، نتیجه حرکت رانشی حاملهای بار تحت تأثیر یک میدان الکتریکی اعمال شده، می باشند. اتم ها خنثی می مانند ($\rho = 0$). به طور تحلیلی می توان توجیه نمود که در مورد اکثر مواد هادی، سرعت رانش متوسط، مستقیماً با شدت میدان الکتریکی متناسب است. در مورد هادیهای فلزی می نویسیم

$$u = -\mu_e E \quad (m/s) \quad (19-5)$$

که در آن μ_e ، ضریب تحرک الکترونی است و با $(m^2/V \cdot s)$ سنجیده می شود. ضریب تحرک الکترونی برای مس $(m^2/V \cdot s)$ 3.7×10^{-2} است. برای آلومینیوم $(m^2/V \cdot s)$ 1.4×10^{-2} و برای نقره $(m^2/V \cdot s)$ 5.7×10^{-2} می باشد. از معادلات (۳-۵) و (۱۹-۵) داریم

$$J = -\rho_e \mu_e E \quad (20-5)$$

که در آن $\rho_e = -Ne$ چگالی بار الکترون های رانشی بوده و یک کمیت منفی است. معادله (۲۰-۵) را می توان به صورت زیر باز نوشت:

$$J = \sigma E \quad (A/m^2) \quad (21-5)$$

که در آن ثابت تناسب $\sigma = -\rho_e \mu_e$ یک پارامتر اساسی ماکروسکوپی محیط به نام رسانندگی^۱ است. ضریب هدایت نیمه هادیها به تمرکز و تحرک الکترون ها و حفره ها بستگی دارد:

$$\sigma = -\rho_e \mu_e + \rho_h \mu_h \quad (22-5)$$

که در آن زیر نویس h ، حفره را نشان می دهد. در حالت کلی، $\mu_e \neq \mu_h$. مقادیر نوعی برای ژرمانیوم عبارتند از $\mu_e = 0.138$ ، $\mu_h = 0.12$ ؛ و برای سیلیکون $\mu_e = 0.12$ ، $\mu_h = 0.03$ است. معادله (۲۱-۵) رابطه اساسی محیط هادی است. مواد همه سویکسان را که در مورد آنها رابطه خطی معادله (۲۱-۵) صادق است، محیط اهمی می نامند. واحد σ ، آمپر بر ولت-متر $(A/V \cdot m)$ یا زیمنس^۲ بر متر (S/m) است. مس که پرکاربردترین هادی است، دارای ضریب

۱- Mobility

۲- Conductivity

۳- Siemens

هدایت $5.8 \times 10^7 (S/m)$ است. از سوی دیگر رسانندگی ژرمانیوم در حدود $2.2 (S/m)$ و رسانندگی سیلیکون $1.6 \times 10^{-3} (S/m)$ است. رسانندگی نیمه‌هادیها به شدت به درجه حرارت بستگی دارد (افزایش می‌یابد). رسانندگی لاستیک سخت که عایق خوبی است، فقط $10^{-15} (S/m)$ می‌باشد. ضمیمه ب-۴، رسانندگی چند ماده پر مصرف دیگر را بدست می‌دهد. اما توجه داشته باشید که برعکس ضریب دی‌الکتریک، رسانندگی مواد، در دامنه فوق‌العاده وسیعی تغییر می‌کند. عکس رسانندگی را ضریب مقاومت می‌نامند و واحد آن اهم-متر $(\Omega \cdot m)$ است. ترجیح می‌دهیم رسانندگی را بکار ببریم و حقیقتاً هیچ نیاز مبرمی به استفاده از هر دو ضریب رسانندگی و ضریب مقاومت نیست.

از نظریه مدار، قانون اهم را به یاد می‌آوریم که V_{12} ، ولتاژ دو سر مقاومت R ، که در آن جریان I از نقطه ۱ به نقطه ۲ عبور می‌کند، برابر RI است؛ یعنی،

$$V_{12} = RI \quad (23-5)$$

در این معادله، R معمولاً قطعه‌ای از یک ماده هادی با طول مشخص V_{12} و ولتاژ بین دو سر ۱ و ۲، I جریان کل گذرنده از سر ۱ به سمت سر ۲، از یک سطح مقطع محدود می‌باشد.

معادله (۲۳-۵)، یک رابطه نقطه‌ای نیست. اگر چه شباهت اندکی بین معادله (۲۱-۵) و معادله (۲۳-۵) وجود دارد ولی معادله اول را غالباً شکل نقطه‌ای قانون اهم می‌گویند. این معادله در تمام نقاط فضا صادق است ولی می‌تواند تابعی از مختصات فضایی باشد.

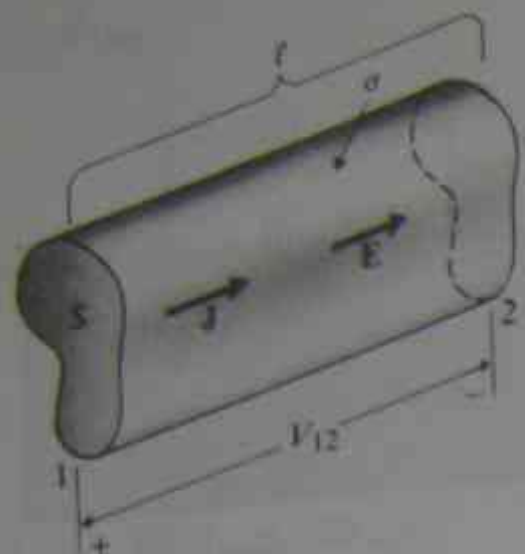
گیریم با استفاده از شکل نقطه‌ای قانون اهم، رابطه بین ولتاژ و جریان یک قطعه از ماده‌ای همگن با رسانندگی σ ، طول ℓ و سطح مقطع یکنواخت S را مطابق شکل ۳-۵، بدست آوریم. در درون ماده هادی، $J = \sigma E$ و J و E هر دو در جهت عبور جریان هستند. اختلاف پتانسیل یا ولتاژ بین سرهای ۱ و ۲ برابر است با: \uparrow

$$V_{12} = E\ell \quad \text{یا}$$

$$E = \frac{V_{12}}{\ell} \quad (24-5)$$

کل جریان عبارت است از:

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = JS$$



شکل ۳-۵ هادی همگن با سطح مقطع ثابت

یا

$$J = \frac{I}{S} \quad (25-5)$$

با استفاده از معادلات (۲۴-۵) و (۲۵-۵) در معادله (۲۱-۵)، بدست می‌آوریم:

$$\frac{I}{S} = \sigma \frac{V_{12}}{\ell}$$

یا

$$V_{12} = \left(\frac{\ell}{\sigma S} \right) I = RI \quad (26-5)$$

که همان معادله (۲۳-۵) است. از معادله (۲۶-۵)، فرمول مقاومت یک قطعه مستقیم از ماده‌ای همگن با سطح مقطع یکنواخت در جریان دائم (d.c.) بدست می‌آید:

$$R = \frac{\ell}{\sigma S} \quad (\Omega) \quad (27-5)$$

می‌توانستیم از معادله (۲۳-۵) به عنوان قانون تجربی اهم شروع کرده و آن را در مورد یک هادی همگن به طول ℓ و سطح مقطع یکنواخت S بکار ببریم. با استفاده از فرمول معادله (۲۷-۵) می‌توانستیم رابطه نقطه‌ای معادله (۲۱-۵) را بدست آوریم.

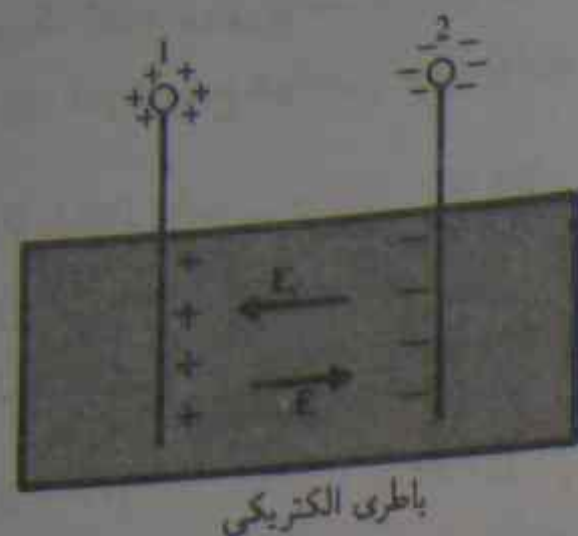
مثال ۲-۵ مقاومت d-c سیمی به طول یک کیلومتر و شعاع یک میلی‌متر را تعیین کنید (الف) اگر سیم از جنس مس باشد و (ب) اگر سیم از جنس آلومینیوم باشد.

حل چون سطح مقطع هادیهای مورد نظر یکنواخت است، معادله (۲۷-۵) بکار می‌رود.

الف) در مورد سیم مسی، $\sigma_{cu} = 5.8 \times 10^7 (S/m)$ ،

$$\ell = 10^3 \text{ (m)}, \quad S = \pi(10^{-3})^2 = 10^{-6} \pi \text{ (m}^2\text{)}$$

۳-۵ نیروی محرکه الکتریکی و قانون ولتاژ کیرشف



شکل ۴-۵ میدانهای الکتریکی در درون یک باتری الکتریکی

معادله (۵-۳۲) بیان می‌دارد که در یک مدار بسته جریان دائم نمی‌تواند توسط یک میدان الکتریسیته ساکن در جهت یکسانی باقی بماند. جریان دائم در یک مدار، نتیجه حرکت حاملهای بار است که در مسیر خود با اتمها برخورد کرده و در مدار انرژی تلف می‌کنند. این انرژی باید از میدانی غیرایجابایی آمده باشد زیرا یک حامل بار که مدار بسته‌ای را در یک میدان ایجابایی کامل می‌کند هیچ نوع انرژی دریافت یا تلف نمی‌نماید. منبع میدان غیرایجابایی می‌تواند باتریهای الکتریکی (تبدیل انرژی شیمیایی به انرژی الکتریکی)، مولدهای الکتریکی^۱ (تبدیل انرژی مکانیکی به انرژی الکتریکی)، ترموکوپلها^۲ (تبدیل انرژی حرارتی به انرژی الکتریکی)، سلول فتوولتائیک^۳ (تبدیل انرژی نوری به انرژی الکتریکی) یا دیگر وسایل باشد. این منابع انرژی الکتریکی، وقتی به یک مدار الکتریکی متصل شوند، نیروی محرک حاملهای بار را تأمین می‌کنند. این نیرو خود را به عنوان یک شدت میدان الکتریکی متأثر^۴ معادل E_i ظاهر می‌سازد.

یک باتری الکتریکی با الکترودهای ۱ و ۲ را که به طور شمانیک در شکل ۴-۵ نشان داده شده است در نظر بگیرید. کنشهای شیمیایی باعث ایجاد توده‌ای از بارهای مثبت و منفی، به ترتیب در الکترودهای ۱ و ۲ می‌شوند. این بارها، شدت میدان الکتریسیته ساکن E را در درون و بیرون باتری بدست می‌دهند. در درون باتری، E باید از نظر اندازه معادل و از لحاظ جهت مخالف E_i غیرایجابایی تولیدشده توسط کنشهای شیمیایی باشد، زیرا هیچ جریانی از باتری مدار باز نمی‌گذرد و نیروی خالص مؤثر بر حاملهای بار باید صفر باشد. انتگرال خطی شدت میدان متأثر E_i ، از الکتروده منفی تا الکتروده مثبت (از الکتروده ۲ تا الکتروده ۱ در شکل ۴-۵)، در درون باتری را، عادتاً نیروی محرکه الکتریکی^۱ (emf) باتری می‌نامند. واحد SI در مورد emf، ولت می‌باشد

۱- Electric generator

۲- Thermocouple

۳- Photovoltaic cell

۴- Impressed electric field intensity

† electromotance نیز خوانده می‌شود.

داریم

$$R_{cu} = \frac{\ell}{\sigma_{cu} S} = \frac{1.0^2}{5.8 \times 10^7 \times 10^{-6} \pi} = 5.49 \quad (\Omega)$$

(ب) در مورد سیم آلومینیومی، $\sigma_{al} = 3.54 \times 10^7 (S/m)$

$$R_{al} = \frac{\ell}{\sigma_{al} S} = \frac{\sigma_{cu}}{\sigma_{al}} R_{cu} = \frac{5.8}{3.54} \times 5.49 = 8.99 \quad (\Omega)$$

G، رسانائی یا عکس مقاومت، در ترکیب موازی مقاومتها مفید است واحد رسانائی (Ω^{-1})

یا زیمنس (S) است.

$$G = \frac{1}{R} = \sigma \frac{S}{\ell} \quad (S) \quad (28-5)$$

از نظریه مدار مطالب زیر را می‌دانیم:

الف) وقتی که مقاومتهای R_1 و R_2 به طور سری متصل می‌شوند (دارای جریان یکسان)، مقاومت کل R برابر است با

$$R_{sr} = R_1 + R_2 \quad (29-5)$$

ب) وقتی که مقاومتهای R_1 و R_2 به طور موازی متصل می‌شوند (دارای ولتاژ یکسان)، داریم

$$\frac{1}{R_{||}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (30-5 \text{ الف})$$

یا

$$G_{||} = G_1 + G_2 \quad (30-5 \text{ ب})$$

۳-۵ نیروی محرکه الکتریکی و قانون ولتاژ کیرشف

در بخش ۲-۳ نشان دادیم که میدان الکتریکی ساکن، ایجابایی است و انتگرال خطی عددی شدت میدان الکتریکی ساکن به دور هر مسیر بسته صفر است؛ یعنی

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (31-5)$$

در یک ماده اهمی، $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ و معادله (۳۱-۵) به صورت زیر درمی‌آید

$$\oint_C \frac{1}{\sigma} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (32-5)$$

۱- Conductance

و یک emf نیروئی بر حسب نیوتن نیست. نیروی محرکه الکتریکی با \mathcal{V} نشان داده شده و سنجشی برای قدرت منبع غیرباقی است. داریم

$$\mathcal{V} = \int_{\gamma} \mathbf{E}_i \cdot d\ell = - \int_{\gamma} \mathbf{E} \cdot d\ell \quad (۳۳-۵)$$

شدت میدان الکتریسته ساکن ابقایی \mathbf{E} ، معادله (۳۱-۵) را برآورده می سازد:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\ell = \int_{\gamma} \mathbf{E} \cdot d\ell + \int_{\gamma} \mathbf{E} \cdot d\ell = 0 \quad (۳۴-۵)$$

با ترکیب معادلات (۳۳-۵) و (۳۴-۵)، داریم

$$\mathcal{V} = \int_{\gamma} \mathbf{E} \cdot d\ell \quad (۳۵-۵)$$

یا

$$\mathcal{V} = V_{12} = V_1 - V_2 \quad (۳۶-۵)$$

در معادلات (۳۵-۵) و (۳۶-۵)، emf یک منبع را، به صورت انتگرال خطی \mathbf{E} ابقایی بیان کرده، و آن را خیز ولتاژ تعبیر می نماییم. با وجود طبیعت غیرباقی \mathbf{E}_i ، emf را می توان به عنوان اختلاف پتانسیل بین سرهای مثبت و منفی بیان نمود. این همان کاری است که برای رسیدن به معادله (۲۴-۵) انجام دادیم.

هنگامی که مقاومتی به صورت شکل ۳-۵ بین سرهای ۱ و ۲ باطری وصل شده و مدار را کامل نماید، شدت میدان الکتریکی کل (\mathbf{E} الکتریسته ساکن، ناشی از توده بار و نیز \mathbf{E}_i متأثر ناشی از کنش شیمیائی) باید در شکل نقطه ای قانون اهم مورد استفاده قرار گیرد. به جای معادله (۲۱-۵) داریم

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_i) \quad (۳۷-۵)$$

که در آن \mathbf{E}_i فقط در درون باطری موجود است، درحالی که \mathbf{E} هم در درون و هم در بیرون منبع مقدار غیرصفر دارد. از معادله (۳۷-۵) بدست می آید،

$$\mathbf{E} + \mathbf{E}_i = \frac{\mathbf{J}}{\sigma} \quad (۳۸-۵)$$

انتگرال گیری خطی عددی معادله (۳۸-۵) به دور این مدار بسته، با توجه به معادلات (۳۱-۵)

۱- Voltage rise

۲-۵ معادله پیوستگی و قانون جریان کیرشف

و (۳۳-۵) نتیجه می دهد:

$$\mathcal{V} = \oint_C (\mathbf{E} + \mathbf{E}_i) \cdot d\ell = \oint_C \frac{1}{\sigma} \mathbf{J} \cdot d\ell \quad (۳۹-۵)$$

معادله (۳۹-۵)، باید با معادله (۳۲-۵) مقایسه شود؛ معادله (۳۲-۵) وقتی صادق است که هیچ منبع غیرباقی وجود نداشته باشد. اگر مقاومت دارای رسانندگی σ ، طول ℓ و سطح مقطع یکتواخت S باشد، $J = I/S$ و سمت راست معادله (۳۹-۵) برابر RI می شود. داریم

$$\mathcal{V} = RI \quad (۴۰-۵)$$

اگر بیش از یک منبع نیروی محرکه الکتریکی و بیش از یک مقاومت (از جمله مقاومت های درونی منابع) در یک مسیر بسته وجود داشته باشد، معادله (۴۰-۵) به صورت زیر تعمیم می یابد.

$$\sum_j \mathcal{V}_j = \sum_k R_k I_k \quad (V) \quad (۴۱-۵)$$

معادله (۴۱-۵)، عبارتی برای قانون ولتاژ کیرشفاست. این قانون، بیان می دارد که در اطراف هر مسیر بسته از هر مدار الکتریکی، جمع جبری emf ها (خیز ولتاژ) معادل جمع جبری افت ولتاژها در دو سر مقاومتها است، و در مورد هر مسیر بسته از یک شبکه صادق است. جهت دنبال کردن مسیر می تواند به دلخواه تعیین شود و لازم نیست جریان مقاومتها مساوی باشد. قانون ولتاژ کیرشف، اساس تحلیل حلقه در نظریه مدار است.

۴-۵ معادله پیوستگی و قانون جریان کیرشف

اصل بقای بار، یکی از اصول موضوعی اساسی فیزیک است. بار الکتریکی نمی تواند تولید یا نابود شود؛ همه بارهای ساکن یا متحرک باید در تمامی زمانها به حساب آیند. حجم دلخواه V را که با سطح S احاطه شده است، در نظر بگیرید. بار خالص Q در درون این ناحیه وجود دارد. اگر جریان خالص I از سطح به سمت بیرون ناحیه عبور کند، بار درون حجم باید با نرخ برابر جریان، کاهش یابد. برعکس، اگر جریان خالصی از سطح، به سمت درون ناحیه عبور کند، بار درون حجم باید با نرخ برابر جریان افزایش یابد. جریان خارج شونده از ناحیه، کل شار خروجی

۱- Kirchhoff's voltage law

† فرض می کنیم مقاومت درونی باطری قابل صرف نظر کردن باشد؛ در غیر این صورت، تأثیر آن در معادله (۴۰-۵) باید به حساب آید. منبع ولتاژ ایده آل منبعی است که ولتاژ دو سر آن برابر emf و مستقل از جریان گذرنده از آن است. این مطلب ایجاب می نماید که مقاومت درونی منبع ولتاژ ایده آل صفر باشد.

بردار چگالی جریان از سطح S است. داریم

$$I = \oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{dQ}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dv \quad (42-5)$$

با توسل به قضیه دیورژانس، معادله (۲-۱۱۵)، انتگرال سطحی \mathbf{J} را به انتگرال حجمی $\nabla \cdot \mathbf{J}$ تبدیل می‌کنیم. در مورد یک حجم ساکن بدست می‌آید

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{J} dv = - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dv \quad (43-5)$$

وقتی می‌خواهیم مشتق زمانی ρ را به درون انتگرال حجمی منتقل کنیم، لازم است از مشتق پاره‌ای استفاده شود. زیرا ρ می‌تواند تابعی از مختصات فضائی و زمان، هر دو باشد. چون معادله (۴۳-۵) باید مستقل از انتخاب V برقرار باشد، عبارتهای مورد انتگرال‌گیری باید با هم معادل باشند. از این رو داریم

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (\text{A/m}^2) \quad (44-5)$$

این رابطه نقطه‌ای نتیجه‌شده از اصل بقای بار را معادله پیوستگی می‌نامند.

در جریانهای دائم، چگالی بار با زمان تغییر نمی‌کند، $\partial \rho / \partial t = 0$. معادله (۴۴-۵) به صورت زیر در می‌آید

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (45-5)$$

از این رو، جریانهای الکتریکی دائم، بدون دیورژانس یا سلونوئیدی هستند. معادله (۴۵-۵) رابطه‌ای نقطه‌ای است و در نقاطی که $\rho = 0$ است (عدم وجود منبع جریان) نیز صادق است. این بدان معنی است که خطوط میدان یا خطوط جریانی جریانهای دائم، روی خود بسته می‌شوند، برعکس، خطوط شدت میدان الکتریسیته ساکن از بارها شروع و به آنها ختم می‌شوند. معادله (۴۵-۵) روی هر سطح بسته به شکل انتگرالی زیر منجر می‌شود:

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (46-5)$$

که می‌تواند بصورت زیر نوشته شود

$$\sum_j I_j = 0 \quad (\text{A}) \quad (47-5)$$

معادله (۴۷-۵) عبارتی برای قانون جریان کیرشف است، و بیان می‌دارد که جمع جبری تمام

۵-۵ اتلاف توان و قانون ژول

جریانهایی که از یک گره یک مدار الکتریکی خارج می‌شوند، صفر است. قانون جریان کیرشف، اساس تحلیل گره در نظریه مدار است. در بخش ۳-۶ بیان گردید که بارهای قرار داده شده در درون یک هادی، به سطح هادی حرکت کرده و خود را چنان توزیع می‌نمایند که تحت شرایط تعادلی، در داخل داشته باشیم $\rho = 0$ و $\mathbf{E} = 0$. اکنون در موقعیتی هستیم که این بیان را ثابت کرده و زمان رسیدن تعادل را محاسبه نماییم. با ترکیب قانون اهم، معادله (۵-۲۱)، و معادله پیوستگی و فرض σ ثابت، داریم:

$$\sigma \nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (48-5)$$

در یک محیط ساده، $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \epsilon$ ، و معادله (۴۸-۵) به صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\sigma}{\epsilon} \rho = 0 \quad (49-5)$$

حل معادله (۴۹-۵) برابر است با

$$\rho = \rho_0 e^{-(\sigma/\epsilon)t} \quad (\text{C/m}^3) \quad (50-5)$$

که در آن، ρ_0 چگالی بار اولیه در $t = 0$ است. ρ_0 و ρ هر دو می‌توانند تابعی از مختصات فضائی باشند و معادله (۵۰-۵) بیانگر این مطلب است که چگالی بار در یک نقطه خاص، به صورت نمائی با زمان کاهش می‌یابد. چگالی بار اولیه ρ_0 در زمانی معادل

$$\tau = \frac{\epsilon}{\sigma} \quad (\text{s}) \quad (51-5)$$

به $1/e$ یا 36.8% مقدار خود کاهش می‌یابد. ثابت زمانی τ را زمان سستی^۱ می‌نامند. در یک هادی خوب مثل مس - $\sigma = 5.8 \times 10^7 (\text{S/m})$ ، $\epsilon = 8.85 \times 10^{-12} (\text{F/m})$ ، $\tau \cong \epsilon / \sigma = 1.5 \times 10^{-19} (\text{s})$ ، یعنی در واقع، یک زمان بسیار کوتاه. زمان گذرا آنقدر کوتاه است که در تمام موارد عملی، ρ در درون هادی می‌تواند صفر در نظر گرفته شود. معادله (۳-۶۹) را در بخش ۳-۶ ببینید. زمان سستی یک عایق خوب، بینهایت نیست، اما می‌تواند ساعتها یا روزها به طول بیانجامد.

۵-۵ اتلاف توان و قانون ژول

در بخش ۵-۱ نشان دادیم که تحت تاثیر یک میدان الکتریکی، الکترون‌های هدایتی درون

۱. Relaxation time

† این عبارت جریانهای مولدهای جریان در گره را در صورت وجود شامل می‌شود. مولد جریان ایده‌آل، مولدی است که جریان آن مستقل از ولتاژ دو سر آن است. این ایجاب می‌کند که مقاومت درونی منبع جریان ایده‌آل بینهایت باشد.

هادی به‌طور ماکروسکوپی تحت حرکت رانشی قرار می‌گیرند. از نظر میکروسکوپی، این الکترون‌ها با اتم‌های موجود در شبکه کریستالی برخورد می‌کنند. از این رو انرژی از میدان الکتریکی به اتم‌های تحت ارتعاش حرارتی منتقل می‌گردد. کار انجام شده Δw ، توسط میدان الکتریکی E در حرکت دادن بار q تا فاصله $\Delta \ell$ ، برابر $qE \cdot (\Delta \ell)$ است که متناظر با توان

$$p = \frac{\Delta w}{\Delta t} = qE \cdot u \quad (52-5)$$

است که در آن u سرعت رانشی است. کل توان تحویلی به تمام حامل‌های بار موجود در حجم dv برابر است با

$$dP = \sum_i p_i = E \cdot \left(\sum_i N_i q_i u_i \right) dv$$

که با در نظر گرفتن معادله (۱۸-۵) چنین می‌شود:

$$dP = E \cdot J dv$$

یا

$$\frac{dP}{dv} = E \cdot J \quad (W/m^3) \quad (53-5)$$

از این رو، تابع نقطه‌ای $E \cdot J$ ، چگالی توان تحت شرایط جریان دائم است. به‌ارزای حجم مشخص V ، کل توان الکتریکی تبدیل شده به حرارت برابر است با

$$P = \int_V E \cdot J dv \quad (W) \quad (54-5)$$

این معادله را قانون ژول^۱ می‌نامند. (دقت کنید که واحد SI مربوط به P ، وات است، نه ژول، که واحد انرژی یا کار است.) معادله (۵۳-۵) رابطه نقطه‌ای متناظر است.

در یک هادی با سطح مقطع ثابت، $dv = ds dl$ و درحالی‌که dl در جهت J اندازه‌گیری می‌شود. معادله (۵۴-۵) به‌صورت زیر می‌تواند نوشته شود:

$$P = \int_L E dl \int_S J ds = VI$$

که در آن I ، جریان هادی است. از آنجایی که $V = RI$ است، داریم:

$$P = I^2 R \quad (W) \quad (55-5)$$

۵-۶ شرایط مرزی چگالی جریان

البته معادله (۵-۵۵)، عبارت آشنای توان اهمی است و حرارت تلف شده در مقاومت R را در واحد زمان نشان می‌دهد.

۵-۶ شرایط مرزی چگالی جریان

هنگامی که جریان به‌طور مایل از فصل مشترک بین دو محیط با رسانندگی‌های متفاوت می‌گذرد، بردار چگالی جریان، هم در جهت و هم در اندازه تغییر می‌کند. به روشی مشابه روش بکاررفته در بخش ۳-۱ در بدست آوردن شرایط مرزی D و E ، می‌توان مجموعه شرایط مرزی J را نیز بدست آورد. معادلات حاکم بر چگالی جریان دائم J ، در غیاب منبع انرژی غیرایجابی عبارتند از

معادلات حاکم بر چگالی جریان دائم	
شکل انتگرالی	شکل دیفرانسیلی
$\oint_S J \cdot ds = 0$	$\nabla \cdot J = 0$
$\oint_C \frac{1}{\sigma} J \cdot dl = 0$	$\nabla \times \left(\frac{J}{\sigma} \right) = 0$

$$(56-5)$$

$$(57-5)$$

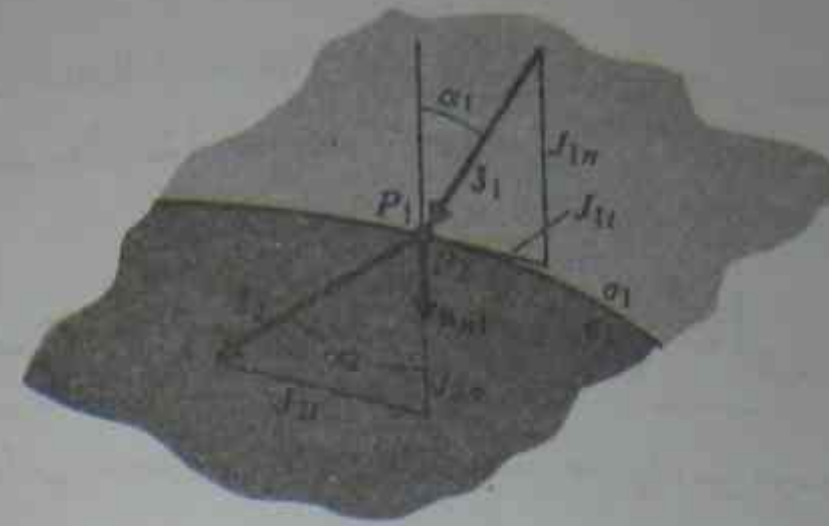
معادله دیورژانس، مشابه معادله (۴۵-۵) است و معادله کرل از ترکیب قانون اهم ($J = \sigma E$) و $\nabla \times E = 0$ بدست آمده است. با بکارگیری معادلات (۵۶-۵) و (۵۷-۵) در فصل مشترک بین دو محیط اهمی با رسانندگی‌های σ_1 و σ_2 ، شرایط مرزی مؤلفه‌های عمودی و مماسی J بدست می‌آیند.

بدون اینکه واقعاً جعبه کوچکی را در فصل مشترک، مانند شکل ۳-۲۳ بسازیم، از بخش ۳-۱ می‌دانیم که مؤلفه عمودی یک میدان برداری بدون دیورژانس پیوسته است. از این رو با توجه به $\nabla \cdot J = 0$ داریم

$$J_{1n} = J_{2n} \quad (A/m^2) \quad (58-5)$$

به همین ترتیب، مؤلفه مماسی یک میدان برداری بدون کرل روی فصل مشترک پیوسته است. از $\nabla \times (J/\sigma) = 0$ نتیجه می‌گیریم که

$$\frac{J_{1t}}{J_{2t}} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \quad (59-5)$$



شکل ۵-۵ شرایط مرزی در فصل مشترک بین دو محیط هادی (مثال ۵-۳)

معادله (۵-۵۱) بیان می‌دارد که نسبت مؤلفه‌های مماسی J در دو طرف فصل مشترک برابر نسبت رسانندگی هاست. از مقایسه شرایط مرزی معادلات (۵-۵۸) و (۵-۵۹) در مورد چگالی جریان دائم در محیط‌های اهمی، به ترتیب با شرایط مرزی (۳-۱۲۳) و (۳-۱۱۹) در مورد چگالی شار الکتریسته ساکن در فصل مشترک محیط‌های دی‌الکتریک که در آن بارهای آزاد وجود ندارد، متوجه تشابه دقیق J و σ با D و ϵ می‌شویم.

مثال ۵-۳ دو محیط هادی با رسانندگی‌های σ_1 و σ_2 توسط فصل مشترکی مطابق شکل ۵-۵ از یکدیگر جدا شده‌اند. چگالی جریان دائم در نقطه P_1 از محیط ۱، اندازه‌ای برابر J_1 دارد و با امتداد قائم زاویه α_1 می‌سازد. اندازه و جهت چگالی جریان را در نقطه P_2 از محیط ۲ تعیین کنید.

حل با استفاده از معادلات (۵-۵۸) و (۵-۵۹) داریم

$$J_1 \cos \alpha_1 = J_2 \cos \alpha_2 \quad (۵-۶۰)$$

$$\sigma_2 J_1 \sin \alpha_1 = \sigma_1 J_2 \sin \alpha_2 \quad (۵-۶۱)$$

تقسیم معادله (۵-۶۱) بر معادله (۵-۶۰) نتیجه می‌دهد

$$\frac{\tan \alpha_2}{\tan \alpha_1} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \quad (۵-۶۲)$$

اگر محیط ۱ هادی بمراتب بهتری نسبت به محیط ۲ باشد، $\sigma_1 \gg \sigma_2$ یا $\sigma_2/\sigma_1 \rightarrow 0$ ، $\alpha_2 \rightarrow 0$ می‌گردد و J_2 تقریباً عمود بر فصل مشترک خواهد بود (عمود بر سطح هادی).

۵-۶ شرایط مرزی چگالی جریان

(خوب). اندازه J_2 برابر است با

$$J_2 = \sqrt{J_{2n}^2 + J_{2t}^2} = \sqrt{(J_1 \sin \alpha_1)^2 + (J_1 \cos \alpha_1)^2}$$

$$= \left[\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} J_1 \sin \alpha_1 \right)^2 + (J_1 \cos \alpha_1)^2 \right]^{1/2}$$

یا

$$J_2 = J_1 \left[\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \sin \alpha_1 \right)^2 + \cos^2 \alpha_1 \right]^{1/2} \quad (۵-۶۳)$$

با بررسی شکل ۵-۵ آیا می‌توانید تشخیص دهید که از دو محیط ۱ و ۲ کدام یک هادی بهتری است؟

در یک محیط هادی همگن، شکل دیفرانسیلی معادله (۵-۵۷) به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\nabla \times J = 0 \quad (۵-۶۴)$$

از بخش ۲-۱۱ می‌دانیم که یک میدان برداری بدون کرل می‌تواند به صورت گرادیان یک میدان پتانسیل عددی بیان شود. گیریم چنین بنویسیم

$$J = -\nabla \psi \quad (۵-۶۵)$$

جایگذاری معادله (۵-۶۵) در $\nabla \cdot J = 0$ ، یک معادله لاپلاس برحسب ψ را نتیجه می‌دهد؛ یعنی

$$\nabla^2 \psi = 0 \quad (۵-۶۶)$$

بنابراین با تعیین ψ (A/m) از معادله (۵-۶۶) و شرایط مرزی مناسب آن، و سپس یافتن J از روی منهای گرادیان آن، درست به همان روشی که مسئله‌ای در الکتریسته ساکن حل می‌شود، می‌توان به حل یک مسئله در عبور جریان دائم پرداخت. در واقع، ψ و پتانسیل الکتریسته ساکن بسادگی به هم ارتباط می‌یابند: $\psi = \sigma V$. همان طوری که در بخش ۵-۱ نشان داده شد، این شباهت میان الکتریسته ساکن و میدانهای جریان دائم، اساس استفاده از مخزن الکتریکی برای نگاشت توزیع پتانسیل مسائل مشکل مقدار مرزی الکتریسته ساکن می‌باشد.[†]

[†] برای مثال، جلد اول *Electromagnetic Fields*: نگاشت میدانها، نوشته E. Weber، صفحات ۱۸۷ تا ۱۹۳، چاپ John Wiley and Sons ۱۹۵۰ را ببینید.

هنگامی که جریان دائمی از مرز بین ۲ دی‌الکتریک متفاوت با اتلاف (دی‌الکتریک‌هایی با گذردهی ϵ_1 و ϵ_2 و رسانندگی‌های معین σ_1 و σ_2) عبور می‌کند، مؤلفهٔ مماسی میدان الکتریکی در عبور از فصل مشترک مطابق معمول پیوسته است؛ یعنی $E_{1t} = E_{2t}$ که معادل با معادلهٔ (۵-۵۹) است. اما مؤلفهٔ عمودی میدان الکتریکی باید در هر لحظه معادلهٔ (۵-۵۸) و معادلهٔ (۳-۱۲۱) ب) را برآورده نماید. لازم است،

$$J_{1n} = J_{2n} \rightarrow \sigma_1 E_{1n} = \sigma_2 E_{2n} \quad (۶۷-۵)$$

$$D_{1n} - D_{2n} = \rho_s \rightarrow \epsilon_1 E_{1n} - \epsilon_2 E_{2n} = \rho_s \quad (۶۸-۵)$$

که در آن جهت بردار واحد عمودی، از محیط ۲ به سمت خارج است. از این رو، به جز در حالتی که $\sigma_2/\sigma_1 = \epsilon_2/\epsilon_1$ ، یک بار سطحی نیز باید در فصل مشترک موجود باشد. از معادلات (۵-۶۷) و (۵-۶۸) در می‌یابیم

$$\rho_s = \left(\epsilon_1 \frac{\sigma_2}{\sigma_1} - \epsilon_2 \right) E_{2n} = \left(\epsilon_1 - \epsilon_2 \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right) E_{1n} \quad (۶۹-۵)$$

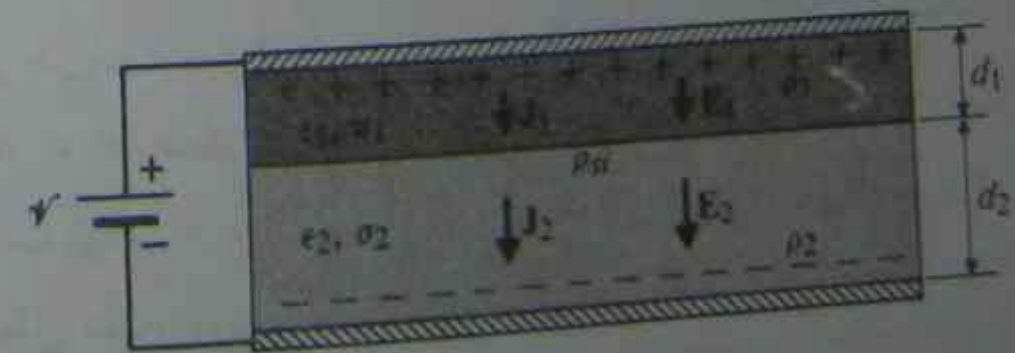
بار دیگر، اگر محیط ۲ نسبت به محیط ۱ هادی به مراتب بهتری باشد، ($\sigma_2 \gg \sigma_1$ یا $\sigma_1/\sigma_2 \rightarrow 0$)، معادلهٔ (۵-۶۹) به‌طور تقریبی چنین می‌شود

$$\rho_s = \epsilon_1 E_{1n} = D_{1n} \quad (۷۰-۵)$$

که مشابه معادلهٔ (۳-۱۲۲) است.

مثال ۴-۵ یک emf V به دو سر یک خازن صفحه‌ای موازی به مساحت S اعمال شده است. فضای بین صفحات هادی با دودی الکتریک متفاوت با اتلاف، به‌ترتیب به ضخامت‌های d_1 و d_2 ، گذردهی‌های ϵ_1 و ϵ_2 و رسانندگی‌های σ_1 و σ_2 پر شده است. (الف) چگالی جریان بین صفحات، (ب) شدت میدان الکتریکی در هر دودی الکتریک و (پ) چگالی بارهای سطحی روی صفحات و فصل مشترک را تعیین کنید.

حل به شکل ۵-۶ مراجعه کنید.



شکل ۵-۶ خازن صفحه‌ای موازی با دودی الکتریک با اتلاف (مثال ۴-۵)

۵-۶ شرایط مرزی چگالی جریان

(الف) پیوستگی مؤلفهٔ عمودی J تضمین می‌کند که چگالی‌های جریان و بنابراین جریانها در هر دو محیط یکسان هستند. از قانون ولتاژ کیرشف داریم

$$V = (R_1 + R_2)I = \left(\frac{d_1}{\sigma_1 S} + \frac{d_2}{\sigma_2 S} \right) I$$

از این رو

$$J = \frac{I}{S} = \frac{V}{\left(\frac{d_1}{\sigma_1} + \frac{d_2}{\sigma_2} \right)} = \frac{\sigma_1 \sigma_2 V}{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2} \quad (\text{A/m}^2) \quad (۷۱-۵)$$

(ب) برای تعیین شدت میدان الکتریکی E_1 و E_2 در هر دو محیط، به دو معادله نیاز داریم. با چشم‌پوشی از اثرات لبه‌ای در کناره‌های صفحات، داریم

$$V = E_1 d_1 + E_2 d_2 \quad (۷۲-۵)$$

و

$$\sigma_1 E_1 = \sigma_2 E_2 \quad (۷۳-۵)$$

معادلهٔ (۷۳-۵) از $J_1 = J_2$ بدست آمده است. پس از حل معادلات (۷۲-۵) و (۷۳-۵) بدست می‌آوریم

$$E_1 = \frac{\sigma_2 V}{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2} \quad (\text{V/m}) \quad (۷۴-۵)$$

و

$$E_2 = \frac{\sigma_1 V}{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2} \quad (\text{V/m}) \quad (۷۵-۵)$$

(پ) چگالی بارهای سطحی روی صفحات بالایی و پایینی با استفاده از معادلهٔ (۵-۷۰) تعیین می‌شود:

$$\rho_{s1} = \epsilon_1 E_1 = \frac{\epsilon_1 \sigma_2 V}{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2} \quad (\text{C/m}^2) \quad (۷۶-۵)$$

$$\rho_{s2} = -\epsilon_2 E_2 = -\frac{\epsilon_2 \sigma_1 V}{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2} \quad (\text{C/m}^2) \quad (۷۷-۵)$$

علامت منفی در معادلهٔ (۷۷-۵) به این دلیل گذاشته می‌شود که بردار عمودی و به‌سمت خارج، در صفحهٔ پایینی، در جهت مخالف E_2 است.

معادلهٔ (۵-۶۹)، می‌تواند برای یافتن چگالی بار سطحی در فصل مشترک دی‌الکتریک‌ها

بکار رود. داریم،

$$\begin{aligned} \rho_{si} &= \left(\epsilon_2 \frac{\sigma_1}{\sigma_2} - \epsilon_1 \right) \frac{\sigma_2 V}{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2} \\ &= \frac{(\epsilon_2 \sigma_1 - \epsilon_1 \sigma_2) V}{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2} \quad (\text{C/m}^2) \end{aligned} \quad (۷۸-۵)$$

از این نتایج ملاحظه می شود که $\rho_{s1} + \rho_{s2} + \rho_{si} = 0$ اما $\rho_{s2} \neq -\rho_{s1}$

در مثال ۲-۵ یا وضعیتی مواجه شدیم که هم بارهای ساکن و هم جریان دائمی وجود داشتند. به طوری که در فصل ۶ خواهیم دید، باعث بوجود آمدن میدان مغناطیسی دائم می شود. بنابراین هم میدان الکتریکی ساکن و هم میدان مغناطیسی دائم وجود دارند؛ و یک میدان الکترومغناطیسی ساکن را تشکیل می دهند. میدانهای الکتریکی و مغناطیسی یک میدان الکترومغناطیسی ساکن از طریق رابطه اساسی $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ در محیط هادی به یکدیگر مربوط می شوند.

۷-۵ محاسبه مقاومت

در بخش ۳-۱۰، روش یافتن ظرفیت بین دو هادی، که توسط یک محیط دی الکتریک از هم جدا شده اند را بررسی کردیم. این هادیها، مطابق شکل ۳-۲۷ که دوباره در شکل ۷-۵ ترسیم شده است، می توانند شکل دلخواهی داشته باشند. برحسب کمیات میدان الکتریکی فرمول اصلی ظرفیت به صورت زیر نوشته می شود،

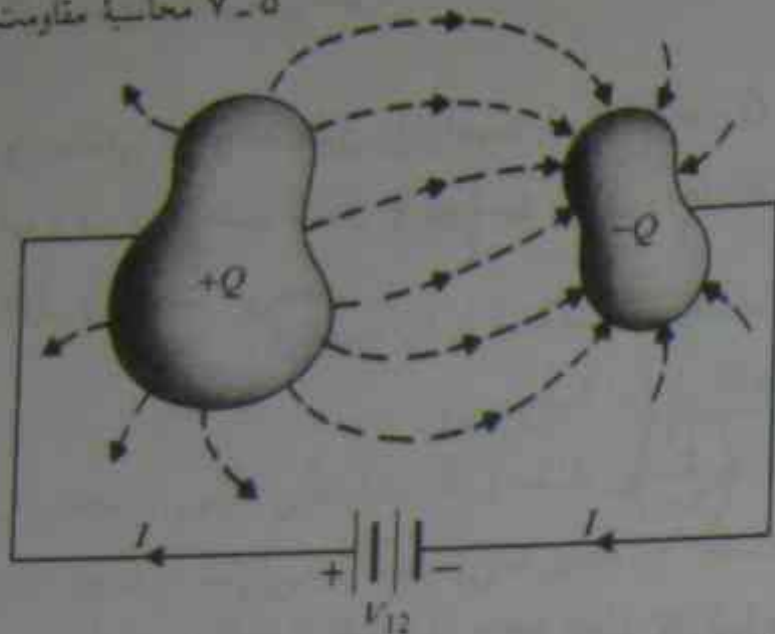
$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s}}{-\int_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}} = \frac{\oint_S \epsilon \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}}{-\int_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}} \quad (71-5)$$

که در آن انتگرال سطحی صورت، روی سطح در برگیرنده هادی مثبت و انتگرال خطی مخرج، از هادی منفی (پتانسیل پایین تر) تا هادی مثبت (پتانسیل بالاتر) انجام می گیرد. (معادله ۵-۲۵ را ببینید)

وقتی محیط دی الکتریک اتلافی باشد (دارای ضریب هدایت کوچک ولی غیر صفر)، جریانی از هادی مثبت به هادی منفی عبور خواهد کرد و یک میدان چگالی جریان در محیط تشکیل می گردد. قانون اهم $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ ، اطمینان می دهد که خطوط جریانی \mathbf{J} و \mathbf{E} در یک محیط همسوی یکسان، یکی هستند. مقاومت بین هادیها برابر است با

$$R = \frac{V}{I} = \frac{-\int_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}{\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}} = \frac{-\int_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}{\oint_S \sigma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}} \quad (80-5)$$

۷-۵ محاسبه مقاومت



شکل ۷-۵ دو هادی در یک محیط دی الکتریک با اتلاف

که در آن، انتگرالهای خطی و سطحی روی همان L و S مانند معادله (۵-۷۹) محاسبه می شوند. مقایسه معادلات (۵-۷۹) و (۵-۸۰) رابطه جالب توجه زیر را نشان می دهد:

$$RC = \frac{C}{G} = \frac{\epsilon}{\sigma} \quad (81-5)$$

معادله (۵-۸۱) تنها وقتی صادق است که ϵ و σ در محیط دارای وابستگی فضایی مشابهی باشند و یا محیط همگن باشد (مستقل از مختصات فضایی). در این حالات، اگر ظرفیت بین دو هادی معلوم باشد، مقاومت (یا رسانائی) با استفاده از نسبت ϵ/σ ، بدون محاسبات دوباره، بدست می آید.

مثال ۵-۵ مقاومت نشتی در واحد طول (الف) بین هادیهای درونی و بیرونی یک کابل هم محور که شعاع هادی درونی آن a و شعاع هادی بیرونی آن b و رسانندگی محیط آن σ است را بیابید، و (ب) خط انتقال با دو سیم موازی شامل سیم هانی به شعاع a ، به فاصله D از یکدیگر در محیطی با رسانندگی σ را پیدا کنید.

حل

الف) ظرفیت در واحد طول یک کابل هم محور در مثال ۳-۱۸ به صورت معادله (۳-۱۳۹) بدست آمده است:

$$C_1 = \frac{2\pi\epsilon}{\ln(b/a)} \quad (\text{F/m})$$

از این رو مقاومت نشتی در واحد طول، از معادله (۵-۸۱) برابر است با

$$R_1 = \frac{\epsilon}{\sigma} \left(\frac{1}{C_1} \right) = \frac{1}{2\pi\sigma} \ln \left(\frac{b}{a} \right) \quad (\Omega \cdot \text{m}) \quad (82-5)$$

و رسانائی در واحد طول برابر است با $G_1 = 1/R_1$.
 ب) در مورد خط انتقال با دو سیم موازی، معادله (۴-۴۷) در مثال ۴-۴، ظرفیت در واحد طول را بدست می دهد:

$$C'_1 = \frac{\pi\epsilon}{\cosh^{-1}\left(\frac{D}{2a}\right)} \quad (\text{F/m})$$

بنابراین، مقاومت نشی در واحد طول، بدون زحمت زیادی بدست می آید،

$$R'_1 = \frac{\epsilon}{\sigma} \left(\frac{1}{C'_1} \right) = \frac{1}{\pi\sigma} \cosh^{-1}\left(\frac{D}{2a}\right) \quad (\Omega \cdot \text{m}) \quad (۸۴-۵)$$

$$= \frac{1}{\pi\sigma} \ln \left[\frac{D}{2a} + \sqrt{\left(\frac{D}{2a}\right)^2 - 1} \right] \quad (\Omega \cdot \text{m})$$

رسانائی در واحد طول برابر است با $G'_1 = 1/R'_1$

در اینجا باید تأکید شود که مقاومت بین هادیهای کابل هم محور به ازای طول ℓ ، برابر R_1/ℓ است، نه CR_1 . به همین ترتیب، مقاومت نشی خط انتقال با دو سیم موازی به ازای طول ℓ ، برابر R'_1/ℓ است، نه $\ell R'_1$ ، می دانید چرا؟

در وضعیتهای خاصی، مسائل الکتریسته ساکن و جریان دائم، دقیقاً مشابه هم نیستند، حتی وقتی که ترکیب هندسی آنها یکسان است. این بدان دلیل است که عبور جریان می تواند منحصرأ در درون یک هادی (که σ بسیار بزرگی در مقایسه با محیط اطراف دارد) محدود شود، درحالی که شار الکتریکی معمولاً نمی تواند در درون یک باریکه دی الکتریک با ابعاد محدود، جای داده شود. دامنه تغییرات ضریب دی الکتریک مواد موجود بسیار محدود است (ضمیمه ب-۳ را ببینید)، و شارهای نشی کنار هادیها، محاسبه ظرفیت را با دقت کمتری توأم می سازد. روش محاسبه مقاومت یک قطعه از ماده هادی بین دو سطح (یا دو سر) هم پتانسیل مشخص به شرح زیر است:

۱- با توجه به هندسه مسئله داده شده، دستگاه مختصات مناسبی را انتخاب کنید.

۲- اختلاف پتانسیل V را بین سرهای هادی فرض نمایید.

۳- شدت میدان الکتریکی E را در درون هادی بیابید. (اگر ماده همگن بوده، دارای رسانندگی ثابت باشد، روش کلی، حل معادله لاپلاس $\nabla^2 V = 0$ به منظور یافتن V در دستگاه مختصات انتخاب شده و سپس محاسبه $E = -\nabla V$ است.)

۴- جریان کل

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \sigma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

را بیابید. در این رابطه، S سطح مقطعی است که I از آن می گذرد.
 ۵- با محاسبه نسبت V_1/I ، مقاومت R را پیدا کنید.

لازم است تذکر داده شود که اگر ماده هادی غیرهمگن باشد، و اگر رسانندگی تابعی از مختصات فضائی باشد، معادله لاپلاس به منظور محاسبه V ، معتبر نمی باشد، آیا می توانید توضیح دهید چرا، و مشخص کنید که چگونه تحت این شرایط E را می توان تعیین نمود؟

وقتی شکل هندسی مشخص شده طوری است که \mathbf{J} بسادگی از روی جریان کل I قابل تعیین می باشد، ممکن است با فرض اولیه I شروع به حل مسئله نمود. از روی $\mathbf{J} \cdot I$ و $\mathbf{E} = \mathbf{J}/\sigma$ پیدا می شوند. سپس اختلاف پتانسیل V از رابطه

$$V_1 = - \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

تعیین می گردد. انتگرال گیری از سری با پتانسیل پایین تا سری با پتانسیل بالا انجام می شود. مقاومت $R = V_1/I$ مستقل از I مفروض است، زیرا I در فرآیند حل مسئله، حذف خواهد شد.

مثال ۵-۶ ماده ای هادی با ضخامت یکناخت h و رسانندگی σ مطابق شکل ۵-۸، دارای شکل یک چهارم یک و اشتر مدور مسطح با شعاع درونی a و شعاع بیرونی b می باشد. مقاومت بین دو وجه انتهائی را پیدا کنید.

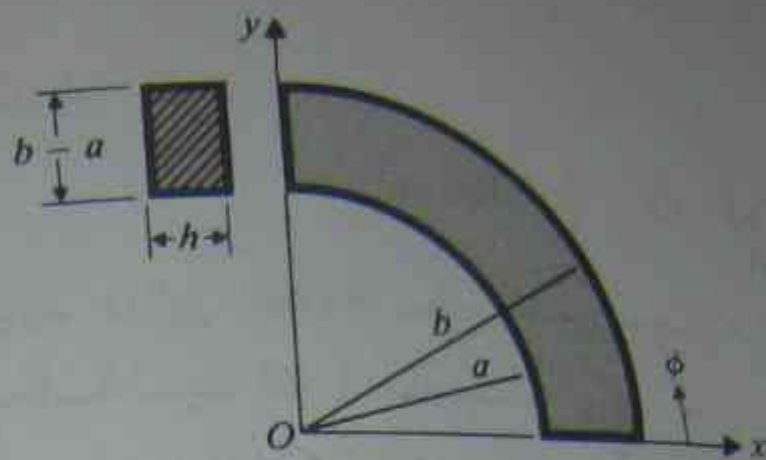
حل روشن است که دستگاه مختصات مناسب این مسئله، دستگاه مختصات استوانه ای است. در پی روش کار بالا، نخست فرض می کنیم که اختلاف پتانسیل V بین دو وجه انتهائی وجود دارد؛ مثلاً $V = 0$ روی وجه انتهائی واقع در $\phi = 0$ و $V = V_1$ روی وجه انتهائی واقع در $\phi = \pi/2$. باید معادله لاپلاس بر حسب V را با توجه به شرایط مرزی زیر حل کنیم:

$$V = 0, \quad \phi = 0 \quad \text{در} \quad (۵-۸۴ \text{ الف})$$

$$V = V_1, \quad \phi = \pi/2 \quad \text{در} \quad (۵-۸۴ \text{ ب})$$

چون پتانسیل V ، تنها تابعی از ϕ است، معادله لاپلاس در مختصات استوانه ای، به صورت زیر ساده می شود،

$$\frac{d^2 V}{d\phi^2} = 0 \quad (۵-۸۵)$$



شکل ۵-۸ یک چهارم یک وانر مدور مسطح هادی (مثال ۵-۶)

جواب کلی معادله (۵-۸۵) برابر است با

$$V = c_1 \phi + c_2$$

که با استفاده از شرایط مرزی در معادلات (۵-۸۴ الف) و (۵-۸۴ ب) به صورت زیر درمی‌آید

$$V = \frac{rV_0}{\pi} \phi \quad (5-86)$$

چگالی جریان برابر است با

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \sigma \mathbf{E} = -\sigma \nabla V \\ &= -a_\phi \sigma \frac{\partial V}{r \partial \phi} = -a_\phi \frac{r \sigma V_0}{\pi r} \end{aligned} \quad (5-87)$$

جریان کل I با انتگرال‌گیری از \mathbf{J} روی سطح $\phi = \pi/2$ که در آن $ds = -a_\phi h dr$ است، بدست می‌آید. داریم

$$\begin{aligned} I &= \int_S \mathbf{J} \cdot ds = \frac{r \sigma V_0}{\pi} h \int_a^b \frac{dr}{r} \\ &= \frac{r \sigma h V_0}{\pi} \ln \frac{b}{a} \end{aligned} \quad (5-88)$$

بنابراین،

$$R = \frac{V_0}{I} = \frac{\pi}{r \sigma h \ln(b/a)} \quad (5-89)$$

دقت کنید که در این مسئله، شروع با فرض جریان کل I چندان راحت نیست، زیرا روشن نیست که چگونه به ازای I مفروض، \mathbf{J} با r تغییر می‌کند. بدون \mathbf{J} ، نمی‌توان \mathbf{E} و V را تعیین کرد.

- ۱-۵. د تفاوت بین جریان‌های هدایتی و انتقالی را توضیح دهید.
- ۲-۵. د طرز کار یک مخزن الکترولیتی را توضیح دهید. از چه جنبه‌های جریان‌های الکترولیتی با جریان‌های هدایتی و انتقالی متفاوتند؟
- ۳-۵. د تحرک الکترون در یک هادی را تعریف کنید. واحد SI آن چیست؟
- ۴-۵. د قانون چایلد - لانگ موئیر چیست؟
- ۵-۵. د شکل نقطه‌ای قانون اهم چیست؟
- ۶-۵. د رسانندگی را تعریف کنید. واحد SI آن چیست؟
- ۷-۵. د چرا فرمول مقاومت در معادله (۵-۲۷)، لازم می‌دارد که ماده همگن و مستقیم بوده، سطح مقطع آن یکنواخت باشد؟
- ۸-۵. د معادلات (۵-۲۹) و (۵-۳۰) را ثابت کنید.
- ۹-۵. د نیروی محرکه الکتریکی را با کلمات تعریف کنید.
- ۱۰-۵. د اختلاف میان شدتهای میدان متاثر و الکتریسیته ساکن چیست؟
- ۱۱-۵. د قانون ولتاژ کیرشف را با کلمات بیان کنید.
- ۱۲-۵. د مشخصات یک منبع ولتاژ ایده‌آل کدامند؟
- ۱۳-۵. د آیا جریان در شاخه‌های (مقاومت‌های) مختلف یک حلقه بسته در یک شبکه الکتریکی می‌تواند در جهات مخالف عبور کند؟ توضیح دهید.
- ۱۴-۵. د اهمیت فیزیکی معادله بیوستگی چیست؟
- ۱۵-۵. د قانون جریان کیرشف را با کلمات بیان کنید.
- ۱۶-۵. د مشخصات یک منبع جریان ایده‌آل کدامند؟
- ۱۷-۵. د زمان سستی را تعریف کنید. حدود بزرگی زمان سستی چقدر است؟
- ۱۸-۵. د اگر σ تابعی از مختصات فضائی باشد، معادله (۵-۴۸) را چگونه باید تصحیح نمود؟
- ۱۹-۵. د قانون ژول را بیان کنید. توان تلف شده در یک حجم را در موارد زیر بیان کنید
الف) برحسب \mathbf{E} و σ
ب) برحسب \mathbf{J} و σ
- ۲۰-۵. د آیا رابطه $\nabla \times \mathbf{J} = 0$ در محیطی که رسانندگی آن ثابت نیست، برقرار است؟ توضیح دهید.
- ۲۱-۵. د شرایط مرزی مؤلفه‌های عمودی و مماسی جریان دائم در فصل مشترک دو محیط، با رسانندگی متفاوت، چه هستند؟

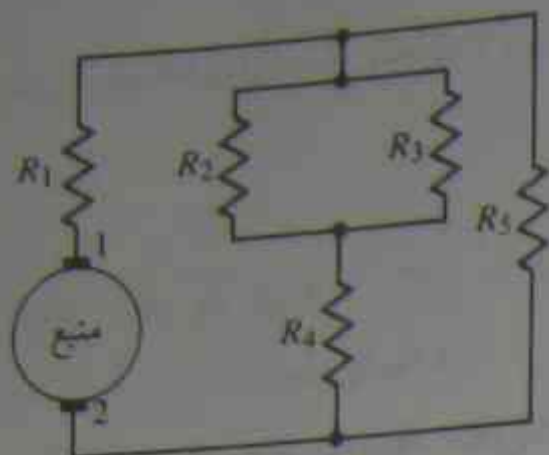
- د. ۲۲.۵ چه کمیت هایی در الکتریسیته ساکن مشابه بردار چگالی جریان دائم و رسانندگی در یک محیط اهمی هستند؟
- د. ۲۳.۵ اساس استفاده از مخزن الکترولیتی برای نگاشت توزیع پتانسیل مسائل مقدار مرزی الکتریسیته ساکن چیست؟
- د. ۲۴.۵ رابطه میان مقاومت و ظرفیت تشکیل شده توسط دو هادی قرار داده شده در محیطی ذی الکتریک و دارای اتلاف، با گذردهی ϵ و رسانندگی σ چیست؟
- د. ۲۵.۵ تحت چه شرایطی، رابطه بین R و C در $d - c$ تنها به طور تقریبی صحیح است؟ مثال مشخصی ارائه دهید.

مسائل

- م. ۱.۵ فرض کنید S ، سطح الکترودهای دیود خلا* با بار فضائی محدود شده شکل ۲ - ۵ باشد. مطلوب است:
- الف) $V(y)$ و $E(y)$ در ناحیه بین الکترودها
- ب) کل مقدار بار در ناحیه بین الکترودها
- پ) کل بار سطحی روی کاتد و آنُد
- ت) زمان گذر یک الکترون از کاتد به آنُد به ازای $V_0 = 200$ (V) و $d = 1$ (cm)
- م. ۲.۵ از قانون اهم مطابق معادله (۲۶ - ۵)، در مورد مقاومتی به طول l ، رسانندگی σ و سطح مقطع یکنواخت S ، شروع کرده شکل نقطه ای قانون اهم نشان داده شده در معادله (۲۱ - ۵) را تحقیق نمایید.
- م. ۳.۵ سیم طویل مدوری به شعاع a و رسانندگی σ با ماده ای با رسانندگی σ_1 پوشانیده شده است.
- الف) ضخامت پوشش چقدر باید باشد تا اینکه مقاومت در واحد طول سیم بدون پوشش به اندازه ۵۰٪ کاهش یابد؟
- ب) با فرض جریان کل I در سیم پوشش دار، J و E را هم در هسته و هم در ماده پوشش دهنده پیدا کنید.
- م. ۴.۵ جریان و حرارت تلف شده در هر کدام از پنج مقاومت شبکه نشان داده شده در شکل ۱ - ۵ را پیدا کنید اگر

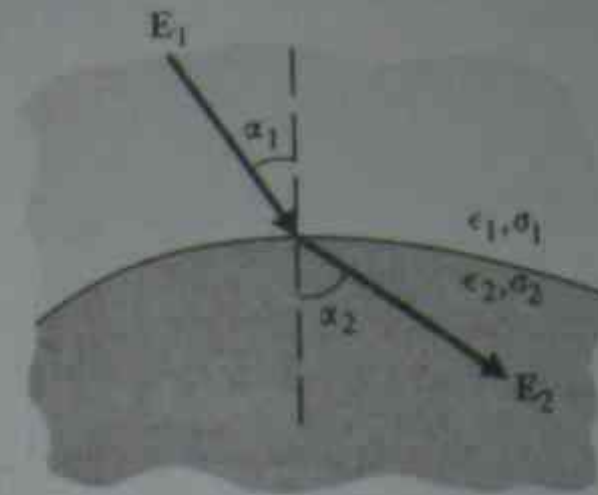
$$R_1 = \frac{1}{3}(\Omega), R_2 = 20(\Omega), R_3 = 20(\Omega), R_4 = 8(\Omega), R_5 = 10(\Omega)$$

مسائل



شکل ۱ - ۵ یک مسئله شبکه ای (مسئله م. ۵ - ۴)

- و اگر منبع موجود، یک مولد ولتاژ $d - c$ ایده آل 0.7 (V) باشد، که قطب مثبت آن در سر ۱ می باشد. کل مقاومت دیده شده توسط منبع در دو سر ۱ و ۲ چقدر است؟
- م. ۵.۵ مسئله م. ۴ - ۵ را با فرض اینکه منبع موجود، یک مولد جریان ایده آل است و جریان مستقیم 0.7 (A) را از سر ۱ خارج می سازد، حل کنید.
- م. ۶.۵ برق آسمانی، به یک کره ذی الکتریک دارای اتلاف $\epsilon = 1.2\epsilon_0$ ، $\sigma = 10$ (S/m) به شعاع 0.1 (m) در لحظه $t = 0$ اصابت می کند؛ و بار کل 1 (mC) را در کره به طور یکنواخت قرار می دهد. برای تمام زمانهای t :
- الف) شدت میدان الکتریکی را هم در درون و هم در بیرون کره تعیین کنید.
- ب) چگالی جریان در کره را تعیین کنید.
- م. ۷.۵ با مراجعه به مسئله م. ۵ - ۶،
- الف) زمان رسیدن چگالی بار کره را به ۱٪ مقدار اولیه آن محاسبه کنید.
- ب) تغییر در انرژی الکتریسیته ساکن ذخیره شده در کره را وقتی که چگالی بار از مقدار اولیه خود به ۱٪ این مقدار کاهش می یابد محاسبه کنید. این انرژی چه می شود؟
- پ) انرژی الکتریسیته ساکن ذخیره شده در فضای بیرون کره را تعیین کنید. آیا این انرژی با زمان تغییر می کند؟
- م. ۸.۵ یک ولتاژ $d - c$ ، 6 (V) به دو انتهای سیم هادی به طول 1 (km) و شعاع 0.5 (mm) اعمال می شود و جریان $1/6$ (A) را از آن عبور می دهد.
- الف) ضریب هدایت سیم را تعیین کنید.
- ب) شدت میدان الکتریکی در سیم را تعیین کنید.
- پ) توان تلف شده در سیم را تعیین کنید.
- ت) با فرض اینکه ضریب تحرک الکترون در سیم برابر 1.4×10^{-2} (m²/V.s) است، سرعت رانش الکترون را تعیین کنید.

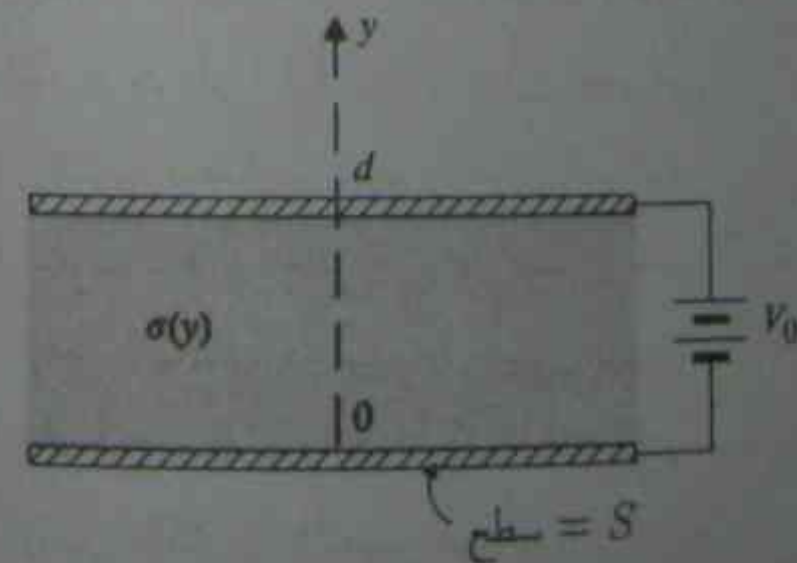


شکل ۱۰-۵. مرز بین دو محیط دی الکتریک دارای اتلاف (مسئله م. ۵-۹)

۹-۵. م دو ناحیه دی الکتریک دارای اتلاف، با گذردهی و رسانندگی (ϵ_1, σ_1) و (ϵ_2, σ_2) در تماس با یکدیگر هستند. مطابق شکل ۱۰-۵، یک میدان الکتریکی با اندازه E_1 در زاویه α_1 که نسبت به عمود مشترک اندازه گیری می شود، از ناحیه ۱ وارد فصل مشترک می شود. الف) اندازه و جهت E_2 را در ناحیه ۲ پیدا کنید. ب) چگالی بار سطحی را در فصل مشترک بیابید. پ) نتایج قسمت های الف) و ب) را با حالتی که در آن هر دو ناحیه، دی الکتریک کامل هستند، مقایسه کنید.

۱۰-۵. م فضای بین دو صفحه هادی موازی، هر یک با سطح S ، با یک محیط اهمی ناهمگن که رسانندگی آن به طور خطی از σ_1 در یک صفحه $(y=0)$ تا σ_2 در صفحه دیگر $(y=d)$ تغییر می کند پر شده است. یک ولتاژ V_0 مطابق شکل ۱۱-۵ به صفحات اعمال می شود.

الف) مقاومت کل بین صفحات را تعیین کنید. ب) چگالی های بار سطحی روی صفحات را تعیین کنید. پ) چگالی بار حجمی و کل مقدار بار بین صفحات را تعیین نمایید.



شکل ۱۱-۵. محیط اهمی ناهمگن با رسانندگی $\sigma(y)$ (مسئله م. ۵-۱۰)

۱۱-۵. م با مراجعه به مثال ۵-۲

الف) مدار معادل خازن صفحه ای موازی دولایه ای با دی الکتریک دارای اتلاف را رسم کرده، مقدار هر مؤلفه را تشخیص دهید.

ب) توان تلف شده در خازن را تعیین کنید.

۱۲-۵. م بار دیگر به مثال ۵-۲ مراجعه کرده و فرض کنید که ولتاژ V_0 به دو سر خازن صفحه ای موازی با دو لایه دی الکتریک با اتلاف متفاوت در $t=0$ اعمال شود.

الف) چگالی بار سطحی ρ_{si} را در سطح دی الکتریک به صورت تابعی از t بیان کنید. ب) شدت میدانهای الکتریکی E_1 و E_2 را به صورت توابعی از t بیان نمایید.

۱۳-۵. م ولتاژ V_0 ، d به دو سر خازن استوانه ای به طول l اعمال شده است. شعاع هادیهای درونی و بیرونی به ترتیب a و b است. فضای بین هادیها با دو دی الکتریک متفاوت دارای اتلاف، به ترتیب با گذردهی ϵ_1 و رسانندگی σ_1 در ناحیه $a < r < c$ و گذردهی ϵ_2 و رسانندگی σ_2 در ناحیه $c < r < b$ پر شده است.

الف) چگالی جریان را در هر ناحیه تعیین کنید.

ب) چگالی های بار سطحی روی هادیهای درونی و بیرونی و فصل مشترک بین دو دی الکتریک را تعیین نمایید.

۱۴-۵. م با مراجعه به ربع و اشتر مدور مسطح شکل ۵-۸ در مثال ۵-۶، مقاومت بین وجوه خمیده را پیدا کنید.

۱۵-۵. م مقاومت بین دو سطح کروی هم مرکز به شعاع های R_1 و R_2 ($R_1 < R_2$) را با فرض اینکه فضای بین سطوح با یک ماده همگن و همسویکسان با رسانندگی σ پر شده باشد، تعیین کنید.

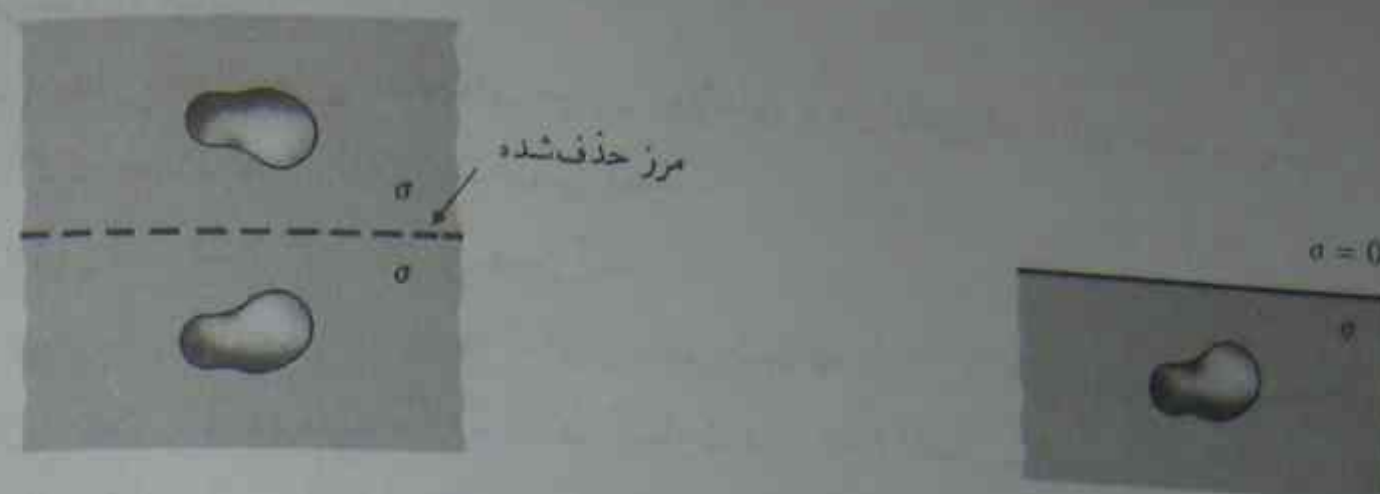
۱۶-۵. م مقاومت بین دو سطح کروی هم مرکز به شعاع های R_1 و R_2 ($R_1 < R_2$) را با فرض اینکه ماده ای با رسانندگی $\sigma = \sigma_0(1+k/R)$ فضای بین آنها را پر می کند، تعیین کنید. (نکته: معادله لاپلاس در مورد V اینجا بکار نمی آید.)

۱۷-۵. م ماده همگنی با رسانندگی یکنواخت σ به صورت یک قطعه مخروط ناقص در آمده است و در مختصات کروی با

$$R_1 \leq R \leq R_2 \quad \text{و} \quad 0 \leq \theta \leq \theta_0$$

تعریف می شود. مقاومت بین سطوح $R = R_1$ و $R = R_2$ را تعیین کنید.

۱۸-۵. م مسئله ۱۷-۵ را با فرض اینکه قطعه مخروط ناقص از ماده غیرهمگنی با رسانندگی غیریکنواخت $\sigma(R) = \sigma_0 R_1/R$ تشکیل شده است تکرار کنید.



(الف) هادی در یک محیط هادی ضعیف نزدیک یک مرز مسطح (ب) هادی تصویر در محیط هادی جایگزین کننده مرز مسطح

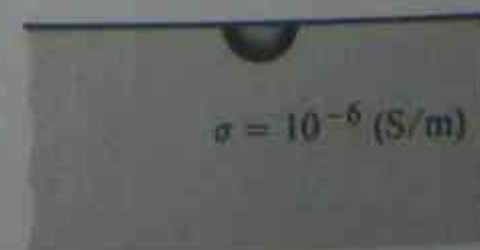
شکل ۱۲-۵ مسئله جریان دائم با یک مرز مسطح (مسئله ۵-۲۰)

۱۹-۵. م دو کره هادی به شعاعهای b_1 و b_2 که رسانندگی بسیار بالائی دارند، در محیط هادی ضعیفی با رسانندگی σ و گذردهی ϵ فرو برده شده اند (برای مثال، دو کره هادی در قعر زمین دفن شده اند). فاصله d بین کره ها، در مقایسه با شعاع آنها بسیار بزرگ است. مقاومت بین کره های هادی را پیدا کنید. (راهنمایی: ظرفیت بین کره ها را با پیگیری روش بخش ۳-۱۰ پیدا کرده و معادله (۵-۸۱) را بکار ببرید).

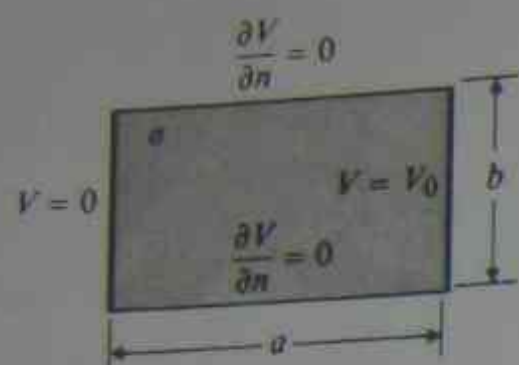
۲۰-۵. م درستی این مطلب را بررسی کنید که مسئله جریان دائم در ارتباط با یک هادی فرو برده شده در یک محیط هادی ضعیف، در نزدیکی یک مرز مسطح با هوا را می توان مطابق شکل ۱۲-۵ (ب) جایگزین کرد.

۲۱-۵. م با دفن یک هادی نیم کروی به شعاع (۲۵ mm) در زمین به صورتی که قاعده آن به سمت بالا قرار گیرد، مطابق شکل ۱۳-۵ یک اتصال زمین ساخته شده است. با فرض اینکه رسانندگی زمین 10^{-6} S/m باشد، مقاومت بین هادی و نقاط بسیار دور در زمین پیدا کنید. (راهنمایی: روش تصاویر در م. ۵-۲۰ را بکار ببرید)

۲۲-۵. م ورقه هادی مستطیل شکلی با رسانندگی σ ، پهنای a و ارتفاع b را در نظر بگیرید. اختلاف پتانسیل V ، مطابق شکل ۱۴-۵ به لبه های کناری اعمال می شود. الف) توزیع پتانسیل را تعیین کنید.



شکل ۱۳-۵ هادی نیم کروی در زمین (مسئله ۵-۲۱)



شکل ۱۴-۵ یک ورقه هادی (مسئله ۵-۲۲)

ب) چگالی جریان را در هر نقطه درون ورقه پیدا کنید. (راهنمایی: معادله لاپلاس را در مختصات کارتزین با شرایط مرزی مناسب حل کنید)

۲۳-۵. م چگالی جریان یکنواخت $J = a_x J_0$ در یک قطعه مستطیلی بسیار بزرگ، از ماده ای همگن با ضخامت یکنواخت و رسانندگی σ جاری است. سوراخی به شعاع b در ماده ایجاد می شود. چگالی جدید جریان J' ، را در ماده هادی پیدا کنید. (راهنمایی: معادله لاپلاس را در مختصات استوانه ای حل کنید و توجه داشته باشید که وقتی $r \rightarrow \infty$ میل می کند V به سوی $(J_0 r / \sigma) \cos \phi$ نزدیک می شود که در آن ϕ زاویه سنجیده شده از محور x است).

۶

میدانهای مغناطیسی ساکن

۱-۶ مقدمه

در فصل ۳، با میدانهای الکتریکی ساکن ناشی از بارهای الکتریکی در حال سکون سروکار داشتیم. دیدیم که شدت میدان الکتریکی E تنها کمیت اساسی میدان برداری لازم برای مطالعه الکتریسیته ساکن در فضای آزاد است. در محیطهای مادی، مناسبتر است که کمیت میدان برداری دومی به نام چگالی شار الکتریکی D (یا جابجائی الکتریکی) را برای به حساب آوردن تأثیر قطبی شدگی، تعریف کنیم. دو معادله زیر، پایه مدل الکتریسیته ساکن را تشکیل می دهند:

$$\nabla \cdot D = \rho \quad (۱-۶)$$

$$\nabla \times E = 0 \quad (۲-۶)$$

خواص الکتریکی محیط، رابطه بین D و E را تعیین می کند. اگر محیط خطی و همه سو یکسان باشد، رابطه اساسی ساده $D = \epsilon E$ را داریم که در آن گذردهی ϵ یک کمیت عددی است. هنگامی که بار آزمونی کوچک q در میدان الکتریکی E قرار می گیرد، نیروی الکتریکی F_e که تابعی از مکان q است، به آن وارد می شود. داریم

$$F_e = qE \quad (N) \quad (۳-۶)$$

وقتی که این بار آزمونی در یک میدان مغناطیسی (که هم اکنون تعریف خواهد شد) در حال حرکت باشد، آزمایش نشان می دهد که نیروی دیگر F_m بر آن اعمال می شود که دارای مشخصات زیر

است: (۱) اندازه F_m متناسب با q است؛ (۲) جهت F_m در هر نقطه، بر بردار سرعت بار آزمونی و نیز بر جهت ثابتی در آن نقطه عمود است؛ و (۳) همچنین اندازه F_m با مؤلفه سرعت در جهت عمود بر این امتداد ثابت متناسب است. نیروی F_m یک نیروی مغناطیسی است؛ و نمی‌تواند بر حسب E یا D بیان شود. مشخصات F_m با تعریف یک کمیت جدید میدان برداری به نام چگالی شار مغناطیسی B توصیف می‌گردد که هم امتداد ثابت و هم ثابت تناسب را مشخص می‌کند. در واحدهای SI، نیروی مغناطیسی بصورت زیر بیان می‌شود،

$$\mathbf{F}_m = q\mathbf{u} \times \mathbf{B} \quad (N) \quad (4-6)$$

در این رابطه، u (m/s) بردار سرعت است و B بر حسب و بر مترمربع (Wb/m²) یا تسلا^۱ (T) اندازه‌گیری می‌شود. پس نیروی الکترومغناطیسی کل وارد بر بار q برابر $\mathbf{F} = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m$ است؛ یعنی

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (N) \quad (5-6)$$

که معادله نیروی لورنتس^۲ نامیده می‌شود. اعتبار این معادله، بی‌چون و چرا توسط آزمایش تأیید گردیده است. ممکن است F_e/q را در مورد بار کوچک q به عنوان تعریف شدت میدان الکتریکی E (همان طوری که در معادله (۳-۲) انجام دادیم) و $F_m/q = \mathbf{u} \times \mathbf{B}$ را به عنوان رابطه تعریف‌کننده چگالی شار مغناطیسی B در نظر گرفت. به صورت دیگر، ممکن است معادله نیروی لورنتس را به عنوان اصل موضوعی اساسی مدل الکترومغناطیسی در نظر گرفت؛ این معادله را نمی‌توان از دیگر اصول موضوعی نتیجه گرفت.

مطالعه میدانهای مغناطیسی ساکن را در فضای آزاد، با دو اصل موضوعی که دیورژانس و کرل B را مشخص می‌نمایند، آغاز می‌کنیم. از روی مشخصه سلونوئیدی B ، یک پتانسیل مغناطیسی برداری تعریف می‌شود، و نشان داده خواهد شد که از معادله پواسون برداری تبعیت می‌کند. سپس قانون بیوساوار^۳ را، که برای تعیین میدان مغناطیسی یک مدار حامل جریان بکار می‌رود، بدست خواهیم آورد. رابطه فرض شده کرل، مستقیماً به قانون مداری آمپر منجر خواهد گردید که در صورت وجود تقارن، سودمندی خاصی دارد.

تأثیر ماکروسکوپی مواد مغناطیسی در یک میدان مغناطیسی با تعریف بردار مغناطیس‌شدگی

۱- Tesla

۲- Lorentz's force equation

۳- Biot-Savart

† یک و بر مترمربع یا یک تسلا، برابر ۱۰^۴ گوس در واحدهای CGS است. میدان مغناطیسی زمین در حدود ۱/۲ گوس یا ۱۰^{-۲} T است. (یک و بر مشابه یک ولت - ثانیه است)

قابل مطالعه است. در اینجا کمیت میدان برداری چهارمی را به نام شدت میدان مغناطیسی H معرفی خواهیم کرد. از رابطه بین H و B ، نفوذپذیری ماده را تعریف می‌کنیم. به دنبال آن، مدارهای مغناطیسی و رفتار ماکروسکوپی مواد مغناطیسی را مورد بحث قرار می‌دهیم. سپس شرایط مرزی H و B را در فصل مشترک دو محیط مغناطیسی متفاوت، اندوکتانس‌های خودی و متقابل؛ و انرژی، نیروها و گشتاورهای مغناطیسی را بررسی می‌نماییم.

۲-۶ اصول موضوعی مغناطیس ساکن در فضای آزاد

به منظور مطالعه مغناطیس ساکن (میدانهای مغناطیسی دائم) در فضای آزاد، تنها کافی است بردار چگالی شار مغناطیسی B را در نظر بگیریم. دو اصل موضوعی مغناطیس ساکن که دیورژانس و کرل B را در فضای آزاد مشخص می‌کنند عبارتند از:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (6-6)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (7-6)$$

در معادله (۶-۷)، μ_0 ، نفوذپذیری فضای آزاد

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \quad (H/m)$$

(معادله ۱-۹ را ببینید)، و J چگالی جریان است. چون دیورژانس کرل هر میدان برداری صفر است (معادله ۲-۱۴۹ را ببینید)، از معادله (۶-۷) بدست می‌آید

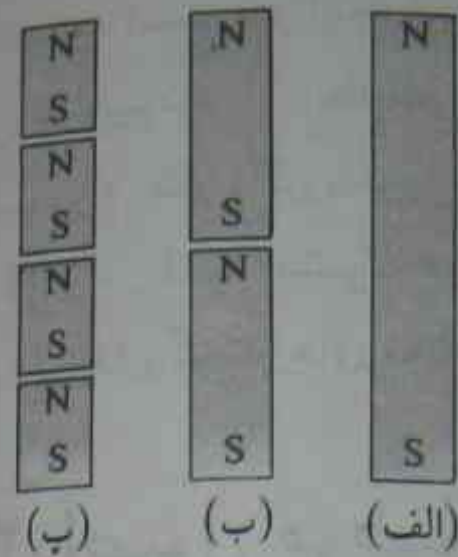
$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (8-6)$$

که با معادله (۵-۴۴) در مورد جریانهای دائم سازگاری دارد.

مقایسه معادله (۶-۶)، با معادله نظیر آن در الکتریسیته ساکن در فضای آزاد، $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$ (معادله ۲-۴)، به این نتیجه‌گیری منتهی می‌شود که برای چگالی بار الکتریکی ρ ، هیچ مشابه مغناطیسی وجود ندارد. انتگرال‌گیری حجمی از معادله (۶-۶) و بکارگیری قضیه دیورژانس بدست می‌دهد:

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (9-6)$$

که در آن، انتگرال سطحی روی سطح مرزی یک حجم دلخواه انجام می‌گیرد. با مقایسه معادله (۶-۹) و معادله (۳-۷)، بار دیگر، وجود بارهای مغناطیسی مجزا نمی‌گردد. هیچ منبع



شکل ۶-۱ تقسیم متوالی یک آهنربای میله‌ای

شار مغناطیسی وجود ندارد، و خطوط شار مغناطیسی همیشه در خود بسته می‌شوند. معادله (۶-۱) را، رابطه قانون بقای شار مغناطیسی نیز می‌نامند، زیرا بیان می‌دارد که شار مغناطیسی خروجی کل از هر سطح بسته صفر است.

مشخص کردن مرسوم قطبهای شمال و جنوب در یک آهنربای دائمی میله‌ای موجب این نتیجه‌گیری نمی‌گردد که بار مغناطیسی مثبت مجزا در قطب شمال و مقدار نظیر آن از بار مغناطیسی منفی مجزا در قطب جنوب وجود دارد. آهنربای میله‌ای شکل ۶-۱ (الف) را با قطبهای شمال و جنوب در نظر بگیرید. اگر این آهنربا به دو قسمت تقسیم شود، قطبهای شمال و جنوب جدیدی ظاهر شده و دو آهنربای کوتاه‌تر مانند شکل ۶-۱ (ب) در اختیار داریم. اگر هر کدام از دو آهنربای کوتاه‌تر، دوباره به دو قسمت تقسیم گردند، چهار آهنربا داریم که هر کدام مطابق شکل ۶-۱ (ب) دارای یک قطب شمال و یک قطب جنوب هستند. این فرآیند تا جایی که آهنرباها به ابعاد اتمی برسند می‌تواند ادامه یابد؛ لیکن تمامی آهنرباهای فوق‌العاده کوچک هنوز دارای قطب شمال و قطب جنوب خواهند بود. پس روشن است که قطبهای مغناطیسی نمی‌توانند مجزا شوند. خطوط شار مغناطیسی از یک انتهای آهنربا تا انتهای دیگر در خارج آهنربا مسیرهای بسته‌ای را دنبال کرده، و سپس مسیر را در داخل آهنربا تا رسیدن به انتهای اول ادامه می‌دهند. اختصاص قطبهای شمال و جنوب بر طبق این حقیقت است که، قطبهای متناظر یک آهنربای میله‌ای که در میدان مغناطیسی زمین آزادانه به حالت معلق درآید، جهات شمال و جنوب را جستجو می‌کنند.^۱

^۱ در اینجا به صورت جمله معترضه بیان می‌کنیم که مطالعه بعضی از ساختارهای سنگی ماقبل تاریخ به این باور انجامید، است که هر ده میلیون سال یا همین حدود، وارون شدن شگفت‌آوری در میدان مغناطیسی زمین رخ داده است. اگرچه تصور می‌شود که میدان مغناطیسی زمین، توسط حرکات غلطشی آهن گداخته در پوسته بیرونی زمین تولید شود، اما دلایل دقیق وارون شدن میدان هنوز بخوبی درک نشده است. پیش‌بینی می‌شود که یک چنین وارون شدن بعدی فقط ۲۰۰۰ سال بعد از زمان حاضر روی دهد. کسی نمی‌تواند همه پی‌آمدهای هولناک چنین وارون شدنی را حدس بزند، اما از میان آنها، از هم‌گسختن ناوبری جهانی و تغییرات شدید در الگوی مهاجرتی پرندگان، را می‌توان نام برد.

۶-۲ اصول موضوعی مغناطیس ساکن در فضای آزاد

شکل انتگرالی رابطه کرل در معادله (۶-۷) را می‌توان با انتگرال‌گیری از دو طرف آن روی یک سطح باز، و اعمال قضیه استوکس، بدست آورد. داریم

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} \quad (6-10)$$

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I$$

که در آن، مسیر C در انتگرال خطی، مسیر محصورکننده سطح S و I کل جریان گذرنده از S می‌باشد. جهت مسیر C و جهت عبور جریان از قاعده دست راست تبعیت می‌کنند. معادله (۶-۱۰)، شکلی از قانون مداری آمپر است. این قانون بیان می‌دارد که گردش چگالی شار مغناطیسی در فضای آزاد، به دور هر مسیر بسته، برابر با حاصلضرب μ_0 در کل جریان گذرنده از سطح محصورشده توسط این مسیر است. قانون مداری آمپر در تعیین چگالی شار مغناطیسی \mathbf{B} ، ناشی از جریان I ، هنگامی که مسیر بسته C به دور جریان چنان وجود داشته باشد که اندازه \mathbf{B} روی مسیر ثابت باشد، بسیار مفید است.

خلاصه دو اصل موضوعی اساسی مغناطیس ساکن در فضای آزاد چنین است.

اصول موضوعی مغناطیس ساکن در فضای آزاد	
شکل دیفرانسیلی	شکل انتگرالی
$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0$
$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$	$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I$

مثال ۶-۱ یک هادی مستقیم بینهایت طولی، با مقطع مدور به شعاع b ، جریان دائم I را حمل می‌کند. چگالی شار مغناطیسی را در درون و بیرون هادی تعیین کنید.

حل نخست توجه می‌کنیم که این مسئله دارای تقارن استوانه‌ای است و استفاده از قانون مداری آمپر دارای مزیت است. اگر هادی را در امتداد محور z قرار دهیم، چگالی شار مغناطیسی \mathbf{B} در جهت ϕ بوده و در امتداد هر مسیر دایره‌ای به دور محور z ، ثابت خواهد بود. شکل ۶-۲ (الف)، مقطع عرضی هادی و دو مسیر انتگرال‌گیری دایره‌ای C_1 و C_2 را به ترتیب در درون و بیرون هادی حامل جریان، نشان می‌دهد. بار دیگر توجه کنید که جهت‌های C_1 و C_2 و جهت

I ، از قاعده دست راست تبعیت می‌نمایند. (وقتی انگشتان دست راست جهت‌های C_1 و C_2 را دنبال می‌کنند، شست دست راست، جهت I را نشان می‌دهد.)

(الف) در درون هادی:

$$B_{\phi} = a_{\phi} B_{\phi 1}, \quad d\ell = a_{\phi} r_1 d\phi$$

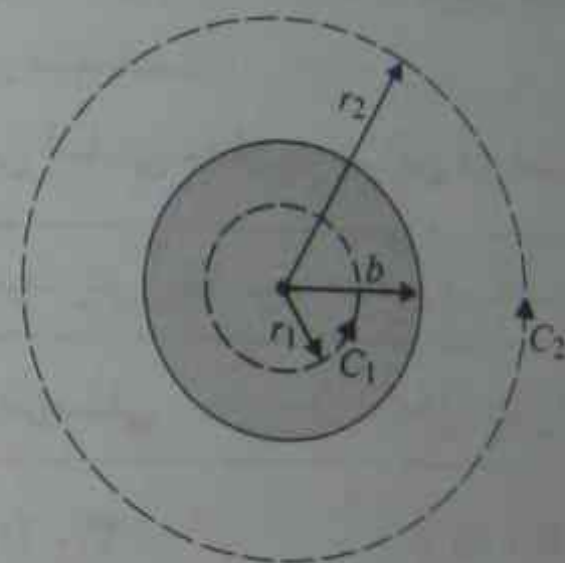
$$\oint_{C_1} B_{\phi} \cdot d\ell = \int_0^{2\pi} B_{\phi 1} r_1 d\phi = 2\pi r_1 B_{\phi 1}$$

جریان گذرنده از سطح محصورشده توسط C_1 برابر است با

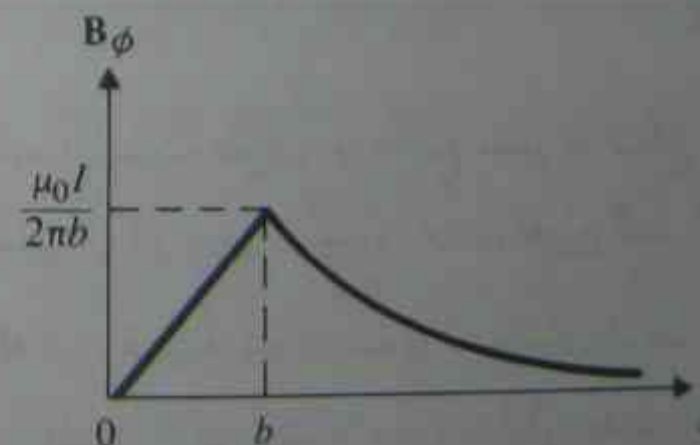
$$I_1 = \frac{\pi r_1^2}{\pi b^2} I = \left(\frac{r_1}{b}\right)^2 I$$

بنابراین از قانون مداری آمپر داریم

$$B_{\phi} = a_{\phi} B_{\phi 1} = a_{\phi} \frac{\mu_0 r_1 I}{2\pi b^2}, \quad r_1 \leq b \quad (۱۱-۶ \text{ الف})$$



(الف)



(ب)

شکل ۲-۶ چگالی شار مغناطیسی یک هادی مدور بینهایت طول که جریان I را به سمت بیرون از کاغذ حمل می‌کند (مثال ۶-۱)

۲-۶ اصول موضوعی مغناطیس ساکن در فضای آزاد

(ب) در بیرون هادی:

$$B_{\phi} = a_{\phi} B_{\phi 2}, \quad d\ell = a_{\phi} r_2 d\phi$$

$$\oint_{C_2} B_{\phi} \cdot d\ell = 2\pi r_2 B_{\phi 2}$$

مسیر C_2 در بیرون هادی، کل جریان I را در بر می‌گیرد. از این رو

$$B_{\phi} = a_{\phi} B_{\phi 2} = a_{\phi} \frac{\mu_0 I}{2\pi r_2}, \quad r_2 \geq b \quad (۱۱-۶ \text{ ب})$$

بررسی معادلات (۱۱-۶ الف) و (۱۱-۶ ب) آشکار می‌سازد که اندازه B با تغییر r_1 از صفر تا $r_1 = b$ به طور خطی با افزایش یافته و پس از آن به صورت معکوس با کاهش r_1 می‌یابد. تغییرات B_{ϕ} نسبت به r در شکل ۲-۶ (ب) رسم شده است.

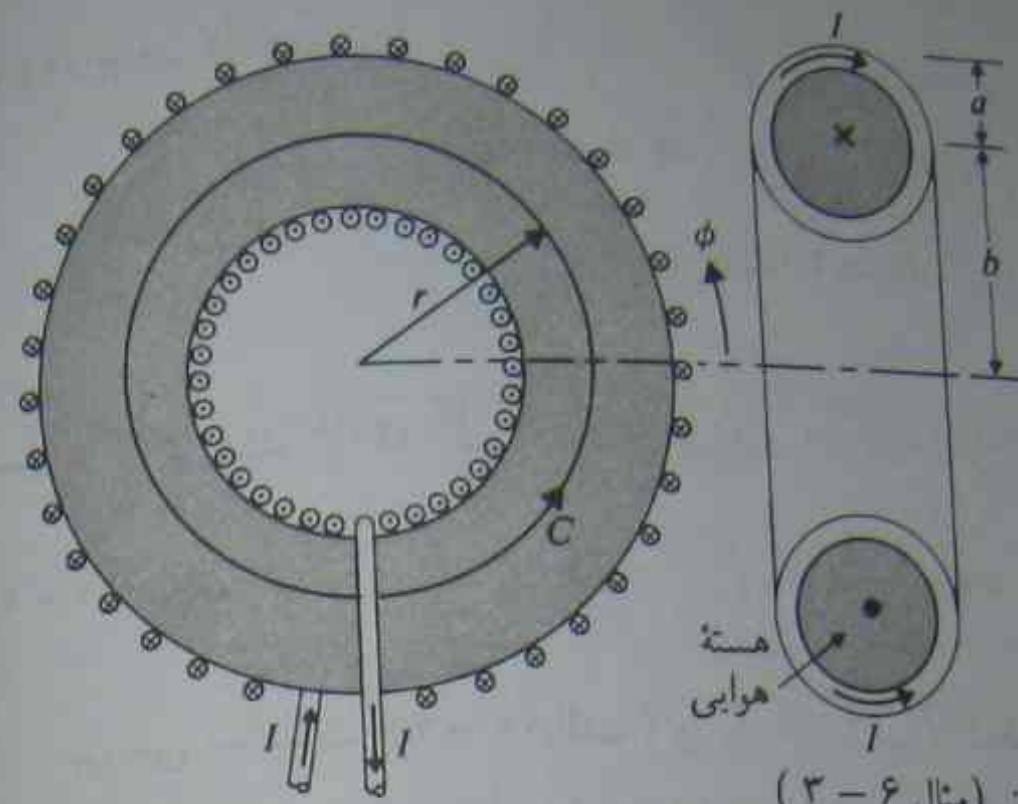
اگر مسئله، مربوط به یک هادی استوانه‌ای توپر حامل جریان دائم کل I نباشد، بلکه به یک لوله مدور بسیار نازک حامل جریان سطحی ارتباط یابد. آنگاه از قانون مداری آمپر روشن است که در درون لوله، $B = 0$ است. در بیرون لوله، معادله (۱۱-۶ ب) همچنان بکار می‌رود و کل جریان گذرنده از لوله برابر I می‌باشد. از این رو، در مورد یک استوانه توخالی بینهایت طول حامل چگالی جریان سطحی $J_s = a_s J_s$ (A/m) و $I = 2\pi b J_s$ داریم:

$$B = \begin{cases} 0 & r < b \\ a_{\phi} \frac{\mu_0 b}{r} J_s & r > b \end{cases} \quad (۱۲-۶)$$

مثال ۲-۶ چگالی شار مغناطیسی دو درون یک سیم‌پیچ چنبره‌ای با هسته هوائی و N دور سیم‌پیچ به هم فشرده حامل جریان I را تعیین کنید. شعاع متوسط چنبره b و شعاع هر دور سیم‌پیچ a است.

حل شکل ۲-۶ هندسی مسئله را تشریح می‌نماید. تقارن استوانه‌ای اطمینان می‌دهد که B فقط دارای مؤلفه ϕ است و در امتداد هر مسیر دایره‌ای حول محور چنبره ثابت است. مطابق شکل، مسیر مدور C را به شعاع r تشکیل می‌دهیم. به ازای $(b-a) < r < b+a$ ، معادله (۱۰-۶) مستقیماً نتیجه می‌دهد.

$$\oint B \cdot d\ell = 2\pi r B_{\phi} = \mu_0 N I$$



شکل ۳-۶ سیم‌پیچ چنبره‌ای حامل جریان (مثال ۳-۶)

که در آن فرض کرده‌ایم چنبره دارای هسته هوایی با نفوذپذیری μ است. بنابراین

$$B = a_\phi B_\phi = a_\phi \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}, \quad (b-a) < r < (b+a) \quad (۱۳-۶)$$

روشن است که به‌ازای $r < (b-a)$ و $r > (b+a)$ است، زیرا کل جریان خالص در برگرفته شده توسط مسیر تشکیل یافته در این دو ناحیه صفر است.

مثال ۳-۶ جگالی شار مغناطیسی در درون یک سلونوئید بینهایت طویل با هسته هوایی و دارای n دور سیم‌پیچ فشردده در واحد طول، حامل جریان I را (انطور که در شکل ۳-۶ نشان داده شده است) تعیین کنید.

حل این مسئله به دو صورت قابل حل است.

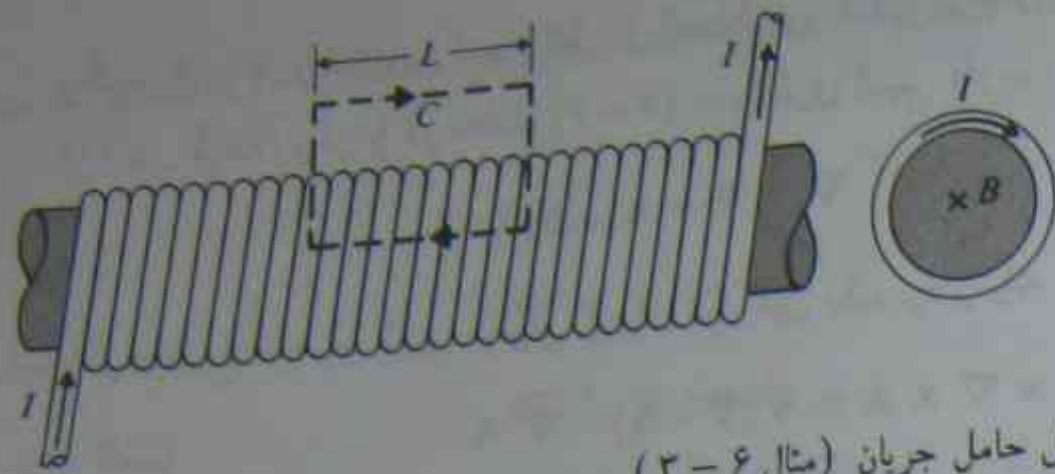
الف) با کاربرد مستقیم قانون مداری آمپر. واضح است که هیچ میدان مغناطیسی در بیرون سلونوئید وجود ندارد. برای تعیین میدان B در داخل، مسیر مستطیلی C ، به طول L را چنان تشکیل می‌دهیم که بخشی از آن در داخل و بخش دیگر در خارج سلونوئید قرار گیرد. به دلیل تقارن، میدان B داخل باید به موازات محور باشد. با استفاده از قانون مداری آمپر داریم

$$BL = \mu_0 nLI$$

یا

$$B = \mu_0 nI \quad (۱۴-۶)$$

مطابق شکل ۳-۶، جهت B از راست به چپ است و نسبت به جهت جریان I ، در سلونوئید با قاعده دست راست مطابقت دارد.



شکل ۳-۶ سلونوئید طویل حامل جریان (مثال ۳-۶)

ب) به‌عنوان حالت خاص یک چنبره. این سلونوئید مستقیم را می‌توان به‌عنوان حالت خاص سیم‌پیچ چنبره‌ای مثال ۳-۶ با شعاع بینهایت ($b \rightarrow \infty$) در نظر گرفت. در چنین حالتی، ابعاد مقطع عرضی هسته در مقایسه با b بسیار کوچک هستند و جگالی شار مغناطیسی در داخل هسته به‌طور تقریبی ثابت است. از معادله (۱۳-۶) داریم

$$B = \mu_0 \left(\frac{N}{2\pi b} \right) I = \mu_0 nI$$

که مشابه معادله (۱۴-۶) است.

۳-۶ پتانسیل مغناطیسی برداری

اصل موضوعی بدون دیورژانس بودن B در معادله (۶-۶)، $\nabla \cdot B = 0$ ، تضمین می‌کند که B سلونوئیدی است. در نتیجه، B می‌تواند به‌صورت کرل میدان برداری دیگری چون A بیان گردد. به طوری که (اتحاد II، معادله (۲-۱۴۹) را در بخش ۲-۱۱ ببینید)،

$$B = \nabla \times A \quad (T) \quad (۱۵-۶)$$

میدان برداری A که به این ترتیب تعریف می‌شود، پتانسیل مغناطیسی برداری نامیده می‌شود. واحد SI آن وبر بر متر (Wb/m) است. از این رو اگر بتوانیم در مورد یک توزیع جریان، A را پیدا کنیم، با یک عمل دیفرانسیلی (یا کرل)، B از روی A بدست می‌آید. این مسئله کاملاً مشابه معرفی پتانسیل الکتریکی عددی V در مورد E بدون کرل، در الکتریسیته ساکن (بخش ۲-۵) و بدست آوردن E از رابطه $E = -\nabla V$ است. اما تعریف یک بردار به مشخص کردن کرل و دیورژانس آن، هر دو نیاز دارد. از این رو معادله (۱۵-۶) بتهائی برای تعریف A کافی نیست؛ و هنوز لازم است دیورژانس آن تعریف شود.

چگونه $\nabla \cdot \mathbf{A}$ را انتخاب کنیم؟ قبل از پاسخگویی به این پرسش، گیریم از \mathbf{B} در معادله (۱۵-۶) کرل گرفته و آن را در معادله (۷-۶) جایگذاری کنیم. داریم،

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (۱۶-۶)$$

در اینجا از موضوع منحرف شده، فرمولی را برای کرل کرل یک بردار ارائه می‌دهیم

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (۱۷-۶ \text{ الف})$$

یا

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} \quad (۱۷-۶ \text{ ب})$$

معادله (۱۷-۶ الف) یا (۱۷-۶ ب) می‌تواند به‌عنوان تعریف $\nabla^2 \mathbf{A}$ ، لاپلاسیان \mathbf{A} در نظر گرفته شود. در مختصات کارتزین، با استفاده از جایگذاری مستقیم می‌توان بسادگی تحقیق کرد که (مسئله م. ۱۶-۶)،

$$\nabla^2 \mathbf{A} = a_x \nabla^2 A_x + a_y \nabla^2 A_y + a_z \nabla^2 A_z \quad (۱۸-۶)$$

از این رو، در مختصات کارتزین، لاپلاسیان میدان برداری \mathbf{A} ، میدان برداری دیگری است که مؤلفه‌های آن، لاپلاسیان (دیورژانس گرادینان) مؤلفه‌های متناظر \mathbf{A} هستند. اما این مطلب در مورد دیگر دستگاههای مختصاتی صحیح نیست.

اکنون $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A}$ در معادله (۱۶-۶) را بر اساس معادله (۱۷-۶ الف) بسط داده، بدست می‌آوریم

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (۱۹-۶)$$

با این هدف که معادله (۱۹-۶) را تا آنجائی که مقدور است ساده نماییم، چنین انتخاب می‌کنیم: †

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (۲۰-۶)$$

و معادله (۱۹-۶) به‌صورت زیر در می‌آید

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (۲۱-۶)$$

† معادله (۱۷-۶ الف) را می‌توان به‌طور ذهنی از فرمول حاصلضرب سه‌گانه برداری معادله (۲۰-۶) و در نظر گرفتن عملگر $\nabla \cdot \text{del}$ به‌صورت یک بردار، بدست آورد:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - (\nabla \cdot \nabla) \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

‡ این رابطه را شرط کولمب با بیان کولمب گویند.

این رابطه، معادله برداری پواسون است. در مختصات کارتزین، معادله (۲۱-۶) معادل سه معادله پواسون عددی است:

$$\nabla^2 A_x = -\mu_0 J_x \quad (۲۲-۶ \text{ الف})$$

$$\nabla^2 A_y = -\mu_0 J_y \quad (۲۲-۶ \text{ ب})$$

$$\nabla^2 A_z = -\mu_0 J_z \quad (۲۲-۶ \text{ پ})$$

هر کدام از این سه معادله از نظر ریاضی مشابه معادله پواسون، معادله (۲-۶)، در الکتروستاتیک ساکن است. در فضای آزاد، معادله

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

دارای جواب خاص زیر است (معادله ۲-۶۱ را ببینید)،

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho}{R} dv'$$

از این رو جواب معادله (۲۲-۶ الف) برابر است با

$$A_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{J_x}{R} dv'$$

جواب‌های مشابهی را می‌توان برای A_y و A_z نوشت. با ترکیب این سه معادله، جواب معادله (۲۱-۶) حاصل می‌شود:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}}{R} dv' \quad (\text{Wb/m}) \quad (۲۳-۶)$$

معادله (۲۳-۶) ما را قادر می‌سازد که پتانسیل مغناطیسی برداری \mathbf{A} را از روی چگالی جریان حجمی \mathbf{J} پیدا کنیم. سپس چگالی شار مغناطیسی \mathbf{B} ، با استفاده از دیفرانسیل‌گیری از $\nabla \times \mathbf{A}$ ، به طریقی مشابه با بدست‌آوردن میدان الکتریکی ساکن \mathbf{E} از روی $-\nabla V$ بدست می‌آید.

پتانسیل برداری \mathbf{A} ، به شار مغناطیسی Φ ، گذرنده از سطح مشخص S که توسط مسیر C در بر گرفته شده است به‌صورت ساده‌ای مربوط می‌شود:

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \quad (۲۴-۶)$$

واحد SI برای شار مغناطیسی، وبر (Wb) است، که معادل تسلا-متر مربع ($\text{T} \cdot \text{m}^2$) می‌باشد. با استفاده از معادله (۱۵-۶) و قضیه استوکس داریم،

$$\Phi = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s} = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (\text{Wb}) \quad (۲۵-۶)$$

از این رو، پتانسیل مغناطیسی برداری \mathbf{A} دارای مفهوم فیزیکی است بدین معنی که انتگرال

خطی آن به دور هر مسیر بسته برابر کل شار مغناطیسی گذرنده از سطح محصور شده توسط این مسیر است.

۴-۶ قانون بیوساوار و کاربردهای آن

در موارد کاربردی بسیاری، علاقه مندیم که میدان مغناطیسی ناشی از یک مدار حامل جریان را تعیین کنیم. در یک سیم نازک با سطح مقطع S ، dv' برابر است با Sdl' و جریان گذرنده تماماً در امتداد سیم است. داریم

$$Jdv' = JSdl' = Idl' \quad (26-6)$$

و معادله (۲۳-۶) به صورت زیر در می آید

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{C'} \frac{dl'}{R} \quad (\text{Wb/m}) \quad (27-6)$$

که در آن، دایره‌ای روی علامت انتگرال قرار گرفته است، زیرا جریان I می‌باید از یک مسیر بسته C' که با C' نمایش داده شده است، عبور کند. از این رو چگالی شار مغناطیسی برابر است با

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times \left[\frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{C'} \frac{dl'}{R} \right] \quad (28-6)$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{C'} \nabla \times \left(\frac{dl'}{R} \right)$$

در معادله (۲۸-۶)، توجه به این نکته اهمیت دارد که عملیات بدون پریم کرل، دیفرانسیل‌گیری نسبت به مختصات فضائی نقطه میدان را ایجاد می‌نماید، و عملیات انتگرال در ارتباط با مختصات پریم دار منبع است. با استفاده از اتحاد زیر (مسئله ۲۰-۳۷ را ببینید) عبارت مورد انتگرال‌گیری معادله (۲۸-۶) به دو جمع بسط داده می‌شود:

$$\nabla \times (f\mathbf{G}) = f\nabla \times \mathbf{G} + (\nabla f) \times \mathbf{G} \quad (29-6)$$

با در نظر گرفتن $f = 1/R$ و $\mathbf{G} = dl'$ ، داریم:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{C'} \left[\frac{1}{R} \nabla \times dl' + \left(\nabla \frac{1}{R} \right) \times dl' \right] \quad (30-6)$$

ما اکنون با جریانهای مستقیم (تغییرپذیر با زمان) سروکار داریم که موجب پیدایش میدانهای مغناطیسی دائمی می‌شوند. مدارهای شامل منابع تغییرپذیر با زمان می‌توانند جریانهای متغیر با زمان را در امتداد یک سیم باز ارسال داشته و بارهایی را در انتهای آن ذخیره نمایند. آنتن یک نمونه است.

۴-۶ قانون بیوساوار و کاربردهای آن

حال، چون مختصات بدون پریم و پریم دار مستقل از یکدیگرند، $\nabla \times dl'$ برابر صفر است، و نخستین جمله سمت راست معادله (۳۰-۶) صفر می‌شود. فاصله R از dl' در نقطه (x, y, z) تا نقطه میدان (x', y', z') اندازه‌گیری می‌شود. از این رو داریم

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= [(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{-1/2} \\ \nabla \left(\frac{1}{R} \right) &= a_x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{R} \right) + a_y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{R} \right) + a_z \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{R} \right) \\ &= -\frac{a_x(x-x') + a_y(y-y') + a_z(z-z')}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{3/2}} \quad (31-6) \\ &= -\frac{\mathbf{R}}{R^3} = -a_R \frac{1}{R^2} \end{aligned}$$

که در آن، a_R بردار واحد است، و جهت آن از نقطه منبع به سوی نقطه میدان می‌باشد. جاگذاری معادله (۳۱-۶) در معادله (۳۰-۶) بدست می‌دهد:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{C'} \frac{dl' \times a_R}{R^2} \quad (\text{T}) \quad (32-6)$$

معادله (۳۲-۶)، به قانون بیوساوار معروف است. این معادله، فرمولی برای تعیین \mathbf{B} ناشی از جریان I در مسیر بسته C' بوده، با گرفتن کرل \mathbf{A} در معادله (۲۷-۶) بدست آمده است. گاهی مناسب‌تر است معادله (۳۲-۶) را در دو مرحله بنویسیم:

$$\mathbf{B} = \oint_{C'} d\mathbf{B} \quad (\text{T}) \quad (33-6 \text{ الف})$$

به همراه،

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(\frac{dl' \times a_R}{R^2} \right) \quad (\text{T}) \quad (33-6 \text{ ب})$$

که چگالی شار مغناطیسی ناشی از جزء جریانی کوچک Idl' است. شکل دیگر و گاهی مناسب‌تر معادله (۳۳-۶) عبارت است از:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(\frac{dl' \times \mathbf{R}}{R^3} \right) \quad (\text{T}) \quad (33-6 \text{ پ})$$

مقایسه معادله (۳۲-۶) با معادله (۱۰-۶)، آشکار می‌سازد که، به‌طور کلی، بکارگیری قانون

بیوساوار، مشکل‌تر از قانون مداری آمپر است. اما اگر مسیر بسته‌ای پیدا نشود که روی آن B مقدار ثابتی داشته باشد، قانون مداری آمپر برای تعیین میدان B از روی I در یک مدار مفید نیست.

مثال ۴-۶ جریان مستقیم I از سیم مستقیمی به طول $2L$ می‌گذرد. چگالی شار مغناطیسی B را در نقطه‌ای به فاصله r از سیم در صفحه عمود منصف آن: (الف) با تعیین پتانسیل مغناطیسی برداری A به عنوان قدم اول، و (ب) با بکارگیری قانون بیوساوار، پیدا کنید.

حل جریان فقط در مدارهای بسته وجود دارد. از این رو سیم موجود در مسئله حاضر باید بخشی از یک حلقه حامل جریان با چندین ضلع مستقیم باشد. چون از بقیه مدار اطلاعی نداریم، نمی‌توان از مزیت استفاده از قانون مداری آمپر برخوردار شد. به شکل ۵-۶ مراجعه کنید. پاره خط حامل جریان در امتداد محور z قرار داده شده است. یک نمونه جزء کوچک بر روی سیم عبارت است از

$$d\ell' = a_z dz'$$

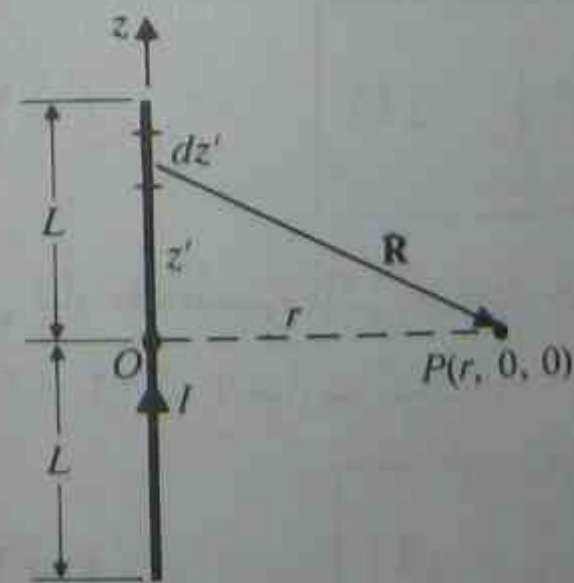
مختصات استوانه‌ای نقطه میدان P ، عبارتند از (r, ϕ, z) .

(الف) به روش پیدا کردن B از روی $\nabla \times A$. با جایگذاری $R = \sqrt{z'^2 + r^2}$ در معادله (۲۷-۶)، داریم

$$\begin{aligned} A &= a_z \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-L}^L \frac{dz'}{\sqrt{z'^2 + r^2}} \\ &= a_z \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\ln(z' + \sqrt{z'^2 + r^2}) \right] \Big|_{-L}^L \\ &= a_z \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \frac{\sqrt{L^2 + r^2} + L}{\sqrt{L^2 + r^2} - L} \end{aligned} \quad (۲۴-۶)$$

بنابراین

$$B = \nabla \times A = \nabla \times (a_z A_z) = a_r \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - a_\phi \frac{\partial A_z}{\partial r}$$



شکل ۵-۶ سیم مستقیم حامل جریان (مثال ۴-۶)

۲-۶ قانون بیوساوار و کاربردهای آن

تقارن استوانه‌ای حول سیم تضمین می‌کند که $\partial A_z / \partial \phi = 0$. از این رو

$$B = -a_\phi \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \frac{\sqrt{L^2 + r^2} + L}{\sqrt{L^2 + r^2} - L} \right] \quad (۲۵-۶)$$

$$= a_\phi \frac{\mu_0 I L}{2\pi r \sqrt{L^2 + r^2}}$$

وقتی $r \ll L$ است، معادله (۲۵-۶) به صورت زیر ساده می‌شود:

$$B_\phi = a_\phi \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (۲۶-۶)$$

که عبارت مربوط به B در نقطه‌ای به فاصله r از یک سیم بینهایت طولیل مستقیم حامل جریان I ، داده شده در معادله (۱۲-۶) است.

(ب) با استفاده از قانون بیوساوار. از شکل ۵-۶ ملاحظه می‌شود که بردار فاصله از جزء کوچک منبع dz' تا نقطه میدان P برابر است با

$$R = a_r r - a_z z'$$

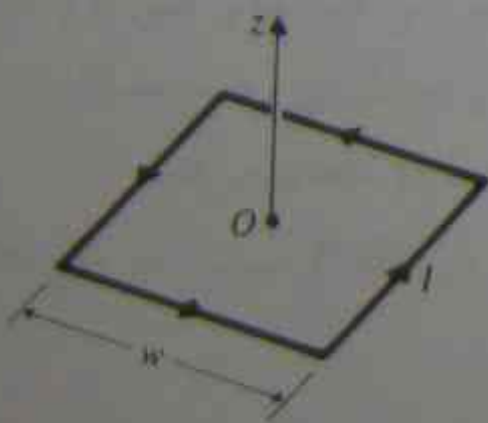
$$d\ell' \times R = a_z dz' \times (a_r r - a_z z') = a_\phi r dz'$$

جاگذاری در معادله (۲۳-۶) نتیجه می‌دهد

$$\begin{aligned} B &= \int dB = a_\phi \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-L}^L \frac{rdz'}{(z'^2 + r^2)^{3/2}} \\ &= a_\phi \frac{\mu_0 I L}{2\pi r \sqrt{L^2 + r^2}} \end{aligned}$$

که همان معادله (۲۵-۶) است.

مثال ۵-۶ چگالی شار مغناطیسی را در مرکز حلقه مربع‌شکلی به ضلع w و حامل جریان مستقیم I ، پیدا کنید.



شکل ۶-۶ حلقه مربع‌شکل حامل جریان I (مثال ۵-۶)

حل فرض کنید مطابق شکل ۶-۶، حلقه در صفحه xy قرار دارد. چگالی شار مغناطیسی در مرکز حلقه مربع شکل چهار برابر چگالی شار مغناطیسی ناشی از یک ضلع تنها، به طول w است. با قراردادن $L = r = w/2$ در معادله (۲۵-۶) داریم:

$$\mathbf{B} = \mathbf{a}_z \frac{\mu_0 I}{\sqrt{2\pi w}} \times 4 = \mathbf{a}_z \frac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi w} \quad (۲۷-۶)$$

که در آن جهت \mathbf{B} و جهت جریان حلقه از قاعده دست راست پیروی می کنند.

مثال ۶-۶ چگالی شار مغناطیسی را در نقطه‌ای روی محور یک حلقه دایره‌ای به شعاع b و حامل جریان مستقیم I پیدا کنید.

حل قانون بیوساوار را در مورد حلقه دایره‌ای نشان داده شده در شکل ۶-۷ بکار می‌بریم:

$$d\ell' = a_\phi b d\phi'$$

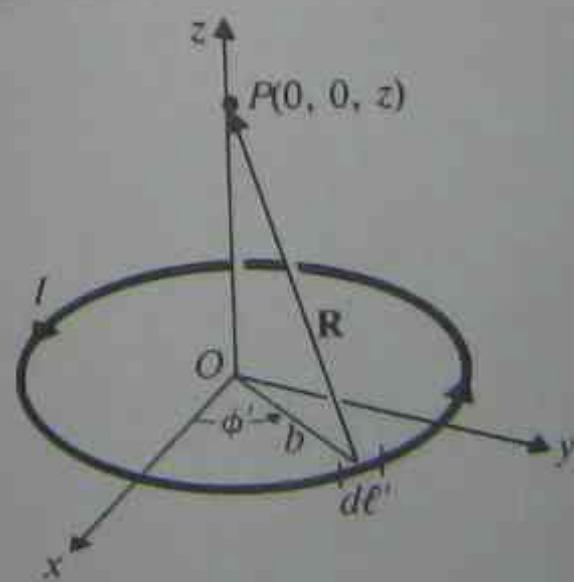
$$\mathbf{R} = \mathbf{a}_z z - \mathbf{a}_r b$$

$$R = (z^2 + b^2)^{1/2}$$

بار دیگر مهم است بخاطر داشته باشیم که \mathbf{R} برداری از جزء کوچک منبع $d\ell'$ به نقطه میدان P است. داریم:

$$\begin{aligned} d\ell' \times \mathbf{R} &= a_\phi b d\phi' \times (\mathbf{a}_z z - \mathbf{a}_r b) \\ &= a_\phi b z d\phi' + a_z b^2 d\phi' \end{aligned}$$

به دلیل تقارن استوانه‌ای، بسادگی دیده می‌شود که با در نظر گرفتن سهم جزء کوچک از نظر قطری متقابل $d\ell'$ ، مؤلفه a_r حذف می‌گردد، بنابراین، تنها لازم است مؤلفه a_z این ضرب خارجی را در نظر بگیریم.



شکل ۶-۷ حلقه دایره‌ای حامل جریان I (مثال ۶-۶)

از معادله (۶-۳۳ الف) و (۶-۳۳ ب) می‌نویسیم:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{a}_z \frac{b^2 d\phi'}{(z^2 + b^2)^{3/2}}$$

یا

$$\mathbf{B} = \mathbf{a}_z \frac{\mu_0 I b^2}{2(z^2 + b^2)^{3/2}} \quad (T) \quad (۳۸-۶)$$

۶-۵ دوقطبی مغناطیسی

این بخش را با یک مثال شروع می‌کنیم.

مثال ۶-۷ چگالی شار مغناطیسی، در فاصله دور از یک حلقه دایره‌ای کوچک به شعاع b و حامل جریان I (یک دوقطبی مغناطیسی) را پیدا کنید.

حل از صورت مسئله پیدا است که علاقه مندیم \mathbf{B} را در نقطه‌ای به فاصله R از مرکز حلقه که رابطه $R \gg b$ را برآورده می‌سازد، تعیین کنیم؛ در این صورت، می‌توان از تقریبات ساده‌کننده مشخصی استفاده نمود.

مطابق شکل ۶-۸، مرکز حلقه را مبدأ مختصات کروی انتخاب می‌کنیم، مختصات منبع، بریم‌دار هستند. نخست، پتانسیل مغناطیسی برداری \mathbf{A} را پیدا کرده و سپس \mathbf{B} را از روی $\nabla \times \mathbf{A}$ تعیین می‌نماییم:

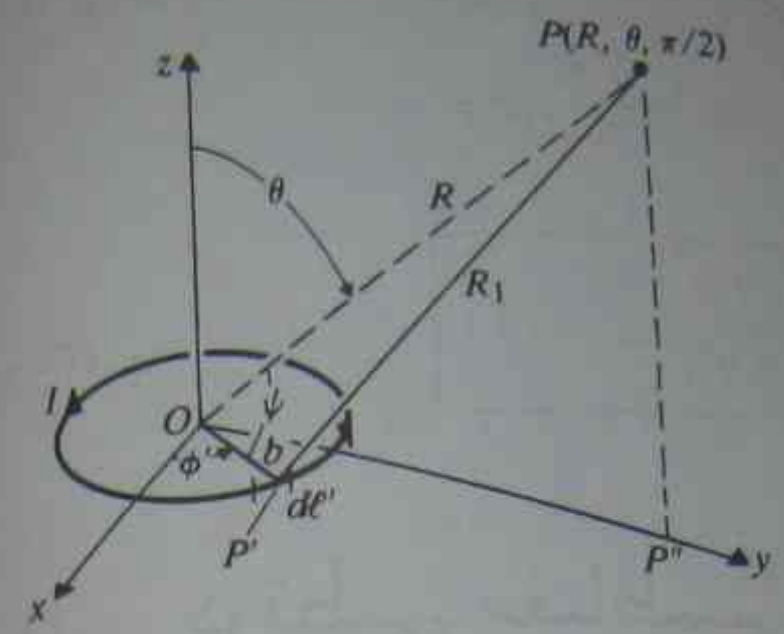
$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{d\ell'}{R_1} \quad (۳۹-۶)$$

معادله (۳۹-۶)، همان معادله (۲۷-۶) است، بجز در یک نکته مهم: R در معادله (۲۷-۶)، فاصله بین جزء کوچک منبع $d\ell'$ در P' و نقطه میدان P را نمایش می‌دهد؛ اما بر طبق طرز نمایش شکل ۶-۸، باید با R_1 جایگزین شود. به دلیل تقارن، میدان مغناطیسی بوضوح مستقل از زاویه ϕ نقطه میدان است. برای راحتی $P(R, \theta, \pi/2)$ را در صفحه yz انتخاب می‌کنیم.

نکته مهم دیگر، این است که \mathbf{a}_ϕ در $d\ell'$ مشابه \mathbf{a}_ϕ در نقطه P نیست. در واقع مطابق شکل ۶-۸، \mathbf{a}_ϕ در P ، برابر $-\mathbf{a}_x$ است، و

$$d\ell' = (-\mathbf{a}_x \sin \phi' + \mathbf{a}_y \cos \phi') b d\phi' \quad (۴۰-۶)$$

به‌ازای هر $d\ell'$ ، جزء کوچک جریان دیفرانسیلی متقارن آن، در طرف دیگر محور y وجود دارد که در جهت $-\mathbf{a}_x$ به مقدار برابری روی \mathbf{A} اثر می‌گذارد، ولی سهم $d\ell'$ را در جهت \mathbf{a}_y خشی



شکل ۸-۶ حلقه دایره‌ای کوچک حامل جریان I (مثال ۶-۷)

می‌نماید. معادله (۳۹-۶) به صورت زیر می‌تواند نوشته شود:

$$\mathbf{A} = -\mathbf{a}_x \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{b \sin \phi'}{R_1} d\phi'$$

یا

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}_\phi \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin \phi'}{R_1} d\phi' \quad (۴۱-۶)$$

قانون کسینوس‌ها در مورد مثلث OPP' نتیجه می‌دهد

$$R_1^2 = R^2 + b^2 - 2bR \cos \psi$$

که در آن $R \cos \psi$ تصویر R روی شعاع OP' و مشابه تصویر OP'' (OP'' = R sin theta) روی OP' است. از این رو

$$R_1^2 = R^2 + b^2 - 2bR \sin \theta \sin \phi'$$

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R} \left(1 + \frac{b^2}{R^2} - \frac{2b}{R} \sin \theta \sin \phi' \right)^{-1/2}$$

وقتی $b^2 \gg R^2$ است، b^2/R^2 در مقایسه با ۱ قابل صرف نظر کردن خواهد بود:

$$\frac{1}{R_1} \cong \frac{1}{R} \left(1 - \frac{2b}{R} \sin \theta \sin \phi' \right)^{-1/2} \quad (۴۲-۶)$$

$$\cong \frac{1}{R} \left(1 + \frac{b}{R} \sin \theta \sin \phi' \right)$$

جاگذاری معادله (۴۲-۶) در معادله (۴۱-۶) نتیجه می‌دهد

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}_\phi \frac{\mu_0 I b}{2\pi R} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(1 + \frac{b}{R} \sin \theta \sin \phi' \right) \sin \phi' d\phi'$$

یا

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}_\phi \frac{\mu_0 I b^2}{4R^2} \sin \theta \quad (۴۳-۶)$$

چگالی شار مغناطیسی برابر $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ است. معادله (۲-۱۳۹) را برای یافتن

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I b^2}{4R^2} (\mathbf{a}_R \cos \theta + \mathbf{a}_\theta \sin \theta) \quad (۴۴-۶)$$

می‌توان بکار برد و جواب دقیقاً همین است.

در این مرحله، شباهت میان معادله (۴۴-۶) و عبارت شدت میدان الکتریکی در نواحی میدان دور یک دوقطبی الکتریسیته ساکن طبق معادله (۳-۵۴) را تشخیص می‌دهیم. از این رو در نقاط دور، خطوط شار مغناطیسی یک دوقطبی مغناطیسی (قرار داده شده در صفحه xy) مطابق شکل ۸-۶، به همان شکل خطوط میدان الکتریکی خط چین شده یک دوقطبی الکتریکی که در شکل ۳-۱۵ داده شده است، (واقع در جهت z) خواهد بود. اما در نزدیکی‌های دوقطبی، خطوط شار مغناطیسی پیوسته هستند در حالی که خطوط میدان یک دوقطبی الکتریکی در بارها ختم می‌شوند و همیشه از بار مثبت به بار منفی می‌روند. این مطلب در شکل ۶-۹ نشان داده شده است.

اکنون بیاید عبارت پتانسیل مغناطیسی برداری معادله (۴۳-۶) را به صورت زیر دوباره مرتب کنیم

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}_\phi \frac{\mu_0 (I\pi b^2)}{4\pi R^2} \sin \theta$$

یا

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 \mathbf{m} \times \mathbf{a}_R}{4\pi R^2} \quad (\text{Wb/m}) \quad (۴۵-۶)$$

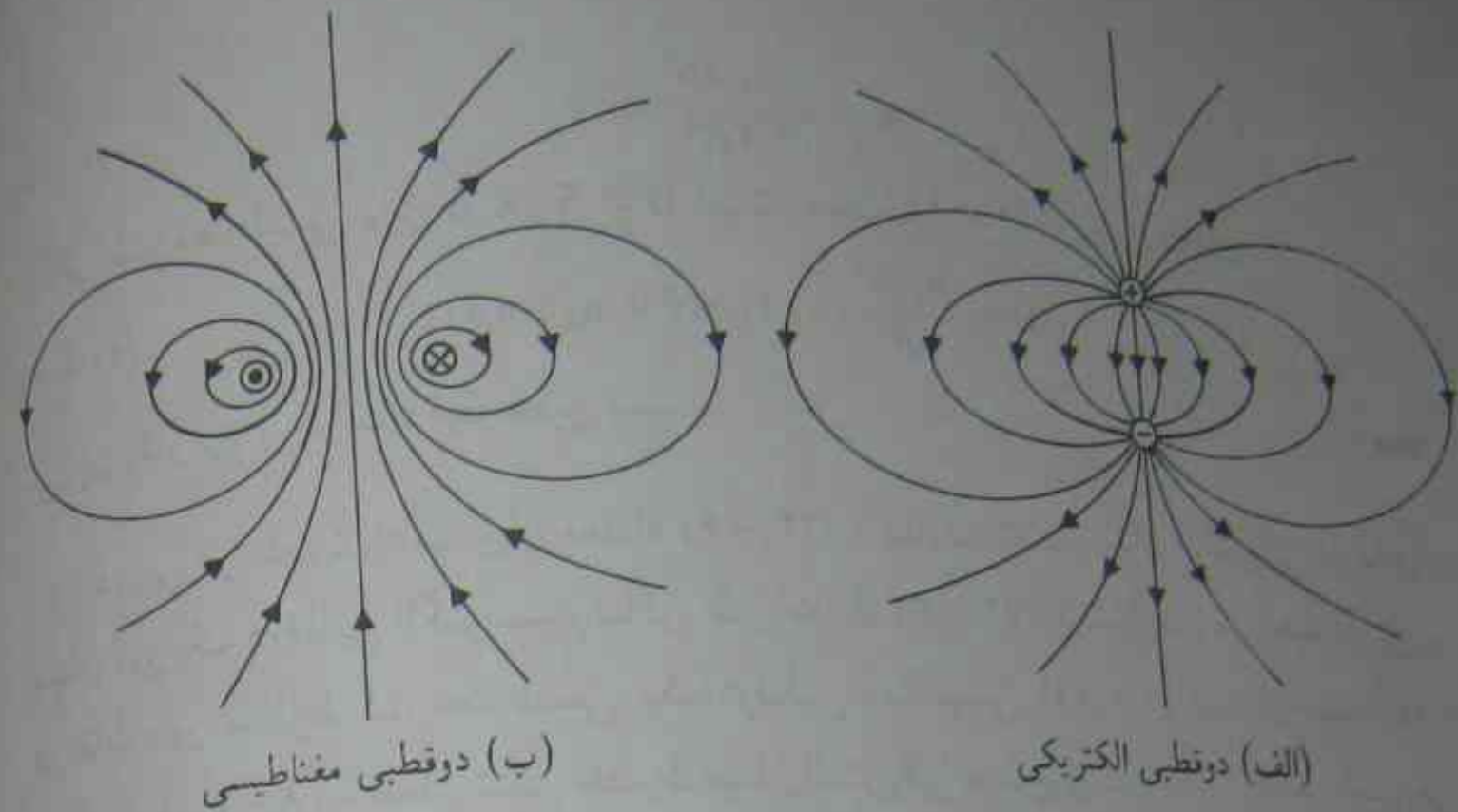
که در آن

$$\mathbf{m} = \mathbf{a}_z I\pi b^2 = \mathbf{a}_z IS = \mathbf{a}_z m \quad (\text{A} \cdot \text{m}^2) \quad (۴۶-۶)$$

به عنوان گشتاور دوقطبی مغناطیسی تعریف می‌شود، و برداری است که اندازه آن برابر با حاصلضرب جریان وارده در سطح حلقه بوده و جهتی هم‌سو با شست دست راست دارد. اگر انگشتان جهت جریان را دنبال نمایند. مقایسه معادله (۴۵-۶) با عبارت پتانسیل الکتریکی

عددی یک دوقطبی الکتریکی در معادله (۳-۵۲) ب

$$V = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{a}_R}{4\pi\epsilon_0 R^2} \quad (\text{V}) \quad (۴۷-۶)$$



شکل ۹.۶ خطوط میدان الکتریکی یک دوقطبی الکتریکی و خطوط شار مغناطیسی یک دوقطبی مغناطیسی

اشکار می‌سازد که در دو مورد A، نظیر V است. یک حلقه کوچک حامل جریان را دوقطبی مغناطیسی می‌نامیم. به‌طور مشابه، معادله (۴۴-۶) را به‌صورت زیر می‌توانیم بازنویسی کنیم

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 m}{4\pi R^3} (\mathbf{a}_R \cos \theta + \mathbf{a}_\theta \sin \theta) \quad (T) \quad (48-6)$$

بجز تغییر p به m و ε به ۱/μ، معادله (۴۸-۶) شکل مشابه معادله (۳-۵۴)، عبارت مربوط به E در نقطه‌ای دور از یک دوقطبی الکتریکی را داراست. از این رو همان طوری که قبلاً متذکر شدیم، خطوط شار مغناطیسی یک دوقطبی مغناطیسی واقع در صفحه xy، شکلی مشابه خطوط میدان الکتریکی یک دوقطبی الکتریکی واقع بر محور z دارند. اگرچه دوقطبی مغناطیسی مثال ۶-۷، به‌صورت حلقه‌ای دایره‌ای، در نظر گرفته شد، اما می‌توان نشان داد (مسئله ۶-۱۹) که وقتی حلقه، مستطیلی با $m = IS$ داده شده در معادله (۴۶-۶) باشد، عبارتهای مشابهی - معادلات (۴۵-۶) و (۴۸-۶) بدست می‌آیند.

۵-۶-۱ پتانسیل مغناطیسی عددی

در یک ناحیه بدون جریان، $\mathbf{J} = 0$ ، معادله (۷-۶) به‌صورت زیر در می‌آید:

$$\nabla \times \mathbf{B} = 0$$

۵-۶ دوقطبی مغناطیسی

در این صورت چگالی شار مغناطیسی B، بدون کرل و قابل بیان به‌صورت گرادیان یک میدان عددی است. گیریم

$$\mathbf{B} = -\mu_0 \nabla V_m \quad (50-6)$$

که در آن V_m پتانسیل مغناطیسی عددی (برحسب آمپر) نامیده می‌شود. علامت منفی در معادله (۵۰-۶) قراردادی است (تعریف پتانسیل الکتریکی عددی V در معادله (۳-۴۳) را ببینید) و نفوذپذیری فضای آزاد μ_0 ، تنها یک ثابت تناسب است. مشابه معادله (۳-۴۵) می‌توان اختلاف پتانسیل مغناطیسی عددی بین دو نقطه P_1 و P_2 را در فضای آزاد، به‌صورت زیر نوشت:

$$V_{m2} - V_{m1} = - \int_{P_1}^{P_2} \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \quad (51-6)$$

اگر بارهای مغناطیسی با چگالی حجمی ρ_m (A/m^3) در حجم V' وجود می‌داشت، می‌توانستیم V_m را از روی

$$V_m = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{\rho_m}{R} dv' \quad (A) \quad (52-6)$$

پیدا کنیم. به این ترتیب، چگالی شار مغناطیسی B از معادله (۵۰-۶) قابل تعیین می‌بود. اما بارهای مغناطیسی مجزا هرگز به‌صورت تجربی مشاهده نگردیده‌اند؛ و باید فرضی به حساب آیند. با این وجود، در نظر گرفتن بارهای مغناطیسی فرضی در مدل ریاضی (و نه فیزیکی) هم در بررسی چند رابطه مغناطیس ساکن برحسب اطلاعات ما از الکتریسیته ساکن و هم در بنانهادن پلی بین نقطه نظر متعارف قطب مغناطیسی و مفهوم جریانهای گردان میکروسکوپی به‌عنوان منبع مغناطیسی، مناسب است.

میدان مغناطیسی یک آهنربای میله‌ای کوچک، مانند میدان دوقطبی مغناطیسی است. این مطلب با ملاحظه مسیر براده‌های آهن در اطراف یک آهنربا به‌طور تجربی قابل اثبات است. درک متعارف آن است که دو انتهای یک آهنربای دائمی (قطبهای شمال و جنوب)، به ترتیب محل استقرار بارهای مغناطیسی مثبت و منفی هستند. در یک آهنربای میله‌ای، بارهای فرضی $+q_m$ و $-q_m$ ، در فاصله d از یکدیگر قرار داشته، و یک دوقطبی مغناطیسی با گشتاور

$$\mathbf{m} = q_m \mathbf{d} = \mathbf{a}_n IS \quad (53-6)$$

را تشکیل می‌دهند. پتانسیل مغناطیسی عددی V_m ناشی از این دوقطبی مغناطیسی را می‌توان با پیروی از روال بکاررفته در زیربخش ۵-۶-۱، به‌منظور یافتن پتانسیل الکتریکی عددی ناشی از یک دوقطبی الکتریکی بدست آورد. مانند معادله (۳-۵۲) ب بدست می‌آید:

$$V_m = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{a}_R}{4\pi R^3} \quad (A) \quad (54-6)$$

جایگذاری معادله (۶-۵۴) در معادله (۶-۵۰)، همان B معادله (۶-۴۸) را نتیجه می‌دهد. ملاحظه می‌کنیم که عبارت پتانسیل مغناطیسی عددی V_m ، در معادله (۶-۵۴) مربوط به یک دوقطبی مغناطیسی، دقیقاً مشابه عبارت پتانسیل الکتریکی عددی V ، در معادله (۶-۴۷) در مورد یک دوقطبی الکتریکی است. تشابه بین پتانسیل مغناطیسی برداری A (در معادله (۶-۴۵) و V در معادله (۶-۴۷) چندان دقیق نیست. تذکر داده می‌شود که طبیعت بدون کرل B که در معادله (۶-۴۹) مشخص شده است، و از روی آن پتانسیل مغناطیسی عددی V_m تعریف می‌شود، تنها در نقاطی برقرار است که جریانی وجود نداشته باشد. در نواحی دارای جریان، میدان مغناطیسی ذخیره‌شونده نیست، و پتانسیل مغناطیسی عددی، یک تابع تک‌مقداری نیست؛ از این رو اختلاف پتانسیل مغناطیسی محاسبه‌شده توسط معادله (۶-۵۱)، به مسیر انتگرال‌گیری وابسته است. به این دلیل به منظور مطالعه میدانهای مغناطیسی در مواد مغناطیسی، به جای روش بار مغناطیسی فرضی و پتانسیل عددی، از روش جریان گردان و پتانسیل برداری استفاده خواهیم کرد. ما خواص ماکروسکوپی یک آهنربای میله‌ای را به جریانه‌های گردان اتمی (جریان‌های آمبری^۱) ناشی از الکترونها با حرکت‌های مداری^۲ و چرخشی^۳ نسبت خواهیم داد. برخی جنبه‌های چگالی بار مغناطیسی معادل (فرضی) در زیربخش ۶-۶-۱ بررسی خواهد شد.

۶-۶ مغناطیس‌شدگی و چگالی‌های جریان معادل

بر اساس مدل مقدماتی اتمی ماده، تمام مواد از اتم‌هایی با هسته بار مثبت و تعدادی الکترون بار منفی، در حال گردش به دور آن تشکیل می‌شوند. الکترون‌های مداری باعث تولید جریان گردان شده، و دوقطبی‌های مغناطیسی میکروسکوپی را تشکیل می‌دهند. بعلاوه، هم الکترون‌ها و هم هسته یک اتم روی محور خود با گشتاور دوقطبی مغناطیسی معینی می‌چرخند (حرکت وضعی). به دلیل جرم بسیار بزرگتر هسته و سرعت زاویه‌ای کمتر آن، معمولاً، گشتاور دوقطبی مغناطیسی هسته چرخان در مقایسه با گشتاور دوقطبی مغناطیسی الکترون‌های دارای حرکت مداری و چرخشی، قابل صرف‌نظر کردن است. فهم کامل تأثیرات مغناطیسی مواد، معلوماتی از مکانیک کوانتوم را نیاز دارد. (بعداً در بخش ۶-۹، توصیف کیفی رفتار انواع مختلف مواد مغناطیسی را ارائه خواهیم نمود.)

در غیاب میدان مغناطیسی خارجی، دوقطبی‌های مغناطیسی اتم‌های اکثر مواد (بجز آهنربای

۱- Amperian currents

۲- Orbiting

۳- Spinning

دائمی) دارای جهات تصادفی هستند و هیچ گشتاور مغناطیسی خالصی نتیجه نمی‌شود. اعمال یک میدان مغناطیسی خارجی، هم باعث هم‌امتداد شدن گشتاور مغناطیسی الکترون‌های چرخان و هم باعث یک گشتاور مغناطیسی القاشده ناشی از تغییر در حرکت مداری الکترون‌ها می‌گردد. برای بدست آوردن فرمولی برای تعیین تغییر کمی چگالی شار مغناطیسی، ناشی از حضور یک ماده مغناطیسی، فرض کنید m_k ، گشتاور دوقطبی مغناطیسی یک اتم است. اگر n اتم در واحد حجم وجود داشته باشد، بردار مغناطیس‌شدگی M را به صورت

$$M = \frac{\sum_{k=1}^{n\Delta v} m_k}{\Delta v} \quad (\text{A/m}) \quad (6-55)$$

تعریف می‌کنیم، که همان چگالی حجمی گشتاور دوقطبی مغناطیسی است. گشتاور دوقطبی مغناطیسی dm در مورد یک جزء کوچک حجمی dv' ، برابر $dm = M dv'$ است که بر اساس معادله (۶-۴۵)، پتانسیل مغناطیسی برداری

$$dA = \frac{\mu_0 M \times a_R}{4\pi R^2} dv' \quad (6-56)$$

را تولید خواهد کرد. با استفاده از معادله (۳-۸۲)، معادله (۶-۵۶) را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$dA = \frac{\mu_0}{4\pi} M \times \nabla' \left(\frac{1}{R} \right) dv'$$

از این رو

$$A = \int_{V'} dA = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} M \times \nabla' \left(\frac{1}{R} \right) dv' \quad (6-57)$$

که در آن، V' ، حجم ماده مغناطیس شده است.

حال از اتحاد برداری معادله (۶-۲۹) استفاده کرده، می‌نویسیم

$$M \times \nabla' \left(\frac{1}{R} \right) = \frac{1}{R} \nabla' \times M - \nabla' \times \left(\frac{M}{R} \right) \quad (6-58)$$

و طرف راست معادله (۶-۵۷) را به دو جمله بسط می‌دهیم:

$$A = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\nabla' \times M}{R} dv' - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \nabla' \times \left(\frac{M}{R} \right) dv' \quad (6-59)$$

اتحاد برداری زیر (مسئله ۶-۲۰ را ببینید) ما را قادر می‌سازد که انتگرال حجمی کرل یک بردار را به انتگرال سطحی تبدیل کنیم:

$$\int_{V'} \nabla' \times F dv' = - \oint_{S'} F \times ds' \quad (6-60)$$

که در آن، F یک بردار دلخواه با مشتقات مرتبه اول بیوسته است. از معادله (۶-۵۹) داریم،

$$A = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\nabla' \times M}{R} dv' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{S'} \frac{M \times a'_n}{R} ds' \quad (6-61)$$

که در آن a_n بردار واحد عمود و به سمت خارج از ds' و S' سطح در برگیرنده حجم V' است. مقایسه‌ای بین عبارات سمت راست معادله (۶-۶۱) و شکل A در معادله (۶-۲۳) که برحسب چگالی جریان حجمی J بیان شده است، پیشنهاد می‌کند که تأثیر بردار مغناطیس‌شدگی، معادل چگالی جریان حجمی

$$J_m = \nabla \times M \quad (A/m^2) \quad (6-62)$$

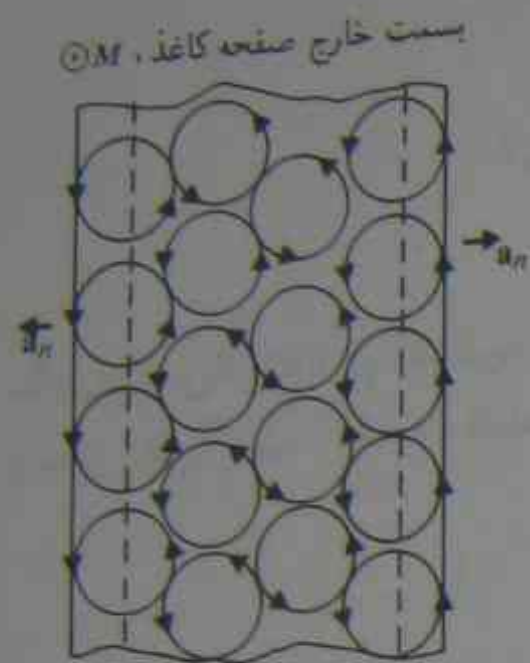
و چگالی جریان سطحی

$$J_{ms} = M \times a_n \quad (A/m) \quad (6-63)$$

است. در معادلات (۶-۶۲) و (۶-۶۳)، برای سادگی، علامت پریم روی ∇ و a_n حذف شده است. زیرا واضح است هر دو اینها به مختصات نقطه منبع، یعنی جایی که بردار مغناطیس‌شدگی M وجود دارد، اشاره می‌نمایند. به هر حال وقتی که امکان اشتباه شدن مختصات نقاط منبع و میدان وجود دارد، علامت پریم باید حفظ شود.

مسئله یافتن چگالی شار مغناطیسی B ناشی از یک چگالی حجمی مشخص از گشتاور دوقطبی مغناطیسی M ، به این ترتیب به پیدا کردن چگالی‌های جریان مغناطیس‌شدگی معادل J_m و J_{ms} با استفاده از معادلات (۶-۶۲) و (۶-۶۳)، تعیین A از معادله (۶-۶۱) و سپس بدست آوردن B از کرل A تبدیل می‌گردد. میدان مغناطیسی اعمال‌شده خارجی نیز در صورت وجود، باید جداگانه به حساب آید.

استخراج ریاضی معادلات (۶-۶۲) و (۶-۶۳) سراسر است. معادل بودن چگالی حجمی گشتاور دوقطبی مغناطیسی با چگالی جریان حجمی و چگالی جریان سطحی با مراجعه به شکل ۶-۱۰، که در آن مقطع عرضی یک ماده مغناطیس‌شده به نمایش درآمده است، به طور کیفی قابل درک می‌باشد. فرض می‌شود که میدان مغناطیسی خارجی اعمال شده باعث هم‌امتداد شدن جریان‌های گردان اتمی با آن و در نتیجه مغناطیس شدن ماده گردیده است. قدرت این تأثیر مغناطیس شدن، توسط بردار مغناطیس‌شدگی M سنجیده می‌شود. چگالی جریان سطحی J_{ms} روی سطح ماده وجود خواهد داشت و جهت آن بدرستی توسط ضرب برداری $M \times a_n$ داده می‌شود. اگر M در داخل ماده یکنواخت باشد، جریان دوقطبی‌های اتمی مجاور که در جهات متقابل می‌گذرند، همدجا یکدیگر را خنثی کرده، جریان خالص داخل را صفر می‌نمایند. این مطلب توسط معادله (۶-۶۲) قابل پیش‌بینی است، زیرا مشتقات فضایی (و بنابراین کرل) M



شکل ۶-۱۰ مقطع عرضی یک ماده مغناطیس‌شده

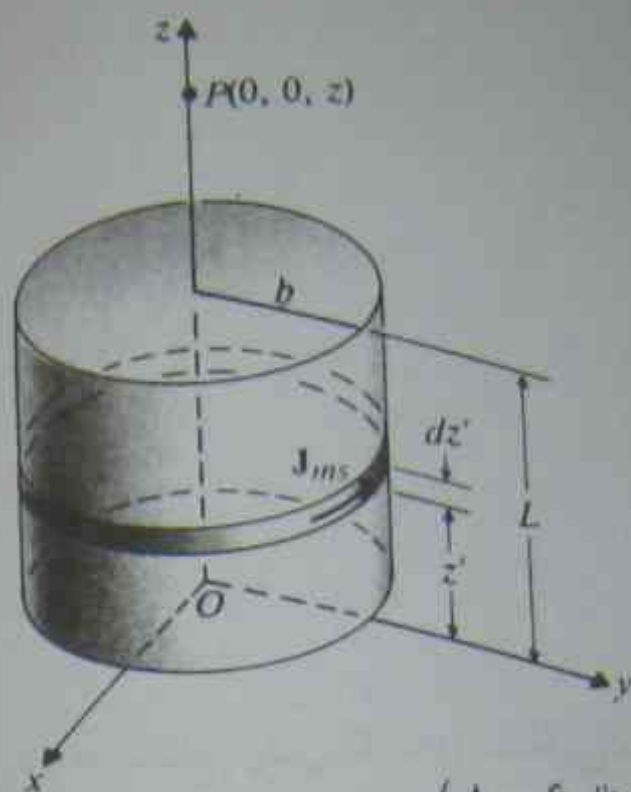
ثابت، صفر است. اما اگر M دارای تغییرات فضایی باشد، جریانهای اتمی داخلی یکدیگر را به طور کامل خنثی نکرده، چگالی جریان حجمی خالص J_m را نتیجه می‌دهد. می‌توان روابط کمی بین M و چگالی‌های جریان را با بدست آوردن جریانهای اتمی روی سطح و در درون آن تحقیق نمود. اما نیازی به این محاسبات اضافی نیست و کار ساده‌ای هم نمی‌باشد. به این کار مبادرت نخواهیم ورزید.

مثال ۶-۸ چگالی شار مغناطیسی، روی محور یک استوانه مدور از یک ماده مغناطیسی با مغناطیس‌شدگی یکنواخت را تعیین کنید. شعاع استوانه b ، طول آن L و مغناطیس‌شدگی محوری $M = a_z M_0$ است.

حل در این مسئله که در ارتباط با یک آهنربای میله‌ای استوانه‌ای است، فرض کنید محور استوانه مغناطیس شده، مطابق شکل ۶-۱۱ بر محور z در دستگاه مختصات استوانه‌ای منطبق باشد. چون مغناطیس‌شدگی M در داخل آهنربا ثابت است، $J_m = \nabla' \times M = 0$ ، و چگالی جریان حجمی معادل وجود ندارد. چگالی جریان مغناطیس‌شدگی سطحی معادل روی دیواره جانبی برابر است با

$$J_{ms} = M \times a_n = (a_z M_0) \times a_r = a_\phi M_0 \quad (6-64)$$

از این رو، آهنربا مانند یک ورقه استوانه‌ای با چگالی جریان خطی $M_0 (A/m)$ است. روی وجوه بالائی و پایینی، هیچ جریان سطحی وجود ندارد. برای یافتن B در $P(0,0,z)$ ، طول دیفرانسیلی



شکل ۱۱-۶ یک استوانهٔ مدور با مغناطیس‌شدگی یکنواخت (مثال ۸-۶)

شکل ۱۱-۶ یک استوانهٔ مدور با مغناطیس‌شدگی یکنواخت (مثال ۸-۶) را در نظر گرفته و از معادله (۳۸-۶) برای بدست آوردن

$$dB = a_z \frac{\mu_s M_s b^2 dz'}{r^2 [(z-z')^2 + b^2]^{3/2}}$$

$$B = \int dB = a_z \int_{-L}^L \frac{\mu_s M_s b^2 dz'}{r^2 [(z-z')^2 + b^2]^{3/2}} \quad (۶۵-۶)$$

$$= a_z \frac{\mu_s M_s}{r} \left[\frac{z}{\sqrt{z^2 + b^2}} - \frac{z-L}{\sqrt{(z-L)^2 + b^2}} \right]$$

استفاده می‌کنیم.

۶-۶-۱ چگالی‌های بار مغناطیسی معادل

در بخش ۶-۵-۱ توجه کردیم که در یک ناحیهٔ بدون جریان می‌توان پتانسیل مغناطیسی عددی را تعریف کرد که از روی آن می‌توان چگالی شار مغناطیسی B را با مشتق‌گیری طبق معادله (۵۰-۶) یافت. به جای معادله (۵۴-۶) برحسب بردار مغناطیس‌شدگی M (چگالی حجمی گشتاور دو قطبی مغناطیسی) می‌توان نوشت:

$$dV_m = \frac{M \cdot a_R}{4\pi R^2} dv \quad (۶۶-۶)$$

با انتگرال‌گیری از معادله (۶۶-۶) در یک جسم مغناطیس‌شده (یک آهنربا) که حامل جریانی

۶-۶ مغناطیس‌شدگی و چگالی‌های جریان معادل

نمی‌باشد، داریم:

$$V_m = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{M \cdot a_R}{R^2} dv' \quad (۶۷-۶)$$

معادله (۶۷-۶) دقیقاً دارای همان شکل معادله (۳۱-۲) در مورد پتانسیل الکتریکی عددی یک دی الکتریک قطبی شده است. با دنبال کردن گام‌هایی که به معادله (۳۱-۲) منجر گردید، بدست می‌آوریم:

$$V_m = \frac{1}{4\pi} \oint_{S'} \frac{M \cdot a'_n}{R} ds' + \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{-(\nabla' \cdot M)}{R} dv' \quad (۶۸-۶)$$

که در آن a'_n عمود بر جزء کوچک سطحی جسم مغناطیس‌شده ds' و به سمت خارج آن است. در بخش ۳-۷ ملاحظه کردیم که در محاسبات میدان، دی الکتریک قطبی شده را می‌توان با یک چگالی بار سطحی قطبی‌شدگی معادل، داده شده در معادله (۳۱-۲)، و یک چگالی بار حجمی قطبی‌شدگی معادل، داده شده در معادله (۳۱-۲) جایگزین نمود. به همین ترتیب، می‌توان نتیجه گرفت که در محاسبات میدان، جسم مغناطیس‌شده را می‌توان با یک چگالی بار سطحی مغناطیس‌شدگی (فرضی) معادل ρ_{ms} و یک چگالی بار حجمی مغناطیس‌شدگی (فرضی) معادل ρ_m ، چنان جایگزین نمود که

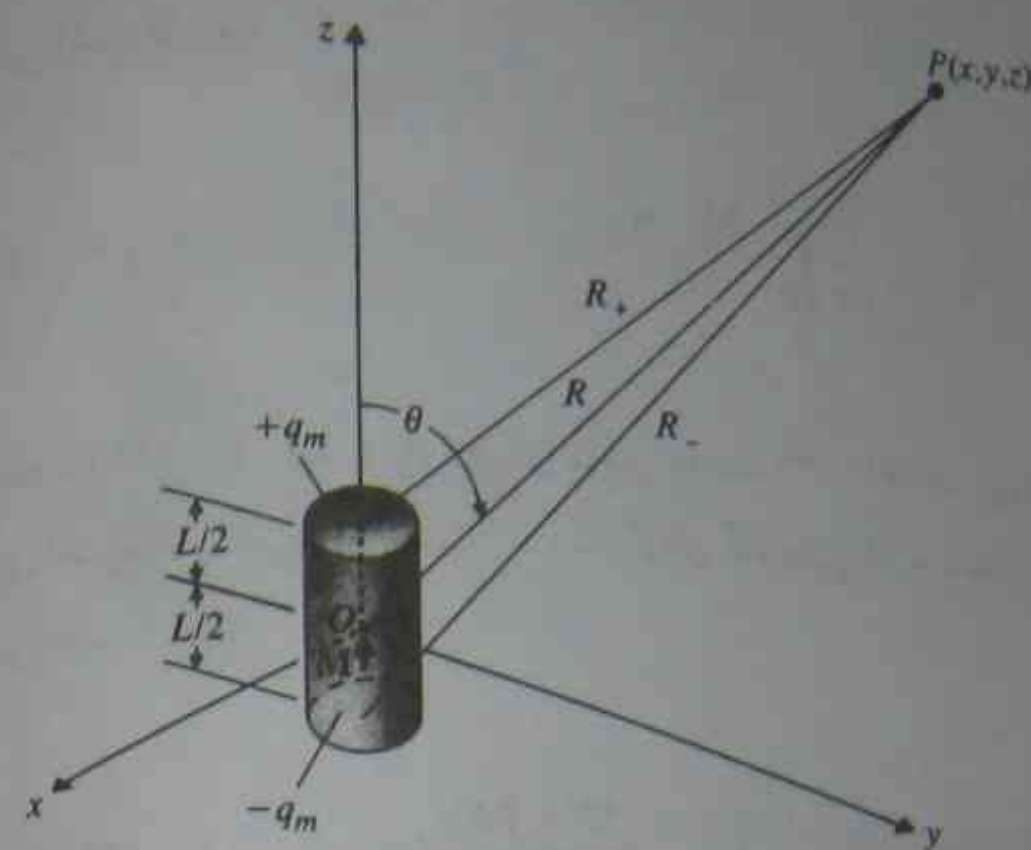
$$\rho_{ms} = M \cdot a_n \quad (\text{A/m}) \quad (۶۹-۶)$$

و

$$\rho_m = -\nabla \cdot M \quad (\text{A/m}^2) \quad (۷۰-۶)$$

کاربرد مفهوم چگالی بار مغناطیس‌شدگی معادل، برای تعیین چگالی شار مغناطیسی یک جسم مغناطیس‌شده در مثال زیر نشان داده شده است.

مثال ۹-۶ یک آهنربای میله‌ای استوانه‌ای به شعاع b و طول L دارای مغناطیس‌شدگی یکنواخت $M = a_z M_s$ در امتداد محور خود می‌باشد. با استفاده از مفهوم چگالی بار مغناطیس‌شدگی معادل، چگالی شار مغناطیسی یک نقطه دلخواه در فاصلهٔ دور را تعیین کنید.



شکل ۶-۱۲ یک آهنربای میله‌ای استوانه‌ای (مثال ۶-۹)

حل به شکل ۶-۱۲ مراجعه کنید. چگالی‌های بار مغناطیسی شدگی معادل در مورد $M = a_z M_z$ بر طبق معادلات (۶-۶۱) و (۶-۷۰) عبارتند از:

$$\rho_{ms} = \begin{cases} M_z & \text{روی وجه بالایی} \\ -M_z & \text{روی وجه پایینی} \\ 0 & \text{روی دیواره جانبی} \\ \rho_m = 0 & \text{در داخل} \end{cases}$$

در فواصل دور، کل بارهای مغناطیسی معادل روی وجوه بالایی و پایینی به صورت بارهای نقطه‌ای $q_m = \pi b^2 \rho_{ms} = \pi b^2 M_z$ ظاهر می‌شوند. در $P(x, y, z)$ داریم

$$V_m = \frac{q_m}{4\pi} \left(\frac{1}{R_+} - \frac{1}{R_-} \right) \quad (A) \quad (۶-۷۱)$$

که مشابه معادله (۲-۵۰) در مورد یک دوقطبی الکتریکی است. اگر $R \gg b$ باشد، معادله (۶-۷۱) را می‌توان به صورت زیر ساده نمود (معادله ۲-۵۳ الف را ببینید)

$$V_m = \frac{q_m L \cos \theta}{4\pi R^2} = \frac{(\pi b^2 M_z) L \cos \theta}{4\pi R^2} = \frac{M_T \cos \theta}{4\pi R^2} \quad (۶-۷۲)$$

که در آن $M_T = \pi b^2 L M_z$ گشتاور کل دوقطبی آهنربای استوانه‌ای است. سپس چگالی شار

۶-۷ شدت میدان مغناطیسی و نفوذپذیری نسبی

مغناطیسی B را نیز با اعمال معادله (۶-۵۰) می‌توان پیدا کرد:

$$B = -\mu_0 \nabla V_m = \frac{\mu_0 M_T}{4\pi R^2} (a_R \cos \theta + a_\theta \sin \theta) \quad (T) \quad (۶-۷۳)$$

که با شکل عبارت معادله (۶-۴۴) مربوط به B ناشی از یک دوقطبی مغناطیسی تنها، با گشتاور دوقطبی مغناطیسی $I \pi b^2$ در نقطه‌ای دور مشابه است.

این مسئله را می‌توان به همین سادگی با استفاده از مفهوم چگالی جریان مغناطیسی شدگی معادل حل نمود (مسئله ۶-۲۵ را ببینید).

۶-۷ شدت میدان مغناطیسی و نفوذپذیری نسبی

چون اعمال یک میدان مغناطیسی خارجی باعث هم‌امتداد شدن گشتاورهای دوقطبی داخلی و القای گشتاور مغناطیسی در ماده مغناطیسی می‌شود، انتظار داریم که چگالی شار مغناطیسی حاصل شده در حضور ماده مغناطیسی، با مقدار آن در فضای آزاد تفاوت داشته باشد. تأثیر ماکروسکوپی مغناطیسی شدگی با داخل کردن چگالی جریان حجمی معادل J_m ، معادله (۶-۶۲) در معادله اساسی کرل، معادله (۶-۷) قابل مطالعه است. داریم

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times B = J + J_m = J + \nabla \times M$$

یا

$$\nabla \times \left(\frac{B}{\mu_0} - M \right) = J \quad (۶-۷۴)$$

اکنون یک کمیت جدید اساسی میدان، شدت میدان مغناطیسی H را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\boxed{H = \frac{B}{\mu_0} - M \quad (A/m)} \quad (۶-۷۵)$$

استفاده از بردار H ما را قادر می‌سازد که معادله کرل ارتباط دهنده میدان مغناطیسی و توزیع جریانهای آزاد را در هر محیطی بنویسیم. نیازی به کار کردن با بردار مغناطیسی شدگی M یا چگالی جریان حجمی معادل J_m ، به‌طور صریح وجود ندارد. با ترکیب معادلات (۶-۷۴) و (۶-۷۵)، معادله جدید

$$\boxed{\nabla \times H = J \quad (A/m^2)} \quad (۶-۷۶)$$

بدست می آید، که در آن $J(A/m^2)$ چگالی حجمی جریان آزاد است. معادلات (۶-۶) و (۶-۷)، دو معادله دیفرانسیل اصلی حاکم بر مغناطیس ساکن در هر محیط هستند. نفوذپذیری فضای آزاد، μ_0 ، به طور صریح در این دو معادله ظاهر نمی شود. شکل انتگرالی متناظر معادله (۶-۷) با گرفتن انتگرال سطحی عددی از دو طرف آن بدست می آید:

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{s} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} \quad (۶-۷۷)$$

یا، بر اساس قضیه استوکس،

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\ell = I \quad (A) \quad (۶-۷۸)$$

که در آن، C مسیر بسته (بسته) در برگیرنده سطح S ، و I کل جریان آزاد گذرنده از S است. جهت های نسبی C و جریان گذرنده I ، از قاعده دست راست پیروی می کنند. معادله (۶-۷۸)، شکل دیگر قانون مدار آمپر است؛ و بیان می دارد که گردش شدت میدان مغناطیسی به دور هر مسیر بسته معادل جریان آزاد گذرنده از سطح محصورشده توسط این مسیر است. به طوری که در بخش ۶-۲ خاطر نشان گردید، در تعیین میدان مغناطیسی ناشی از یک جریان وقتی که تقارن استوانه ای موجود است، قانون مدار آمپر بیشترین سودمندی را دارد- یعنی وقتی مسیری بسته به دور جریان چنان موجود است که روی آن میدان مغناطیسی ثابت است. وقتی خواص مغناطیسی محیط خطی و همه سو یکسان هستند، مغناطیس شدگی مستقیماً با شدت میدان مغناطیسی متناسب خواهد بود:

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \quad (۶-۷۹)$$

که در آن χ_m ، کمیتی بدون بعد به نام ضریب حساسیت مغناطیسی^۱ است. جایگذاری معادله (۶-۷۹) در معادله (۶-۷۵) نتیجه می دهد

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mu_0 (1 + \chi_m) \mathbf{H} \\ &= \mu_0 \mu_r \mathbf{H} = \mu \mathbf{H} \quad (Wb/m^2) \end{aligned} \quad (۶-۸۰ الف)$$

یا

۶-۷ شدت میدان مغناطیسی و نفوذپذیری نسبی

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B} \quad (A/m) \quad (۶-۸۰ ب)$$

که در آن

$$\mu_r = 1 + \chi_m = \frac{\mu}{\mu_0} \quad (۶-۸۱)$$

کمیت بدون بعد دیگری به نام نفوذپذیری نسبی^۱ محیط است. پارامتر $\mu_r = \mu / \mu_0$ ، نفوذپذیری مطلق (یا گاهی فقط نفوذپذیری) محیط بوده، بر حسب H/m سنجیده می شود؛ χ_m و در نتیجه μ_r می تواند تابعی از مختصات فضائی باشد. در یک محیط ساده-خطی، همه سو یکسان و همگن- μ_r و χ_m ثابت هستند.

نفوذپذیری بیشتر مواد، بسیار نزدیک به نفوذپذیری فضای آزاد (μ_0) است. در مواد فرومغناطیسی، همچون آهن، نیکل و کبالت، μ_r می تواند بسیار بزرگ باشد (۵۰۰۰ - ۵۰ و در مورد بعضی از آلیاژهای خاص تا 10^6 یا بیشتر)؛ و نفوذپذیری نه تنها به اندازه H ، بلکه به سابقه گذشته ماده نیز بستگی دارد. بخش ۶-۹، بحث هایی کیفی در مورد رفتار ماکروسکوپی مواد مغناطیسی را در بر دارد.

در این مرحله، برخی از روابط مشابه بین کمیات الکتریسیته ساکن و مغناطیس ساکن را به صورت زیر مورد توجه قرار می دهیم:

الکتریسیته ساکن	مغناطیس ساکن
E	B
D	H
ϵ	$\frac{1}{\mu}$
P	-M
ρ	J
V	A
.	x
x	.

با جدول فوق، بیشتر معادلات ارتباط دهنده کمیات اصلی الکتریسیته ساکن را می توان به کمیات مشابه نظیر در مغناطیس ساکن تبدیل نمود.

۱- Relative permeability

۱- Magnetic susceptibility

۸-۶ مدارهای مغناطیسی

۳۰۲

در مسائل مدار الکتریکی لازم می‌شود ولتاژهای دوسر و جریانهای گذرنده از شاخه‌ها و عناصر مختلف یک شبکه الکتریکی را که توسط منابع ولتاژ و/یا جریان تحریک شده است پیدا کنیم. دسته مشابهی نیز از مسائل مربوط به مدارهای مغناطیسی وجود دارد. در یک مدار مغناطیسی، ما معمولاً با تعیین شارهای مغناطیسی و شدت میدانهای مغناطیسی در بخشهای مختلف یک مدار، ناشی از سیم‌پیچهای حامل جریان حول هسته‌های فرومغناطیسی مواجه هستیم. مسائل مدار مغناطیسی در ترانسفورماتورها، مولدها، موتورها، رله‌ها، ادوات ضبط مغناطیسی و غیره پیش می‌آیند.

تحلیل مدارهای مغناطیسی بر اساس دو معادله اساسی مغناطیس ساکن یعنی (۶-۶) و (۶-۷۶) است که جهت سهولت در زیر تکرار شده‌اند:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (۶-۸۲)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (۶-۸۳)$$

در معادله (۶-۷۸) دیده‌ایم که معادله (۶-۸۳) به قانون مداری آمپر تبدیل می‌شود. اگر مسیر بسته C طوری انتخاب شود که N دور سیم‌پیچ حامل جریان I را که یک مدار مغناطیسی را تحریک می‌کند، در بر داشته باشد، داریم

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\ell = NI = \mathcal{V}_m \quad (۶-۸۴)$$

در اینجا کمیت $\mathcal{V}_m (= NI)$ نقشی مشابه نیروی محرکه الکتریکی (emf) را در یک مدار الکتریکی بازی می‌کند و بنابراین نیروی محرکه مغناطیسی (mmf) نامیده می‌شود. واحد SI آن آمپر (A) است؛ اما به دلیل معادله (۶-۸۴)، mmf معمولاً برحسب آمپر دور (A·t) سنجیده می‌شود. mmf نیروی نیست که برحسب نیوتن سنجیده شود.

مثال ۶-۱۰ فرض کنید N دور سیم به دور یک هسته چنبره‌ای از ماده فرومغناطیسی با نفوذپذیری μ پیچیده شده است. هسته دارای شعاع متوسط r ، سطح مقطع دایره‌ای با شعاع a ($a \ll r$) و شکاف هوایی باریکی به ضخامت l_g ، مطابق شکل ۶-۱۳ است. جریان دائم I از سیم می‌گذرد. (الف) چگالی شار مغناطیسی B_r در هسته فرومغناطیسی؛ (ب) شدت میدان مغناطیسی H_r در هسته، و (پ) شدت مغناطیسی H_g در شکاف هوایی را تعیین کنید.

۳۰۳

۸-۶ مدارهای مغناطیسی

حل

الف) با اعمال قانون مداری آمپر، معادله (۶-۸۴)، حول مسیر دایره‌ای C در شکل ۶-۱۳ با شعاع متوسط r داریم

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\ell = NI. \quad (۶-۸۵)$$

اگر شار ناشی قابل چشم‌پوشی باشد، شار مشابهی از هسته فرومغناطیسی و شکاف هوایی خواهد گذشت. اگر از اثرات لبه‌ای شار در شکاف هوایی نیز صرف‌نظر شود، چگالی شار مغناطیسی B نیز در هسته و شکاف هوایی یکسان خواهد بود. اما به دلیل نفوذپذیری‌های متفاوت، شدت میدان مغناطیسی در دو قسمت متفاوت خواهد بود. داریم

$$B_f = B_g = a_\phi B_f \quad (۶-۸۶)$$

که در آن زیرنویس‌های f و g به ترتیب نماینده فرومغناطیس و شکاف هستند. در هسته فرومغناطیس،

$$\mathbf{H}_f = a_\phi \frac{B_f}{\mu} \quad (۶-۸۷)$$

در فاصله هوایی،

$$\mathbf{H}_g = a_\phi \frac{B_f}{\mu_0} \quad (۶-۸۸)$$

با جایگذاری معادلات (۶-۸۷) و (۶-۸۸) در معادله (۶-۸۵) بدست می‌آید

$$\frac{B_f}{\mu} (2\pi r_c - l_g) + \frac{B_f}{\mu_0} l_g = NI.$$

و

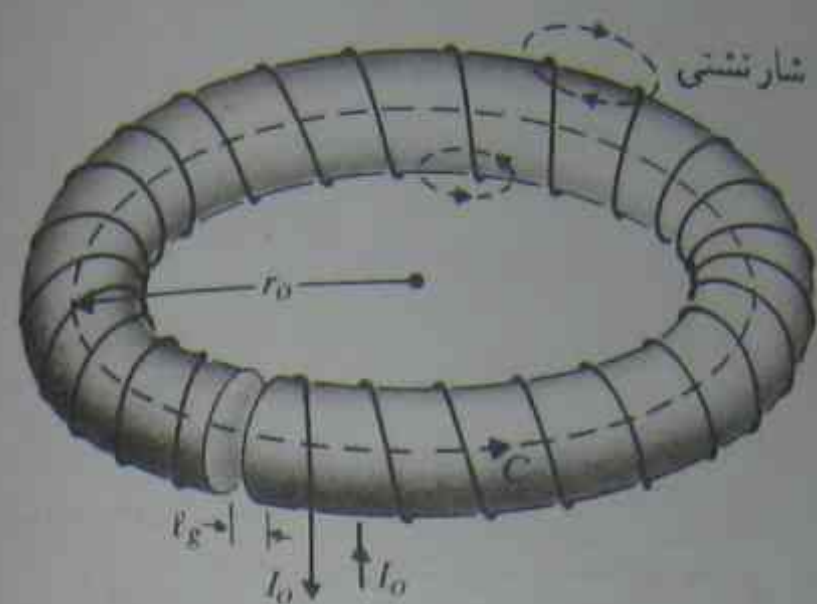
$$B_f = a_\phi \frac{\mu_0 \mu NI_c}{\mu_0 (2\pi r_c - l_g) + \mu l_g} \quad (۶-۸۹)$$

ب) از معادلات (۶-۸۷) و (۶-۸۹) بدست می‌آوریم

$$\mathbf{H}_f = a_\phi \frac{\mu_0 NI_c}{\mu_0 (2\pi r_c - l_g) + \mu l_g} \quad (۶-۹۰)$$

پ) به طور مشابه، از معادلات (۶-۸۸) و (۶-۸۹) داریم

$$\mathbf{H}_g = a_\phi \frac{\mu NI_c}{\mu_0 (2\pi r_c - l_g) + \mu l_g} \quad (۶-۹۱)$$



شکل ۶-۱۳ سیم‌پیچ روی جنبره فرومغناطیسی با شکاف هوایی (مثال ۶-۱۰)

چون $H_g/H_f = \mu/\mu_0$ شدت میدان مغناطیسی در شکاف هوایی بسیار قویتر از هسته فرومغناطیسی است.

اگر شعاع سطح مقطع هسته بسیار کوچکتر از شعاع متوسط جنبره باشد، چگالی شار مغناطیسی B در هسته تقریباً ثابت است، و شار مغناطیسی در مدار چنین است.

$$\Phi \cong BS \quad (۹۲-۶)$$

که در آن S سطح مقطع هسته است. ترکیب معادلات (۶-۸۱) و (۶-۸۹) نتیجه می‌دهد.

$$\Phi = \frac{NI}{(\frac{2\pi r_0 - \ell_g}{\mu S} + \frac{\ell_g}{\mu_0 S})} \quad (۹۳-۶)$$

معادله (۹۳-۶) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی نمود.

$$\Phi = \frac{V_m}{\mathcal{R}_f + \mathcal{R}_g} \quad (۹۴-۶)$$

بهمراه

$$\mathcal{R}_f = \frac{2\pi r_0 - \ell_g}{\mu S} = \frac{\ell_f}{\mu S} \quad (۹۵-۶)$$

که در آن $\ell_f = 2\pi r_0 - \ell_g$ طول هسته فرومغناطیسی است، و

$$\mathcal{R}_g = \frac{\ell_g}{\mu_0 S} \quad (۹۶-۶)$$

هم \mathcal{R}_f هم \mathcal{R}_g دارای شکلی مشابه فرمول معادله (۵-۲۷)، در مورد مقاومت $d-c$ قطعه‌ای مستقیم از یک ماده همگن با سطح مقطع یکنواخت S می‌باشند، و هر دو را رلوکتانس می‌نامند: \mathcal{R}_f مربوط به هسته فرومغناطیسی، و \mathcal{R}_g مربوط به شکاف هوایی. واحد SI رلوکتانس، عکس هانری

(H^{-1}) است. این حقیقت که حتی با وجود مستقیم نبودن هسته، معادلات (۶-۹۵) و (۶-۹۶) به همین شکل هستند، نتیجه این فرض است که B در تمام مقاطع عرضی هسته تقریباً ثابت می‌باشد.

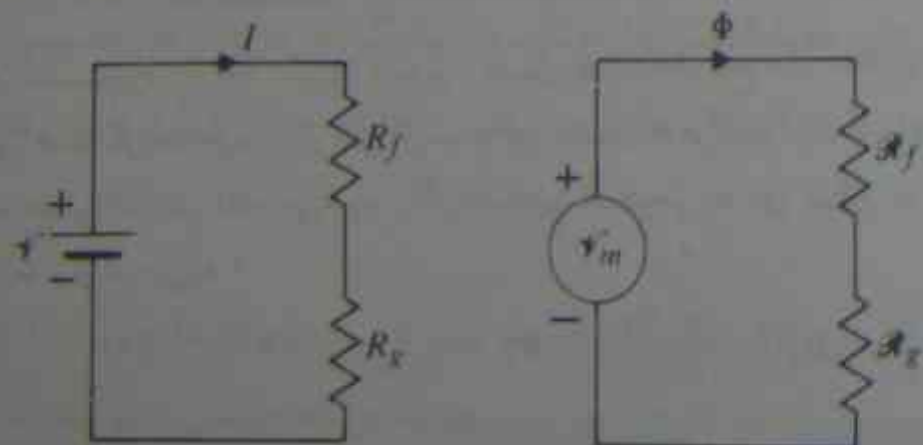
معادله (۶-۹۴) مشابه عبارت جریان I در یک مدار الکتریکی است، که در آن منبع ولتاژ ایده‌آل با V emf، به طور سری با دو مقاومت R_f و R_g متصل شده باشد:

$$I = \frac{V}{R_f + R_g} \quad (۹۷-۶)$$

مدارهای مغناطیسی و الکتریکی مشابه را به ترتیب در شکل‌های ۶-۱۴ (الف) و ۶-۱۴ (ب) نشان داده‌ایم. بر اساس تشابه می‌توان مدارهای مغناطیسی را با همان روشهای بکاررفته در تحلیل مدارهای الکتریکی تجزیه و تحلیل نمود. کمیات مشابه عبارتند از:

مدارهای الکتریکی	مدارهای مغناطیسی
emf, V	mmf, $V_m (= NI)$
جریان الکتریکی, I	شار مغناطیسی, Φ
مقاومت, R	رلوکتانس, \mathcal{R}
رسانندگی, σ	نفوذپذیری, μ

با وجود این تشابه ساده، تحلیل دقیق مدارهای مغناطیسی ذاتاً بسیار دشوار انجام می‌گیرد. نخست، به حساب آوردن شارهای نشتی بسیار مشکل است، شارهایی که از مسیرهای اصلی شار در یک مدار مغناطیسی پراکنده یا نشت می‌گردند. در مورد سیم‌پیچ جنبره‌ای شکل ۶-۱۳، مسیرهای شار نشتی تمام دورهای سیم‌پیچ را در بر می‌گیرد، و مطابق شکل، بخشی از شار از فضای اطراف هسته عبور می‌کند، زیرا نفوذپذیری هوا صفر نیست. (در مورد مدارهای



(ب) مدار الکتریکی

(الف) مدار مغناطیسی

شکل ۶-۱۴ مدار مغناطیسی معادل و مدار الکتریکی مشابه آن. برای سیم‌پیچ جنبره‌ای یا شکاف هوایی

الکتریکی حامل جریان مستقیم، نیاز بسیار اندکی به در نظر گرفتن جریانهای ناشی در خارج مسیره‌های هدایتی وجود دارد. زیرا که رسانندگی هوا در مقایسه با رسانندگی یک هادی خوب عملاً صفر است.

مشکل دوم، اثرات لبه‌ای است که باعث می‌شود خطوط شار مغناطیسی در شکاف هوایی پخش و برآمده شود. (هدف از مشخص کردن «شکاف هوایی کوچک» در مثال ۶-۱۰، به حداقل رساندن اثرات لبه‌ای است.)

مشکل سوم آن است که نفوذپذیری مواد فرومغناطیسی به شدت میدان مغناطیسی وابسته است؛ یعنی B و H رابطه‌ای غیرخطی دارند. (ممکن است آنها حتی در یک جهت نیز نباشند.) بنابراین، مسئله مثال ۶-۱۰ که قبل از معلوم بودن B_c یا H_c مقدار μ را مشخص فرض می‌کند، یک مسئله واقعی نیست.

در یک مسئله عملی، منحنی $B-H$ در مورد مواد فرومغناطیسی، مثل منحنی شکل ۶-۱۷ که بعداً مطرح خواهد شد، باید داده شود. روشن است که نسبت B و H ثابت نبوده و B_f وقتی می‌تواند معلوم باشد که H_f مشخص شده باشد. به این ترتیب مسئله را چگونه باید حل کرد؟ دو شرط باید برقرار باشد. نخست جمع $H_f l_f$ و $H_g l_g$ باید معادل کل NI باشد:

$$H_g l_g + H_f l_f = NI. \quad (۹۸-۶)$$

دوم، اگر شار ناشی را صفر فرض کنیم، کل شار Φ در هسته فرومغناطیسی و شکاف هوایی باید یکسان باشد، یا، $B_f = B_g$:

$$B_f = \mu_0 H_g \quad (۹۹-۶)$$

جایگذاری معادله (۹۹-۶) در معادله (۹۸-۶) معادله ارتباط‌دهنده H_f و B_f در هسته را نتیجه

آ برای بدست آوردن نتیجه عددی دقیق‌تر، معمول است که سطح مؤثر شکاف هوایی را اندکی بزرگتر از سطح مقطع عرضی هسته فرومغناطیسی در نظر گیرند. به این ترتیب که هر کدام از ابعاد خطی مقطع عرضی هسته به اندازه طول شکاف هوایی افزایش داده می‌شوند. اگر بخواهیم تصحیحی به این شکل در معادله (۹۶-۸۶) بعمل آوریم، B_g به صورت زیر در می‌آید:

$$B_g = \frac{a^2 B_f}{(a+l_g)^2} < B_f$$

با این فرض که سطح مقطع عرضی هسته و شکاف یکی هستند. اگر می‌خواستیم هسته را از ورقه‌های روی هم چیده شده مجزا ماده فرومغناطیسی تشکیل دهیم، سطح مؤثر گذران شار در هسته، کمتر از سطح مقطع عرضی هندسی آن و B_c با ضریبی بزرگتر از B_g می‌بود. این ضریب از روی داده‌های مربوط به ورقه‌های روی هم چیده شده مجزا قابل تعیین است.

می‌دهد:

$$B_f + \mu_0 \frac{l_f}{l_g} H_f = \frac{\mu_0}{l_g} NI. \quad (۱۰۰-۶)$$

این معادله یک خط راست در صفحه $B-H$ با شیب منفی $(-\mu_0 l_f / l_g)$ است. محل برخورد این خط و منحنی $B-H$ داده شده، نقطه کار را تعیین می‌کند. وقتی نقطه کار پیدا شد، H_f و B_f و تمام کمیات دیگر بدست خواهند آمد.

تشابه بین معادلات (۹۴-۶) و (۹۷-۶) را می‌توان به نوشتن دو معادله اساسی مدارهای مغناطیسی، متناظر با قوانین ولتاژ و جریان کیرشف در مدارهای الکتریکی، تعمیم داد. مشابه قانون ولتاژ کیرشف در معادله (۵-۴۱)، در مورد هر مسیر بسته در یک مدار مغناطیسی می‌توانیم بنویسیم:

$$\sum_j N_j I_j = \sum_k \mathcal{R}_k \Phi_k \quad (۱۰۱-۶)$$

معادله (۱۰۱-۶) بیان می‌دارد که جمع جبری امپیر دورها در پیرامون هر مسیر بسته یک مدار مغناطیسی، برابر جمع جبری حاصلضرب رلوکتانس‌ها و شارهاست.

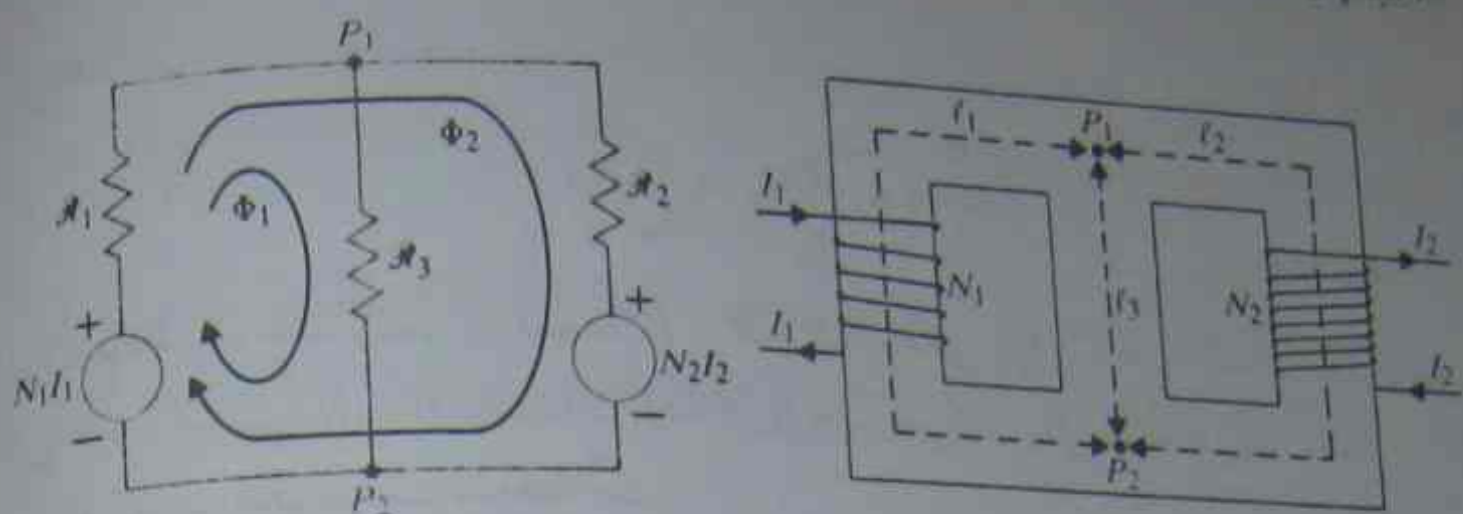
قانون جریان کیرشف در مورد هر گره یک مدار الکتریکی، معادله (۵-۴۷)، نتیجه $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ است. به طور مشابه، اصل موضوعی $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ در معادله (۶-۸۲) به معادله (۶-۹) منتهی می‌گردد. از این رو داریم

$$\sum_j \Phi_j = 0 \quad (۱۰۲-۶)$$

و بیان می‌دارد که جمع جبری شارهای مغناطیسی خارج شونده از یک گره در هر مدار مغناطیسی، صفر است. معادلات (۱۰۱-۶) و (۱۰۲-۶)، به ترتیب اساس تحلیل حلقه و گره را در مدارهای مغناطیسی تشکیل می‌دهند.

مثال ۶-۱۱ مدار مغناطیسی شکل ۶-۱۵ (الف) را در نظر بگیرید. جریانهای دائم I_1 و I_2 به ترتیب از سیم پیچهایی با N_1 و N_2 دور، روی دو بازوی خارجی هسته فرومغناطیسی، می‌گذرند. هسته دارای سطح مقطع عرضی S_c و نفوذپذیری μ است. شار مغناطیسی را در بازوی وسطی تعیین کنید.

حل مدار مغناطیسی معادل به منظور تحلیل حلقه، در شکل ۶-۱۵ (ب) نشان داده شده است. دو



(الف) هسته مغناطیسی با سیم‌پیچهای حامل جریان

(ب) مدار مغناطیسی به منظور تحلیل حلقه

شکل ۶-۱۵ یک مدار مغناطیسی (مثال ۶-۱۱)

منبع $N_1 I_1$ و $N_2 I_2$ با قطب‌های صحیح به ترتیب به صورت سری با رلوکتانس‌های \mathcal{R}_1 و \mathcal{R}_2 مشخص شده‌اند. روشن است که این مدار دو حلقه‌ای است. چون درصدد تعیین شار در بازوی وسطی $P_1 P_2$ هستیم، مناسب است که دو حلقه را چنان انتخاب کنیم که تنها یک شار حلقه (Φ_1) از بازوی وسطی بگذرد. رلوکتانس‌ها بر اساس طول مسیر متوسط محاسبه می‌شوند، که البته به طور تقریبی است. داریم

$$\mathcal{R}_1 = \frac{l_1}{\mu S_c} \quad (۱۰۳-۶) \text{ (الف)}$$

$$\mathcal{R}_2 = \frac{l_2}{\mu S_c} \quad (۱۰۳-۶) \text{ (ب)}$$

$$\mathcal{R}_3 = \frac{l_3}{\mu S_c} \quad (۱۰۳-۶) \text{ (پ)}$$

از معادله (۶-۱۰۱)، دو معادله حلقه عبارتند از:

$$\text{حلقه ۱: } N_1 I_1 = (\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_3) \Phi_1 + \mathcal{R}_1 \Phi_2 \quad (۱۰۴-۶)$$

$$\text{حلقه ۲: } N_1 I_1 - N_2 I_2 = \mathcal{R}_1 \Phi_1 + (\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2) \Phi_2 \quad (۱۰۵-۶)$$

با حل این دو معادله همزمان، بدست می‌آید

$$\Phi_1 = \frac{\mathcal{R}_2 N_1 I_1 - \mathcal{R}_1 N_2 I_2}{\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_1 \mathcal{R}_3 + \mathcal{R}_2 \mathcal{R}_3} \quad (۱۰۶-۶)$$

که جواب مورد نظر است.

در واقع چون شارهای مغناطیسی و بنابراین چگالی‌های شار مغناطیسی در سه بازو متفاوتند، نفوذپذیری‌های متفاوتی باید در محاسبه رلوکتانس‌ها در معادلات (۶-۱۰۳ الف)، (۶-۱۰۳ ب)

و (۶-۱۰۳ ب) بکار روند. اما مقدار نفوذپذیری به نوبه خود به چگالی شار مغناطیسی وابسته است. تنها راه بهبود دقت جواب، به شرط آنکه منحنی $B-H$ ماده داده شده باشد، استفاده از روال تقریبات متوالی است. برای مثال، نخست Φ_1 و Φ_2 (و بنابراین B_1 و B_2) با یک μ مفروض حل شده و رلوکتانس‌ها از روی سه بخش معادله (۶-۱۰۳) محاسبه می‌گردند. با استفاده از B_1 و B_2 و B_3 از روی منحنی $B-H$ ، مقادیر متناظر μ_1 ، μ_2 و μ_3 بدست می‌آیند. این مقادیر، رلوکتانس‌ها را تصحیح می‌کنند. سپس تقریب دومی در مورد B_1 ، B_2 و B_3 با رلوکتانس‌های تصحیح شده بدست می‌آید. از روی چگالی‌های جدید شار، نفوذپذیری‌های جدید و رلوکتانس‌های جدید تعیین می‌گردند. این روال آنقدر تکرار می‌شود تا اینکه تکرارهای بعدی تغییر کمی در مقادیر محاسبه شده ایجاد نماید.

در اینجا متذکر می‌شویم که جریانها در سیم‌پیچهای شکل ۶-۱۵ (الف) مستقل از زمان هستند و مثال ۶-۱۱ صرفاً یک مسئله مدار مغناطیسی $d-c$ است. اگر جریانها با زمان تغییر کنند، باید با اثرات القای الکترومغناطیسی سروکار پیدا کنیم و یک مسئله ترانسفورماتور خواهیم داشت. قوانین اساسی دیگری نیز مطرح هستند که در فصل ۷ مورد بحث قرار خواهند گرفت.

۶-۹ رفتار مواد مغناطیسی

در معادله (۶-۷۹)، بخش ۶-۷، خواص مغناطیسی ماکروسکوپی یک محیط خطی و هم‌سو یکسان را با استفاده از تعریف ضریب حساسیت مغناطیسی χ_m ، یک ضریب تناسب بدون بعد، بین مغناطیس‌شدگی M و شدت میدان مغناطیسی H ، توصیف نمودیم. نفوذپذیری نسبی μ_r ، به صورت ساده $1 + \chi_m$ است. مواد مغناطیسی را می‌توان به طور تقریبی، بر اساس مقادیر μ_r آنها، به سه گروه اصلی طبقه‌بندی نمود. می‌گوییم یک ماده

دیامغناطیسی است اگر $\mu_r \approx 1$ (عدد منفی بسیار کوچکی باشد).

پارامغناطیسی است اگر $\mu_r > 1$ (عدد مثبت بسیار کوچکی باشد).

فرومغناطیسی است اگر $\mu_r \gg 1$ (عدد مثبت بزرگی باشد).

همان گونه که قبلاً نیز متذکر گردید، درک کامل پدیده‌های مغناطیسی میکروسکوپی به اطلاعاتی در مورد مکانیک کوانتوم نیاز دارد. در زیر، توصیفی کیفی از رفتار انواع مختلف مواد مغناطیسی بر اساس مدل کلاسیک اتمی ارائه خواهد شد.

در یک ماده دیامغناطیسی گشتاور مغناطیسی خالص ناشی از حرکات مداری و چرخشی الکترون‌ها در هر اتم خاص در غیاب میدان مغناطیسی اعمال شده خارجی صفر است. به طوری که از معادله (۴-۶) پیش بینی می‌شود. اعمال یک میدان مغناطیسی خارجی به این ماده، نیروی را بر الکترون‌های دارای حرکت مداری وارد نموده، باعث اختلال در سرعت‌های زاویه‌ای می‌گردد. در نتیجه، گشتاور مغناطیسی خالصی به وجود می‌آید. این یک فرآیند مغناطیس‌شدگی القایی است. بر طبق قانون لنز در القای الکترومغناطیسی (بخش ۷-۲)، گشتاور مغناطیسی القا شده، همواره با میدان اعمالی مخالفت می‌کند. از این رو چگالی شار مغناطیسی را کاهش می‌دهد. تأثیر ماکروسکوپی این فرآیند، معادل تأثیر مغناطیس‌شدگی منفی است، که به وسیله ضریب حساسیت مغناطیسی منفی قابل توصیف می‌باشد. این تأثیر معمولاً بسیار ناچیز بوده و χ_m در اغلب مواد دیامغناطیسی شناخته شده (بیسوت، مس، سرب، جیوه، ژرمانیوم، نقره، طلا، الماس) از مرتبه 10^{-5} است.

دیامغناطیس اساساً از حرکت مداری الکترون‌ها در داخل اتم حاصل شده و در تمام مواد وجود دارد. در اکثر مواد این پدیده ضعیف‌تر از آن است که از نظر عملی اهمیتی داشته باشد. تأثیر دیامغناطیسی در مواد پارامغناطیسی و فرومغناطیسی، در سایه این دو پدیده قرار می‌گیرد. مواد دیامغناطیسی هیچ خاصیت مغناطیسی دائمی از خود نشان نمی‌دهند. و وقتی میدان اعمال شده حذف می‌شود، گشتاور مغناطیسی القا شده از بین می‌رود.

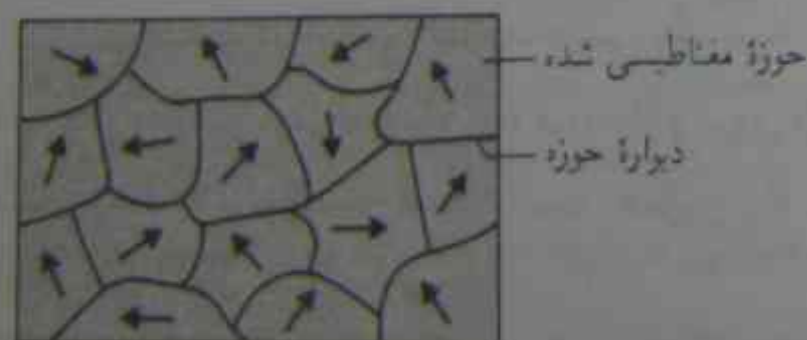
در برخی از مواد، گشتاورهای مغناطیسی ناشی از الکترون‌های دارای حرکت مداری و چرخشی یکدیگر را کاملاً خنثی نمی‌کنند، و آنها و ملکولها دارای گشتاور مغناطیسی متوسط خالصی هستند. یک میدان مغناطیسی اعمال شده خارجی، علاوه بر ایجاد یک تأثیر دیامغناطیسی بسیار ضعیف، سعی می‌کند گشتاورهای مغناطیسی ملکولی را در جهت میدان اعمال شده، هم‌راستا گرداند. از این رو چگالی شار مغناطیسی را افزایش می‌دهد. پس، اثر ماکروسکوپی آن، معادل اثر مغناطیس‌شدگی مثبت است که توسط ضریب حساسیت مغناطیسی مثبت توصیف می‌گردد. هر چند که از فرآیند هم‌راستاسازی، توسط نیروهای ارتعاشات حرارتی تصادفی ممانعت به عمل می‌آید. تأثیرات متقابل مربوطه ناچیز است و افزایش در چگالی شار مغناطیسی کاملاً اندک می‌باشد. موادی با این رفتار را پارامغناطیسی گویند. ضریب حساسیت مغناطیسی مواد پارامغناطیسی عموماً به مقدار مثبت بسیار کوچکی، از مرتبه 10^{-5} برای آلومینیوم، منیزیم، تیتانیوم و تنگستن است.

پارامغناطیس، اساساً از گشتاورهای دو قطبی مغناطیسی الکترون‌های چرخنده حاصل می‌شود. نیروهای هم‌راستاکننده عامل بر دو قطبی‌های ملکولی، توسط میدان اعمالی، به وسیله

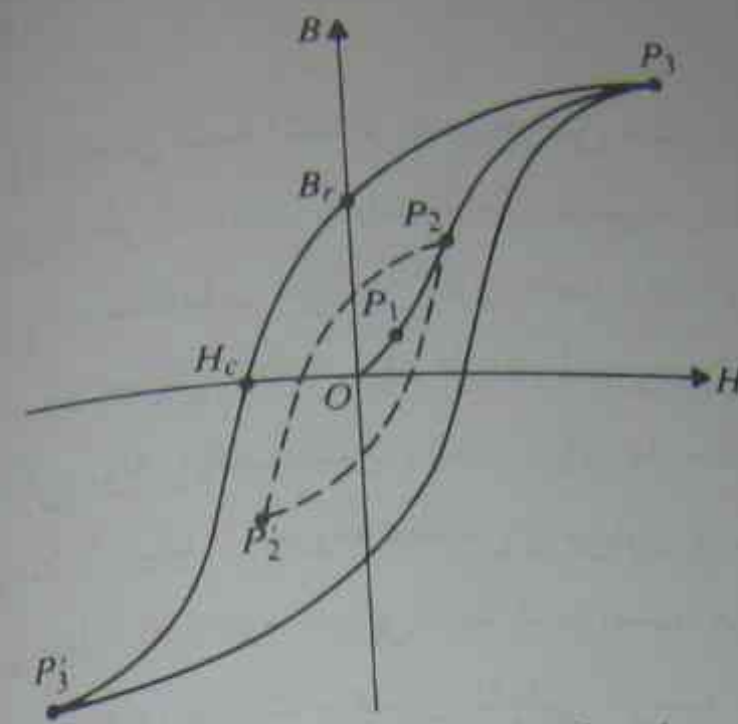
تأثیرات مختل‌کننده آشفتگی‌های حرارتی خنثی می‌گردند. برعکس دیامغناطیس، که اساساً مستقل از درجه حرارت است، اثرات پارامغناطیسی، وابسته به درجه حرارت است و در درجه حرارت‌های پایین که تصادمات حرارتی کمتری وجود دارد، قوی‌تر می‌باشد.

مغناطیس‌شدگی مواد فرومغناطیس می‌تواند از نظر اندازه چندین مرتبه بزرگتر از مغناطیس‌شدگی مواد پارامغناطیس باشد. (برای ملاحظه چند نمونه از مقادیر نفوذپذیری نسبی، ضمیمه ب-۵ را ببینید.) فرومغناطیس را می‌توان بر اساس حوزه‌های مغناطیس شده توضیح داد. بر طبق این مدل، که به طور تجربی تأیید شده است، هر ماده فرومغناطیس (چون کبالت، نیکل، و آهن) از حوزه‌های کوچک متعددی تشکیل می‌شود که ابعاد خطی آنها از چند میکرون تا حدود 1000 mm تغییر می‌کند. این حوزه‌ها، که هر یک دارای 10^{15} یا 10^{16} اتم می‌باشند، حتی در غیاب یک میدان مغناطیسی اعمال شده، به خاطر دارا بودن دو قطبی‌های مغناطیسی هم‌راستا، ناشی از الکترون‌های چرخنده، کاملاً مغناطیسی هستند. نظریه کوانتوم اظهار می‌دارد که نیروهای نزویج‌کننده بر قدرتی بین گشتاورهای دو قطبی مغناطیسی آنها یک حوزه وجود دارد که گشتاورهای دو قطبی را به موازات یکدیگر نگه می‌دارد. بین حوزه‌های مجاور، ناحیه انتقالی به ضخامت حدود 100 اتم به نام دیواره حوزه وجود دارد. در حالت مغناطیس‌شدگی گشتاورهای مغناطیسی حوزه‌های مجاور در یک ماده فرومغناطیسی جهات گوناگونی دارند. این مطلب را در شکل ۶-۱۶ در نمونه چند بلوری نشان داده شده به عنوان مثال ملاحظه می‌کنید. از نظر کلی، طبیعت تصادفی جهت‌های حوزه‌های مختلف باعث هیچ مغناطیس‌شدگی خاصی نخواهد شد.

وقتی میدان مغناطیسی خارجی به یک ماده فرومغناطیس اعمال می‌شود، دیواره‌های حوزه‌هایی که گشتاور آنها با میدان اعمالی هم‌راستا شده است، به صورتی حرکت می‌کنند که حجم آن حوزه‌ها نسبت به سایر نواحی افزایش یابد. در نتیجه، چگالی شار مغناطیسی افزایش می‌یابد. به ازای میدانهای اعمالی ضعیف، مثلاً تا نقطه P_1 در شکل ۶-۱۷، حرکات دیواره حوزه برگشت‌پذیر است. اما وقتی میدان اعمال شده قوی‌تر می‌شود، (بعد از نقطه P_1)، حرکات دیواره



شکل ۶-۱۶ ساختار حوزه‌ای یک نمونه فرومغناطیسی چند بلوری



شکل ۶-۱۷ حلقه‌های هیستریزس در صفحه $B-H$ مربوط به یک ماده فرومغناطیسی

حوزه دیگر برگشت پذیر نبوده، و گردش حوزه‌ای به سمت جهت میدان اعمال شده نیز پیش خواهد آمد. برای مثال، اگر میدان اعمال شده در نقطه P_1 به صفر کاهش یابد، رابطه $B-H$ از منحنی پررنگ $P_1 P_2 O$ بیرونی نخواهد کرد، بلکه در امتداد منحنی خط چین در شکل، از P_1 به P_2 پایین خواهد آمد. این پدیده پس ماند مغناطیسی نسبت به میدان مولد آن را هیستریزس می‌نامند، که از یک واژه یونانی به معنای «پس ماند» استخراج شده است. اگر میدان اعمال شده باز هم قوی‌تر شود (از P_2 به P_3 بگذرد) حرکت دیواره حوزه و گردش حوزه اساساً هم راستا شدن کلی گشتاورهای مغناطیسی میکروسکوپی را با میدان اعمالی باعث می‌شود، و در این مرحله می‌گوییم ماده مغناطیسی به حالت اشباع رسیده است، منحنی $OP_1 P_2 P_3$ را منحنی مغناطیسی شدگی عادی می‌گیرند.

اگر میدان مغناطیسی اعمالی از مقدار خود در P_1 ، به صفر کاهش یابد، چگالی شار مغناطیسی صفر نمی‌شود بلکه مقداری برابر B_r خواهد داشت. این مقدار را چگالی شار مانده یا پس ماند^۲ (برحسب Wb/m^2) می‌نامند و به حداکثر شدت میدان اعمال شده وابسته است. وجود چگالی شار پس ماند در یک ماده فرومغناطیسی، آهنرباهای دائم را ممکن می‌سازد.

برای صفر کردن چگالی شار مغناطیسی یک نمونه، لازم است شدت میدان مغناطیسی H_c در جهت مخالف اعمال شود. این H_c مورد نیاز را نیروی وادارنده^۵ می‌نامند، اما نام مناسب‌تر، شدت میدان وادارنده (برحسب A/m) است. همچون B_r ، H_c نیز به حداکثر مقدار شدت میدان مغناطیسی اعمال شده بستگی دارد.

۱- Hysteresis

۲- Normal magnetization curve

۵- Coercive force

۲- Saturation

۴- Residual or remanent flux density

از شکل ۶-۱۷ پیداست که رابطه $B-H$ در یک ماده فرومغناطیسی غیر خطی است. از این رو اگر مطابق معادله (۶-۸ الف) بنویسیم $B = \mu H$ ، نفوذپذیری μ خود تابعی از اندازه H می‌باشد. نفوذپذیری μ به سابقه مغناطیسی شدگی ماده نیز بستگی دارد، زیرا- حتی به ازای H مشابه- باید محل نقطه کار روی شاخه خاصی از یک حلقه هیستریزس مشخص را بدانیم تا بتوانیم مقدار دقیق μ را تعیین کنیم. در برخی از کاربردها ممکن است جریان متناوب کوچکی به همراه یک جریان مغناطیس‌کننده دائمی بزرگ باشد. شدت میدان مغناطیس‌کننده دائمی محل نقطه کار را تعیین می‌کند و شیب محلی منحنی هیستریزس در نقطه کار، نفوذپذیری نمودی را تعیین می‌کند.

مواد فرومغناطیسی مورد استفاده در مولدها، موتورها و ترانسفورماتورهای الکتریکی باید در ازای میدان اعمالی بسیار کوچک، مغناطیس‌شدگی قابل توجهی داشته باشند؛ حلقه هیستریزس آنها باید باریک و بلند باشد. با تغییر تناوبی شدت میدان مغناطیسی اعمال شده بین $\pm H_{max}$ حلقه هیستریزس یک بار در هر سیکل طی می‌شود. سطح حلقه هیستریزس، متناظر با تلفات انرژی (تلفات هیستریزس) در واحد حجم در سیکل است (مسئله ۶-۲۹). تلفات هیستریزس، انرژی از دست رفته به شکل حرارت در غلبه بر اصطکاک موجود به هنگام حرکت دیواره حوزه‌ها و گردش حوزه‌هاست. مواد فرومغناطیسی که حلقه‌های هیستریزس بلند، باریک و سطح حلقه کوچکی دارند، مواد «نرم» نامیده می‌شوند؛ فرآیند سرد کردن این گونه مواد بعد از گرم کردن باهستگی و بدقت صورت گرفته است، به طوری که نابجائی و ناخالصی آنها بسیار کم باشد تا دیواره حوزه‌ها بتوانند بسادگی حرکت نمایند.

از سوی دیگر، آهنرباهای دائمی خوب باید مقاومت بالائی در مقابل مغناطیس زدائی داشته باشند. این مطلب لازم می‌دارد که آنها را از موادی با شدت میدان وادارنده H_c بزرگ و از این رو با حلقه‌های هیستریزس پهن، بسازند. این مواد را مواد فرومغناطیسی «سخت» می‌نامند. شدت میدان وادارنده مواد فرومغناطیسی سخت (همچون آلیاژهای آلیکوآ)، می‌تواند $10^5 (A/m)$ یا بیشتر باشد، در حالی که در مورد مواد نرم، معمولاً $50 (A/m)$ یا کمتر است.

همان گونه که قبلاً ذکر گردید، فرومغناطیسی نتیجه تأثیرات تزویج قوی بین گشتاورهای دو قطبی مغناطیسی آنها در هر حوزه است. شکل ۶-۱۸ الف ساختار چرخش اتمی یک ماده فرومغناطیسی را به تصویر کشیده است. هنگامی که درجه حرارت ماده فرومغناطیسی به اندازه‌ای بالا برده شود که انرژی حرارتی از انرژی تزویج فراتر رود، حوزه‌های مغناطیسی شده، نامرتب

۱- Incremental permeability

۲- Demagnetization

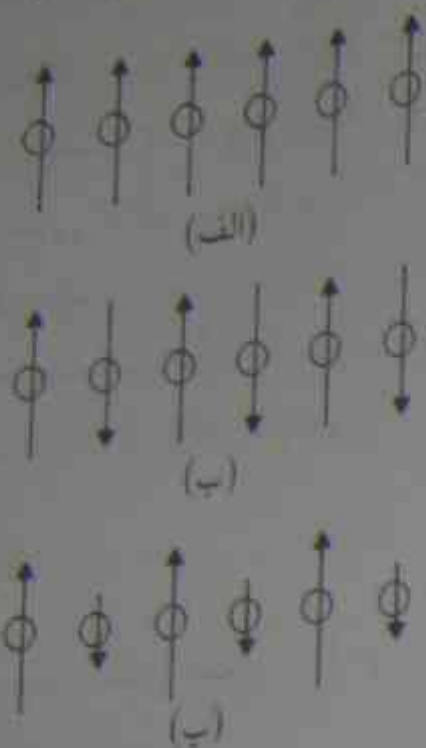
† آلیاژ ساخته شده از آلومینیوم، نیکل، کبالت، آهن و مس است.

می شوند. بالاتر از این دمای بحرانی، که دمای کوری^۱ نامیده می شود، ماده فرومغناطیسی مانند یک جسم پارامغناطیس رفتار می کند. از این رو وقتی یک آهنربای دائمی تا درجه حرارتی بالاتر از دمای کوری آن، حرارت داده می شود، مغناطیس شدگی خود را از دست می دهد. دمای کوری بیشتر مواد فرومغناطیس بین چند صد تا هزار درجه سلسیوس قرار دارد؛ دمای کوری آهن 770°C است. برخی عناصر، همچون کروم و منگنز، که از نظر عدد اتمی در نزدیکی عناصر فرومغناطیسی قرار دارند، و همسایه آهن در جدول تناوبی هستند، نیز دارای نیروهای تزویج قوی بین گشتاورهای دو قطبی مغناطیسی اتمی می باشند؛ اما نیروهای تزویج آنها، مطابق شکل ۶-۱۸ (ب) باعث تولید یک همراستائی موازی و مخالف در چرخش الکترونی می شوند. این چرخش ها، از اتمی به اتم دیگر تغییر جهت می دهند و گشتاور مغناطیسی خالص نتیجه شده صفر است. موادی با این ویژگی را ضد فرومغناطیسی^۲ گویند. ضد فرومغناطیس نیز به درجه حرارت وابسته است. وقتی یک ماده ضد فرومغناطیسی تا بالاتر از دمای کوری خود حرارت داده شود، جهات چرخش بناگاه تصادفی می شوند و ماده پارامغناطیسی می گردد.

طبقه دیگری از مواد مغناطیسی وجود دارد که رفتاری بین فرومغناطیس و ضد فرومغناطیس را از خود نشان می دهد. در این طبقه، تأثیرات مکانیک کوانتم باعث می شود، جهات گشتاورهای مغناطیسی در ساختار نظم یافته چرخش متناوباً تغییر کرده و اندازه ها نامساوی باشند. در نتیجه، مطابق شکل ۶-۱۸ (پ)، به گشتاور مغناطیسی خالص مخالف صفر منجر می شود. این مواد را فری مغناطیسی^۳ گویند. به دلیل حذف نسبی، حداکثر چگالی شار مغناطیسی به دست آمده در مواد فری مغناطیسی اساساً پایین تر از یک نمونه فرومغناطیسی است، و به عنوان نمونه، در حدود 0.7 T می باشد که تقریباً یک دهم مواد فرومغناطیسی است.

فریت ها^۴، زیر گروهی از مواد فری مغناطیسی هستند. یک نوع از فریت ها، به نام اسپینل های مغناطیسی^۵ به صورت ساختار اسپینلی پیچیده ای کریستالی می شوند و فرمول آنها $XO \cdot Fe_2O_3$ است. X، یک یون فلزی دو ظرفیتی^۶ مثل $Cd, Zn, Mg, Mn, Ni, Co, Fe$ و غیره را نشان می دهد. این اجسام، ترکیباتی مانند سرامیک با ضریب هدایت بسیار پایین می باشند (برای مثال، 10^{-2} تا 1 S/m) در مقایسه با 10^7 S/m در مورد آهن). ضریب هدایت پایین، تلفات جریان گردابی^۷ در فرکانس های بالا را محدود می سازد. از این رو فریت ها، استفاده وسیعی در

۶-۱۰ شرایط مرزی میدانهای مغناطیسی ساکن



شکل ۶-۱۸ ساختار شتابیک چرخش اتمی در مواد (الف) فرومغناطیسی، (ب) ضد فرومغناطیسی، و (پ) فری مغناطیسی

کاربردهای فرکانس بالا و مایکروویو^۱ مثل هسته آنتن های FM، ترانسفورماتورهای فرکانس بالا و انتقال دهنده های قاز، دارا هستند. مواد فریتی کاربردهای وسیعی در هسته مغناطیسی کامپیوتر و دستگاههای حافظه دیسک مغناطیسی دارند. فریت های دیگر شامل نارسنگ های اکسید مغناطیسی^۲ به عنوان نمونه، نارسنگ اوتریوم آهن^۳ ($Y_3Fe_5O_{12}$, "YIG") می شوند. نارسنگ ها در اتصالات چند قطبی^۴ مایکروویو به کار می روند.

فریت ها، در حضور یک میدان مغناطیسی، غیرهمه سویکسان هستند. یعنی بردارهای H و B در فریت ها معمولاً جهات های متفاوتی دارند، و تقوذبذیری یک تانسور است. رابطه بین مؤلفه های H و B را می توان به صورت یک ماتریس مشابه رابطه بین مؤلفه های D و E در یک محیط دی الکتریک غیرهمه سویکسان، بر اساس معادله (۲-۱۰۴) یا (۲-۱۰۵) بیان نمود. تحلیل مسائل شامل محیط های غیرهمه سویکسان و با غیرخطی از اهداف این کتاب فراتر می رود.

۶-۱۰ شرایط مرزی میدانهای مغناطیسی ساکن

برای حل مسائل مرتبط با میدانهای مغناطیسی در نواحی دارای محیطهایی با خواص فیزیکی متفاوت، لازم است، شرایطی (شرایط مرزی) را که بردارهای H و B در فصل مشترک محیط های

۱- Microwave
۲- Yttrium-iron-garnet

۳- Magnetic-oxide garnets
۴- Multipoint

۱- Curie temperature
۲- Ferrimagnetic
۳- Magnetic spinels
۴- Eddy-current

۲- Antiferromagnetic
۴- Ferrites
۶- Divalent metallicion

مختلف باید برآورده سازند. مطالعه کنیم. با استفاده از روشهایی مشابه روشهای به کار گرفته شده در بخش ۳-۹ برای به دست آوردن شرایط مرزی میدانهای الکتریسیته ساکن، با اعمال دو معادله اصلی حاکم، معادلات (۸۲-۶) و (۸۳-۶) به ترتیب به یک جعبه کوچک و یک مسیر بسته کوچک که فصل مشترک را در برمی گیرد، شرایط مرزی مغناطیس ساکن را استخراج می نماییم. از طبیعت بدون دیورژانس میدان B در معادله (۸۲-۶)، مستقیماً و به کمک تجربه های قبلی نتیجه می گیریم که مؤلفه عمودی B در عبور از فصل مشترک پیوسته است؛ یعنی

$$B_{1n} = B_{2n} \quad (T) \quad (۱۰۷-۶)$$

در محیط های خطی، $B_1 = \mu_1 H_1$ و $B_2 = \mu_2 H_2$ ، معادله (۱۰۷-۶) به صورت صفحه بعد نوشته می شود

$$\mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n} \quad (۱۰۸-۶)$$

شرط مرزی مؤلفه های مماسی میدان مغناطیسی ساکن از شکل انتگرالی معادله کرل H ، معادله (۷۸-۶)، به دست می آید، که برای راحتی دوباره تکرار می گردد.

$$\oint_C H \cdot dl = I \quad (۱۰۹-۶)$$

اکنون، مسیر بسته $abcd$ در شکل ۱۹-۶ را به عنوان مسیر C انتخاب می کنیم. به کارگیری معادله (۱۰۹-۶) و فرض این که $bc = da = \Delta h$ به سمت صفر میل می نماید، چنین به دست می دهد

$$\oint_{abcd} H \cdot dl = H_{1t} \cdot \Delta w + H_{2t} \cdot (-\Delta w) = J_{sn} \Delta w$$

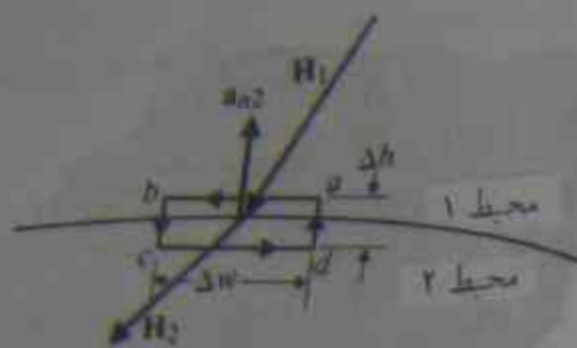
یا

$$H_{1t} - H_{2t} = J_{sn} \quad (A/m) \quad (۱۱۰-۶)$$

که در آن J_{sn} چگالی جریان سطحی روی فصل مشترک، عمود بر مسیر C است. جهت J_{sn} ، جهت شست دست راست است. اگر سایر انگشتان این دست جهت مسیر C را دنبال کنند، در شکل ۱۹-۶ جهت مثبت J_{sn} ، به ازای مسیر انتخاب شده، به سمت خارج از صفحه کاغذ است. رابطه زیر، عبارت جامع تری برای شرط مرزی مؤلفه های مماسی H ، شامل روابط مربوط به اندازه و جهت، هر دو می باشد. (مسئله ۶-۳۰)

$$a_{n2} \times (H_1 - H_2) = J_s \quad (A/m) \quad (۱۱۱-۶)$$

ا فرض می شود معادله (۱۰۹-۶) در ناحیه هایی شامل محیط های ناپوسته معتبر است.



شکل ۱۹-۶ مسیر بسته پیرامون فصل مشترک دو محیط برای تعیین شرط مرزی H_t

که در آن a_{n2} عمود واحد به سمت خارج از محیط ۲، در فصل مشترک می باشد. از این رو مؤلفه مماسی میدان H در عبور از فصل مشترکی که یک جریان سطحی آزاد در آن وجود دارد، ناپوسته است. مقدار ناپوستگی از معادله (۱۱۱-۶) تعیین می شود.

اگر ضرایب هدایت هر دو محیط معین باشد، جریانها توسط چگالی های جریان حجمی تعریف شده و جریانهای سطحی آزاد روی فصل مشترک موجود نخواهند بود. از این رو J_s برابر صفر است. و مؤلفه های مماسی H در عبور از مرز تقریباً تماسی محیط های فیزیکی پیوسته است؛ و تنها وقتی ناپوسته است که فصل مشترک با یک هادی کامل ایده آل یا ابررسانا در نظر گرفته شده باشد.

مثال ۱۲-۶ دو محیط مغناطیسی با نفوذپذیری های μ_1 و μ_2 ، مطابق شکل ۶-۲۰ دارای مرز مشترکی هستند. شدت میدان مغناطیسی در محیط ۱، در نقطه P_1 ، دارای اندازه H_1 بوده و با امتداد عمودی، زاویه α_1 می سازد. اندازه و جهت شدت میدان مغناطیسی در نقطه P_2 ، در محیط ۲ را تعیین کنید.

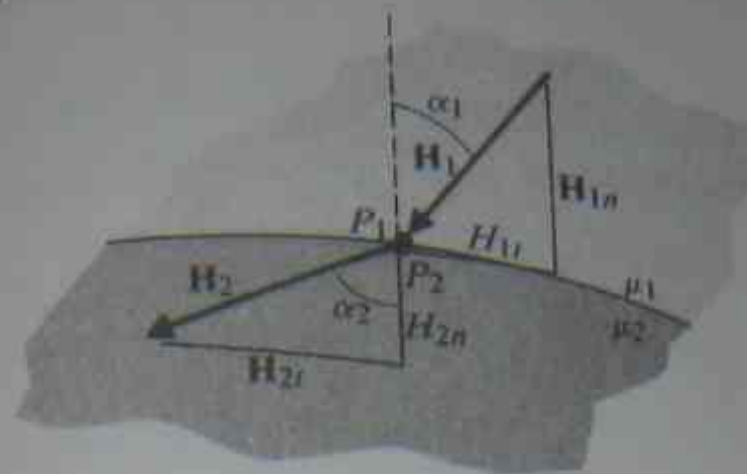
حل کمیت های مجهول مورد نظر عبارتند از H_2 و α_2 . پیوستگی مؤلفه عمودی میدان B ، مطابق معادله (۱۰۸-۶) لازم می دارد:

$$\mu_2 H_2 \cos \alpha_2 = \mu_1 H_1 \cos \alpha_1 \quad (۱۱۲-۶)$$

چون هیچ کدام از محیط ها، هادی کامل نیست، مؤلفه مماسی میدان H پیوسته است. داریم

$$H_2 \sin \alpha_2 = H_1 \sin \alpha_1 \quad (۱۱۳-۶)$$

تقسیم معادله (۱۱۳-۶) بر معادله (۱۱۲-۶)، به دست می دهد



شکل ۶-۲۰ شرایط مرزی میدان مغناطیسی ساکن در یک فصل مشترک (مثال ۶-۱۲)

$$\frac{\tan \alpha_2}{\tan \alpha_1} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \quad (6-114)$$

یا

$$\alpha_2 = \tan^{-1} \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \tan \alpha_1 \right) \quad (6-115)$$

که خاصیت شکست میدان مغناطیسی را توصیف می‌کند. اندازه H_T برابر است با

$$H_T = \sqrt{H_{Tt}^2 + H_{Tn}^2} = \sqrt{(H_T \sin \alpha_2)^2 + (H_T \cos \alpha_2)^2}$$

از معادلات (۶-۱۱۲) و (۶-۱۱۳) بدست می‌آوریم

$$H_T = H_1 \left[\sin^2 \alpha_1 + \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} \cos \alpha_1 \right)^2 \right]^{1/2} \quad (6-116)$$

در اینجا سه نکته را تذکر می‌دهیم. نخست، معادلات (۶-۱۱۴) و (۶-۱۱۶) به ترتیب کاملاً مشابه معادلات (۳-۱۲۹) و (۳-۱۳۰) در مورد میدان های الکتریکی در محیط های دی الکتریک هستند- به جز استفاده از نفوذپذیری (به جای گذردهی) در حالت میدانهای مغناطیسی. دوم، اگر محیط ۱، غیرمغناطیسی (مثل هوا) و محیط ۲، فرومغناطیسی (مثل آهن) باشد، آن گاه $\mu_2 \gg \mu_1$ و از معادله (۶-۱۱۴)، α_2 نزدیک به 90° خواهد بود. این بدان معنی است که به ازای هر زاویه α_1 دلخواه، که به صفر نزدیک نباشد، میدان مغناطیسی در محیط فرومغناطیسی تقریباً به صورت موازی با فصل مشترک قرار می‌گیرد. سوم، اگر محیط ۱ فرومغناطیسی و محیط ۲ هوا باشد ($\mu_1 \gg \mu_2$)، آنگاه α_2 نزدیک به صفر خواهد بود، یعنی اگر میدان مغناطیسی از محیط

۶-۱۰ شرایط مرزی میدانهای مغناطیسی ساکن
فرومغناطیسی آغاز شود، خطوط شار در جهتی تقریباً عمود بر فصل مشترک به هوا وارد خواهند شد.

مثال ۶-۱۳ خطوط شار مغناطیسی را هم در درون و هم در بیرون یک آهنربای میله‌ای استوانه‌ای با مغناطیس شدگی محوری یکنواخت $M = a_z M_0$ ترسیم کنید.

حل در مثال ۶-۸ توجه کردیم که مسئله یک آهنربای میله‌ای استوانه‌ای را می‌توان با مسئله ورقه جریان مغناطیس شدگی با چگالی جریان سطحی $J_{ms} = a_\phi M_0$ جایگزین نمود (چگالی جریان حجمی، معادل صفر است). تعیین B در یک نقطه دلخواه درون و بیرون آهنربا شامل انتگرال‌هائی است که محاسبه آنها دشوار است. از نتایج مثال ۶-۸ در مورد نقطه‌ای روی محور آهنربا برای بدست آوردن طرح کلی خطوط B استفاده می‌کنیم. سطح مقطع یک آهنربای میله‌ای استوانه‌ای با شعاع b و طول L را در شکل ۶-۲۱ ملاحظه می‌کنید. از معادله (۶-۶۵) بدست می‌آید.

$$B_{P_2} = a_z \frac{\mu_0 M_0}{r} \left[\frac{L}{\sqrt{(L/2)^2 + b^2}} \right] \quad (6-117)$$

$$B_{P_1} = a_z \frac{\mu_0 M_0}{r} \left[\frac{L}{\sqrt{L^2 + b^2}} \right] = B_{P_2} \quad (6-118)$$

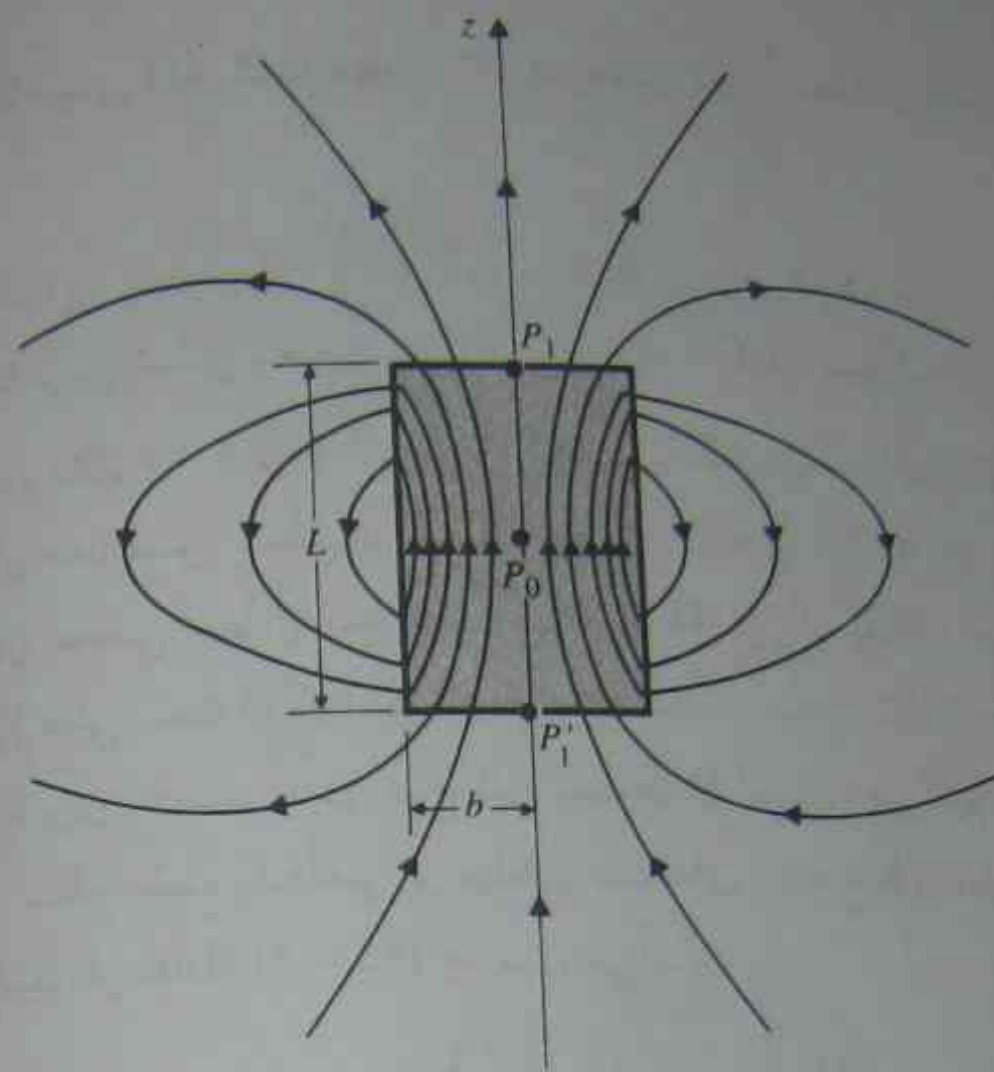
از معادلات (۶-۱۱۷) و (۶-۱۱۸) پیداست که $B_{P_1} = B_{P_2} < B_{P_0}$ ؛ یعنی چگالی شار مغناطیسی در امتداد محور در سطوح انتهائی آهنربا کمتر از مرکز آن است. این مطلب به دلیل آن است که خطوط شار در سطوح انتهائی از یکدیگر پراکنده می‌شوند. می‌دانیم در نقاط خارج از محور، B دارای یک مؤلفه شعاعی است. همچنین می‌دانیم که خطوط B در سطح انتهائی نمی‌شکنند و روی خود بسته می‌شوند.

در سطح جانبی آهنربا، یک جریان سطحی که توسط معادله (۶-۶۴) داده می‌شود، وجود دارد:

$$J_{ms} = a_\phi M_0 \quad (6-119)$$

در اینجا براساس معادله (۶-۱۱۱)، مؤلفه محوری B به اندازه $\mu_0 M_0$ تغییر می‌کند. از معادلات (۶-۱۱۷) و (۶-۱۱۸) می‌بینیم که B_z در درون آهنربا کمتر از $\mu_0 M_0$ است. در نتیجه هنگام عبور از دیواره جانبی هم اندازه و هم جهت B_z تغییر می‌کند. به این ترتیب خطوط شار مغناطیسی شکل ترسیم شده در شکل ۶-۲۱ را خواهند داشت.

در اینجا، باید تذکر دهیم، با اینکه در بیرون آهنربا $H = B/\mu_0$ است، H و B در درون



شکل ۶-۲۱ خطوط شار مغناطیسی حول یک آهنربای میله‌ای استوانه‌ای (مثال ۶-۱۳)

آهنربا به هیچ روی بردارهای متناسب و هم جهت نیستند. از معادله (۶-۷۵)

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \quad (۶-۱۲۰)$$

و با در نظر گرفتن این حقیقت که B/μ_0 در طول محور و در درون آهنربا کمتر از M است، مشاهده می‌کنیم که \mathbf{H} و \mathbf{B} در امتداد محور و در درون آهنربا در جهت‌های مخالف هم هستند. در مورد یک آهنربای طویل باریک، $L \gg b$ ، معادله (۶-۱۱۷) به طور تقریبی $B_p = \mu_0 M$ را به دست می‌دهد. از معادله (۶-۱۲۰) به دست می‌آید $H_p \cong 0$. از این رو، \mathbf{H} در مرکز آهنربای طویل باریک، جایی که \mathbf{B} حداکثر است، تقریباً صفر می‌باشد. طبق فرض بردار مغناطیس‌شدگی \mathbf{M} در بیرون صفر و در تمام نقاط درون آهنربا برداری ثابت است.

در نواحی بدون جریان، چگالی شار مغناطیسی \mathbf{B} غیرگردشی و چنانکه در بخش ۶-۵-۱ نشان داده شد قابل بیان به صورت گرادیان یک پتانسیل مغناطیسی عددی V_m می‌باشد.

$$\mathbf{B} = -\mu \nabla V_m \quad (۶-۱۲۱)$$

با فرض μ ثابت، جایگذاری معادله (۶-۱۲۱) در $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ (معادله ۶-۶)، یک معادله

لاپلاس برحسب V_m را نتیجه می‌دهد:

$$\nabla^2 V_m = 0 \quad (۶-۱۲۲)$$

معادله (۶-۱۲۲) کاملاً مشابه معادله لاپلاس، معادله (۴-۱۰) در مورد پتانسیل الکتریکی عددی V در یک ناحیه بدون بار است. اینکه جواب معادله (۶-۱۲۲) که شرایط مرزی داده شده‌ای را برآورد، یکتاست، همانند مورد معادله (۴-۱۰) ثابت می‌شود. بخش ۴-۳ را ببینید. از این رو، روشهای به‌کاررفته در فصل ۴ (روش تصاویر و روش جداسازی متغیرها) برای حل مسائل شرط مرزی الکتریسته ساکن، می‌تواند برای حل مسائل شرط مرزی متناظر در مغناطیس ساکن تطبیق داده شود. اما، اگرچه، مسائل الکتریسته ساکن با مرزهای هادی قرار گرفته در پتانسیل‌های ثابت، در عمل غالباً رخ می‌دهد. مسائل نظیر آن در مغناطیس ساکن با مرزهای دارای پتانسیل مغناطیسی ثابت اهمیت عملی اندکی دارند. (به یاد می‌آوریم که بار مغناطیسی مجزا وجود ندارد و خطوط شار مغناطیسی همواره مسیرهای بسته‌ای را تشکیل می‌دهند.) غیرخطی بودن رابطه بین \mathbf{H} و \mathbf{B} در مواد فرومغناطیسی نیز حل تحلیلی مسائل شرط مرزی مغناطیس ساکن را پیچیده می‌سازد.

۶-۱۱ اندوکتانس‌ها و سلف‌ها

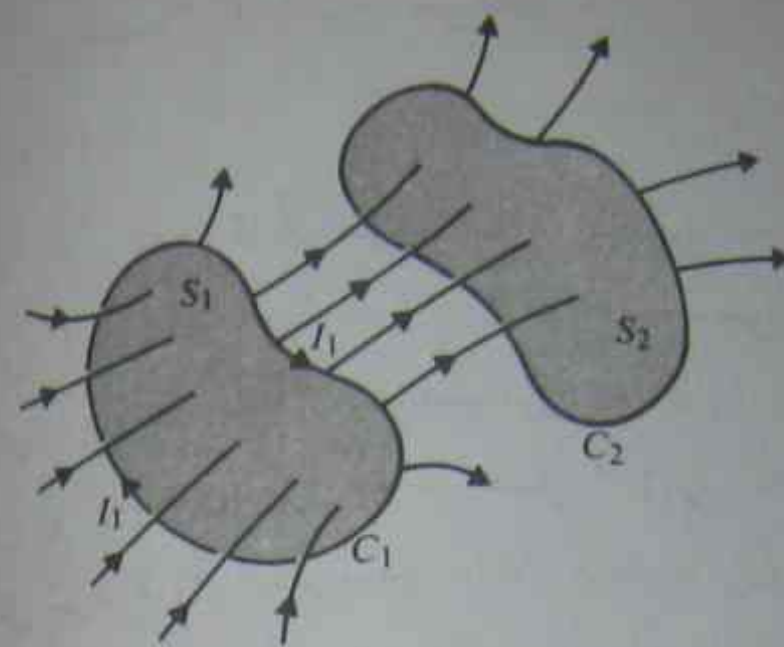
دو حلقه بسته نزدیک به هم C_1 و C_2 را که مطابق شکل ۶-۲۲، به ترتیب سطوح S_1 و S_2 را احاطه کرده‌اند، در نظر بگیرید. اگر جریان I_1 در C_1 برقرار شود، میدان مغناطیسی \mathbf{B}_1 تولید خواهد شد. قدری از شار مغناطیسی ناشی از \mathbf{B}_1 با C_2 پیوند خواهد داشت - یعنی از سطح S_2 محصور شده توسط C_2 عبور خواهد کرد. گیریم این شار متقابل را Φ_{12} بنامیم. داریم:

$$\Phi_{12} = \int_{S_2} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{s}_2 \quad (\text{Wb}) \quad (۶-۱۲۳)$$

از فیزیک می‌دانیم که I_1 متغیر با زمان (و بنابراین Φ_{12} متغیر با زمان) در نتیجه قانون فاراده در القای الکترومغناطیسی باعث تولید نیروی محرکه الکتریکی یا ولتاژ القایی در C_2 می‌گردد. (بحث قانون فاراده را تا فصل بعدی به تعویق می‌اندازیم.) با این همه، حتی اگر I_1 جریان دائمی $d-c$ باشد نیز Φ_{12} وجود خواهد داشت.

از قانون بیوساوار، معادله (۶-۲۲)، می‌بینیم که B_1 مستقیماً با I_1 متناسب است، از این رو Φ_{12} نیز با I_1 متناسب خواهد بود. می‌نویسیم

$$\Phi_{12} = L_{12} I_1 \quad (۶-۱۲۴)$$



شکل ۶-۲۲ دو حلقه با ترویج مغناطیسی

که در آن، ثابت تناسب $L_{۱۲}$ ، اندوکتانس متقابل بین حلقه‌های $C_۱$ ، $C_۲$ نامیده می‌شود و واحد SI آن هنری (H) است. در حالتی که $C_۲$ دارای $N_۲$ دور باشد، پیوند شار $\Lambda_{۱۲}$ ناشی از $\Phi_{۱۲}$ برابر است با

$$\Lambda_{۱۲} = N_۲ \Phi_{۱۲} \quad (\text{Wb}) \quad (۱۲۵-۶)$$

و معادله (۱۲۴-۶) به صورت زیر تعمیم می‌یابد:

$$\Lambda_{۱۲} = L_{۱۲} I_۱ \quad (\text{Wb}) \quad (۱۲۶-۶)$$

یا

$$L_{۱۲} = \frac{\Lambda_{۱۲}}{I_۱} \quad (\text{H}) \quad (۱۲۷-۶)$$

از این رو، اندوکتانس متقابل بین دو مدار، پیوند شار مغناطیسی یک مدار در واحد جریان مدار دیگر است. در معادله (۱۲۴-۶)، فرض می‌شود که نفوذپذیری محیط با $I_۱$ تغییر نمی‌کند. به عبارت دیگر، معادله (۱۲۴-۶) و در نتیجه معادله (۱۲۷-۶) تنها در محیط‌های خطی صادق است. تعریف کلی‌تر $L_{۱۲}$ عبارت است از

$$L_{۱۲} = \frac{d\Lambda_{۱۲}}{dI_۱} \quad (\text{H}) \quad (۱۲۸-۶)$$

بخشی از شار مغناطیسی تولیدی توسط $I_۱$ تنها با خود $C_۱$ پیوند دارد، و با $C_۲$ پیوندی ندارد. کل

پیوند شار با $C_۱$ ناشی از $I_۱$ برابر است با

$$\Lambda_{۱۱} = N_۱ \Phi_{۱۱} > N_۱ \Phi_{۱۲} \quad (۱۲۹-۶)$$

اندوکتانس خودی حلقه $C_۱$ ، به صورت پیوند شار مغناطیسی در واحد جریان خود حلقه تعریف می‌شود؛ یعنی در یک محیط خطی،

$$L_{۱۱} = \frac{\Lambda_{۱۱}}{I_۱} \quad (\text{H}) \quad (۱۳۰-۶)$$

به طور کلی،

$$L_{۱۱} = \frac{d\Lambda_{۱۱}}{dI_۱} \quad (\text{H}) \quad (۱۳۱-۶)$$

اندوکتانس خودی یک حلقه یا مدار، به شکل هندسی و ترتیب فیزیکی هادی تشکیل دهنده آن حلقه یا مدار، و نیز به نفوذپذیری محیط بستگی دارد. در یک محیط خطی، اندوکتانس خودی به جریان حلقه مدار وابسته نیست. در واقع، این اندوکتانس صرفنظر از اینکه حلقه مدار بسته یا باز است، یا اینکه در نزدیکی حلقه یا مدار دیگری قرار دارد یا نه، موجود خواهد بود.

یک هادی که به شکل مناسبی (مثل یک هادی که به شکل سیم پیچ، پیچیده شده باشد) برای فراهم آوردن مقدار معینی اندوکتانس خودی ترتیب یافته باشد را، سلف می‌نامند. درست مثل یک خازن که می‌تواند انرژی الکتریکی را ذخیره نماید، سلف می‌تواند انرژی مغناطیسی را در خود حفظ کند و این مسئله را در بخش ۶-۱۲ خواهیم دید. وقتی تنها با یک حلقه یا سیم پیچ سروکار داریم، نیازی به نگهداری زیرنویس‌های معادله (۱۳۰-۶) یا معادله (۱۳۱-۶) نیست، و اندوکتانس بدون صفت به معنای اندوکتانس خودی است. روال تعیین اندوکتانس خودی یک سلف به شرح زیر است:

۱. دستگاه مختصات مناسب هندسه مسئله داده شده را انتخاب کنید.
۲. جریان I را در سیم هادی فرض کنید.
۳. اگر تقارن وجود دارد، با استفاده از قانون مداری آمپر، معادله (۱۰-۶) و در غیر این صورت از قانون بیوساوار، معادله (۳۲-۶) B را از روی I بیابید.
۴. پیوند شار با هر یک از دورها، یا Φ را با انتگرال‌گیری از B پیدا کنید:

$$\Phi = \int_S B \cdot ds$$

که در آن S ، سطحی است که روی آن B وجود داشته و با جریان مفروض پیوند دارد.

۵. با ضرب Φ در تعداد دورها، پیوند شار، Λ را بیابید.

۶. با محاسبه نسبت $L = \Lambda/I$ ، L را پیدا کنید.

برای تعیین اندوکتانس متقابل $L_{۱۲}$ بین دو مدار تصحیح اندکی در این دستورالعمل نیاز خواهد بود.

پس از انتخاب دستگاه مختصات مناسب به صورت زیر عمل کنید: I_1 را فرض کنید B_1 را پیدا کنید - با انتگرال گیری روی سطح S_1 ، $\Phi_{۱۲}$ را بیابید - پیوند شار $\Lambda_{۱۲} = N_2 \Phi_{۱۲}$ را بیابید - $L_{۱۲} = \Lambda_{۱۲}/I_1$ را پیدا کنید.

مثال ۱۴-۶ فرض کنید N دور سیم به طور فشرده روی یک قاب چنبره‌ای با مقطع عرضی مستطیلی و ابعاد نشان داده شده در شکل ۶-۲۳، پیچیده شده باشد. سپس فرض کنید نفوذپذیری محیط μ است و اندوکتانس خودی سیم پیچ چنبره‌ای را پیدا کنید.

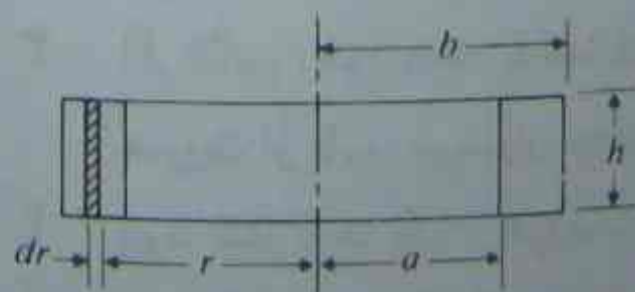
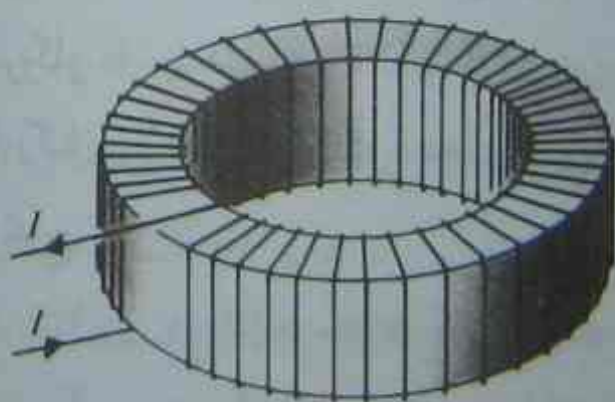
حل روشن است که دستگاه مختصات استوانه‌ای در مورد این مسئله مناسب است، زیرا چنبره حول محور خود متقارن است. با فرض جریان I در سیم هادی، و به کارگیری معادله (۶-۱۰) در مسیری دایره‌ای به شعاع r ($a < r < b$) درمی‌یابیم:

$B = a_\phi B_\phi$

$d\ell = a_\phi r d\phi$

$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\ell = \int_0^{2\pi} B_\phi r d\phi = 2\pi r B_\phi$

این نتایج به دست آمده‌اند، چون B_ϕ و r هر دو در روی مسیر دایره‌ای C ثابت هستند.



شکل ۶-۲۳ یک سیم پیچ چنبره‌ای که به طور فشرده پیچیده شده است (مثال ۶-۱۴)

از آنجایی که مسیر، جریان کل NI را احاطه نموده است، داریم:

$$2\pi r B_\phi = \mu_0 NI$$

و

$$B_\phi = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$

سپس درمی‌یابیم،

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \left(a_\phi \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \right) \cdot (a_\phi h dr) = \frac{\mu_0 NI h}{2\pi} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 NI h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

پیوند شار Λ برابر است با $N\Phi$ یا

$$\Lambda = \frac{\mu_0 N^2 I h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

سرانجام، بدست می‌آوریم

$$L = \frac{\Lambda}{I} = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \quad (H) \quad (۶-۱۳۲)$$

توجه می‌کنیم که اندوکتانس خودی تابعی از I نیست (اگر نفوذپذیری محیط ثابت باشد). این شرط که سیم پیچ به طور فشرده روی چنبره پیچیده شده باشد، برای این است که شار پیوندی در بیرون هر دور سیم به حداقل کاهش یابد.

مثال ۶-۱۵ اندوکتانس در واحد طول یک سلونوئید بسیار طولی، با هسته هوایی و دارای n دور در واحد طول را پیدا کنید.

حل چگالی شار مغناطیسی داخل سلونوئید بینهایت طولی در مثال ۶-۳ به دست آمده است. از معادله (۶-۱۴) و به ازای جریان I ، داریم

$$B = \mu_0 n I$$

که در داخل سلونوئید ثابت است. از این رو،

$$\Phi = BS = \mu_0 n S I \quad (۶-۱۳۳)$$

که در آن S ، سطح مقطع عرضی سلونوئید است. پیوند شار در واحد طول برابر است با

$$\Lambda' = n\Phi = \mu_0 n^2 S I \quad (۶-۱۳۴)$$

بنابراین، اندوکتانس در واحد طول،

$$L' = \mu_0 n^2 S \quad (H/m) \quad (۶-۱۳۵)$$

خواهد بود. معادله (۶-۱۳۵)، فرمولی تقریبی، براساس این فرض است که طول سلونوئید بسیار بزرگتر از ابعاد خطی مقطع عرضی آن است. استخراج دقیق تر چگالی شار مغناطیسی و پیوند شار در واحد طول، در نزدیکی دو انتهای یک سلونوئید با طول محدود نشان می دهد که این مقادیر کمتر از مقادیر داده شده به ترتیب توسط معادلات (۶-۱۴) و (۶-۱۳۴) می باشند. از این رو اندوکتانس کل یک سلونوئید محدود قدری کمتر از مقدار L' داده شده در معادله (۶-۱۳۵) ضربدر طول، خواهد بود.

آنچه در ادامه مطرح می گردد، ملاحظه پراهمیتی در مورد نتایج دو مثال قبل است: اندوکتانس خودی سلف پیچی شده، با مربع تعداد دور آن متناسب است.

مثال ۶-۱۶ یک خط انتقال هم محور هوائی دارای هادی داخلی توپری به شعاع a و هادی بیرونی بسیار نازکی با شعاع داخلی b است. اندوکتانس در واحد طول خط را تعیین کنید.

حل به شکل ۶-۲۴ مراجعه کنید. فرض کنید جریان I از هادی داخلی می گذرد و از طریق هادی بیرونی و در جهت مخالف باز می گردد. به دلیل تقارن استوانه ای، B تنها دارای مؤلفه ϕ (متفاوت با شار) است و در دو ناحیه دارای عبارات متفاوتی می باشد: (الف) در درون هادی داخلی، و (ب) بین هادیهای داخلی و بیرونی. همچنین فرض کنید که جریان I به طور یکنواخت در سطح مقطع هادی داخلی توزیع شده است.

الف) در درون هادی داخلی

$$0 \leq r \leq a$$

از معادله (۶-۱۱)،

$$B_{\phi} = a_{\phi} B_{\phi 1} = a_{\phi} \frac{\mu_0 r I}{2\pi a^2} \quad (6-136)$$

ب) بین هادیهای داخلی و بیرونی

$$a \leq r \leq b$$

از معادله (۶-۱۲)،

$$B_{\phi} = a_{\phi} B_{\phi 2} = a_{\phi} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (6-137)$$

اکنون یک حلقه دایره ای در هادی داخلی بین شعاعهای r و $r + dr$ در نظر بگیرید. جریان در واحد طول این حلقه دایره ای با شار، پیوندی دارد که می تواند با انتگرال گیری از معادلات (۶-۱۳۶) و (۶-۱۳۷) به دست آید. داریم:

$$d\Phi' = \int_r^a B_{\phi 1} dr + \int_a^b B_{\phi 2} dr$$



شکل ۶-۲۴ دو نما از یک خط انتقال هم محور (مثال ۶-۱۶)

$$\begin{aligned} \Lambda' &= \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} \int_r^a r dr + \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_a^b \frac{dr}{r} \quad (6-138) \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2} (a^2 - r^2) + \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \end{aligned}$$

اما جریان در حلقه دایره ای تنها کسری $(\pi r dr / \pi a^2 = r dr / a^2)$ از کل جریان I است از این رو پیوند شار در مورد این حلقه دایره ای برابر است با

$$d\Lambda' = \frac{r dr}{a^2} d\Phi' \quad (6-139)$$

و کل پیوند شار در واحد طول برابر است با،

$$\begin{aligned} \Lambda' &= \int_{r=0}^{r=a} d\Lambda' \\ &= \frac{\mu_0 I}{\pi a^2} \left[\frac{1}{2} (a^2 - r^2) r + \left(\ln \frac{b}{a} \right) \int_0^a r dr \right] \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \ln \frac{b}{a} \right) \end{aligned}$$

بنابراین اندوکتانس خط انتقال هم محور در واحد طول برابر است با:

$$L' = \frac{\Lambda'}{I} = \frac{\mu_0}{4\pi} + \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \quad (\text{H/m}) \quad (6-140)$$

جمله اول، $\mu_0 / 4\pi$ ، از پیوند شار داخل هادی توپری داخلی نتیجه می شود و به اندوکتانس

داخلی در واحد طول هادی داخلی معروف است. جمله دوم، از پیوند شار موجود بین هادیهای داخلی و بیرونی نتیجه می شود؛ این جمله اندوکتانس خارجی در واحد طول خط هم محور نامیده می شود.

† فرض می شود که جریان به طور یکنواخت در هادی داخلی پخش شده باشد. این فرض در مدارهای $a \ll b$ فرکانس بالا صادق نمی باشد.

در کاربردهای فرکانس بالا، (به دلیل اثر پوستی^۱ که در فصل ۸ ملاحظه خواهد شد)، جریان در یک هادی خوب تمایل دارد که به سطح هادی انتقال یابد و باعث توزیع غیریکنواخت جریان در هادی درونی و در نتیجه تغییر مقدار اندوکتانس های داخلی شود. در حالت حدی، ممکن است جریان اساساً در «پوسته» هادی درونی به شکل یک جریان سطحی متمرکز شود و اندوکتانس خودی داخلی به صفر کاهش یابد.

مثال ۱۷-۶ اندوکتانس های داخلی و خارجی یک خط انتقال شامل دو سیم هادی موازی طویل به شعاع a را که جریان هایی در جهت مخالف هم را حمل می کنند، در واحد طول محاسبه کنید. محور سیم ها در فاصله d از یکدیگر قرار دارند و d بسیار بزرگتر از a است.

حل از معادله (۶-۱۴۰)، اندوکتانس خودی داخلی در واحد طول هر سیم برابر $\mu_0/8\pi$ است. بنابراین برای دو سیم داریم

$$L'_i = 2 \times \frac{\mu_0}{8\pi} = \frac{\mu_0}{4\pi} \quad (\text{H/m}) \quad (6-141)$$

برای یافتن اندوکتانس خودی خارجی در واحد طول، نخست شار مغناطیسی دارای پیوند با واحد طول خط انتقال را به ازای یک جریان فرضی I در سیم ها محاسبه می کنیم. در صفحه xz ، جایی که مطابق شکل ۶-۲۵، دو سیم قرار دارند، بردارهای B ، اثرکننده ناشی از جریانهای مساوی و مختلف علامه در سیم ها فقط دارای مؤلفه y هستند:

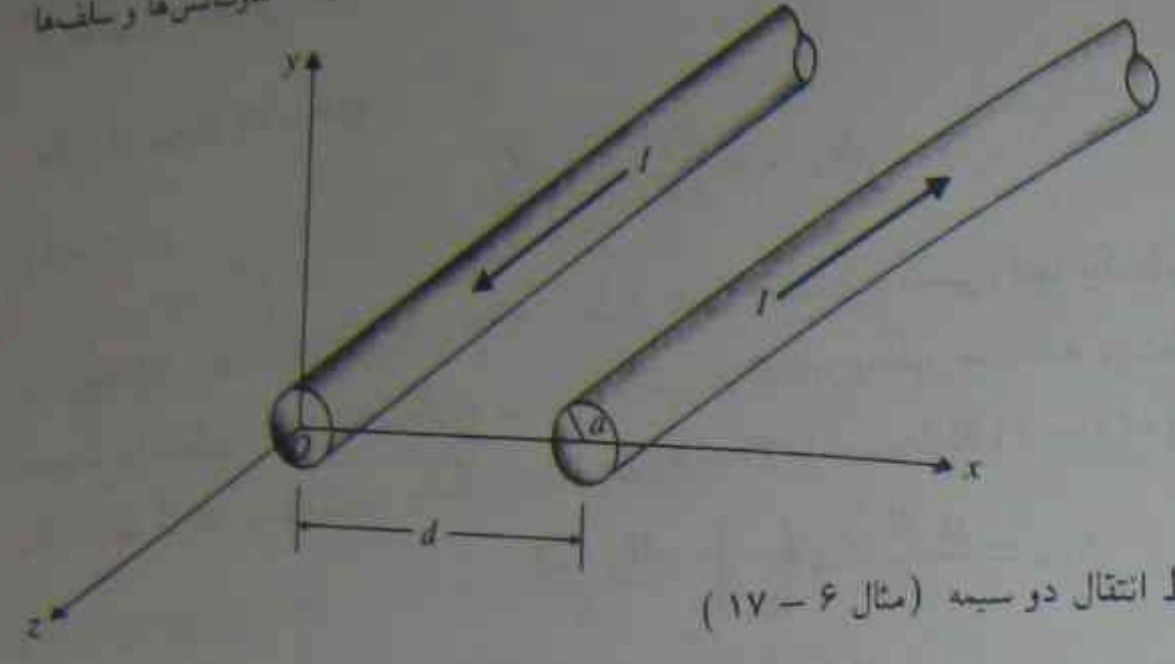
$$B_{y1} = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \quad (6-142)$$

$$B_{y2} = \frac{\mu_0 I}{2\pi(d-x)} \quad (6-143)$$

در این صورت پیوند شار در واحد طول برابر است با:

$$\begin{aligned} \Phi' &= \int_a^{d-a} (B_{y1} + B_{y2}) dx \\ &= \int_a^{d-a} \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right] dx \\ &= \frac{\mu_0 I}{\pi} \ln \left(\frac{d-a}{a} \right) \cong \frac{\mu_0 I}{\pi} \ln \frac{d}{a} \quad (\text{Wb/m}) \end{aligned}$$

^۱ Skin effect



شکل ۶-۲۵ خط انتقال دو سیمه (مثال ۶-۱۷)

بنابراین

$$L'_e = \frac{\Phi'}{I} = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{d}{a} \quad (\text{H/m}) \quad (6-144)$$

و اندوکتانس خودی کل در واحد طول خط دو سیمه برابر است با

$$L' = L'_i + L'_e = \frac{\mu_0}{\pi} \left(\frac{1}{4} + \ln \frac{d}{a} \right) \quad (\text{H/m}) \quad (6-145)$$

قبل از این که مثالهایی را مطرح سازیم که نشان دهند چگونه اندوکتانس متقابل بین دو مدار را تعیین نماییم، پرسش زیر را در مورد شکل ۶-۲۲ و معادله (۶-۱۲۷) عنوان می کنیم: آیا پیوند شار با حلقه C_2 ناشی از جریان واحد در حلقه C_1 برابر پیوند شار با C_1 ناشی از جریان واحد در C_2 است؟ یعنی آیا درست است که

$$L_{12} = L_{21} ? \quad (6-146)$$

ممکن است به طور مبهم و حسی انتظار داشته باشیم که «به دلیل هم پاسخی» جواب مثبت باشد. اما چگونه آن را اثبات کنیم؟ می توان به صورت زیر عمل نمود. با ترکیب معادلات (۶-۱۲۳)، (۶-۱۲۵) و (۶-۱۲۷)، به دست می آید

$$L_{12} = \frac{N_2}{I_1} \int_{S_2} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{s}_2 \quad (6-147)$$

اما از نظر معادله (۶-۱۵)، \mathbf{B}_1 می تواند به صورت کرول پتانسیل مغناطیسی برداری \mathbf{A}_1 نوشته شود، $\mathbf{B}_1 = \nabla \times \mathbf{A}_1$ داریم

$$\begin{aligned} L_{12} &= \frac{N_2}{I_1} \int_{S_2} (\nabla \times \mathbf{A}_1) \cdot d\mathbf{s}_2 \\ &= \frac{N_2}{I_1} \oint_{C_2} \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{l}_2 \end{aligned} \quad (6-148)$$

حال، از معادله (۶-۲۷)

$$A_1 = \frac{\mu_0 N_1 I_1}{4\pi} \oint_{C_1} \frac{dl_1}{R} \quad (۶-۱۴۹)$$

در معادلات (۶-۱۴۸) و (۶-۱۴۹)، انتگرال های وابسته به مسیر، تنها یک بار به ترتیب روی محیط حلقه های C_1 و C_2 محاسبه می شوند - تأثیر تعداد دور به طور جداگانه توسط ضرایب N_1 و N_2 در نظر گرفته شده است. جایگذاری معادله (۶-۱۴۹) در معادله (۶-۱۴۸) نتیجه می دهد

$$L_{12} = \frac{\mu_0 N_1 N_2}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{dl_1 \cdot dl_2}{R} \quad (۶-۱۵۰ الف)$$

که در آن R ، فاصله بین طولهای دیفرانسیلی dl_1 و dl_2 است. معمول است که معادله (۶-۱۵۰ الف) را به صورت زیر بنویسند

$$L_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{dl_1 \cdot dl_2}{R} \quad (H) \quad (۶-۱۵۰ ب)$$

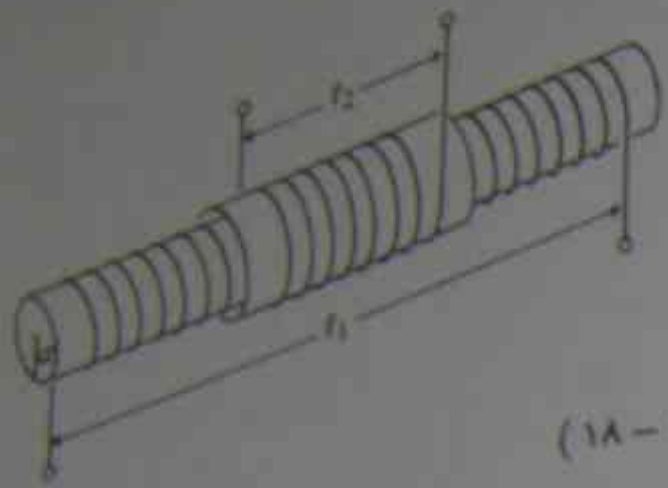
که در آن N_1 و N_2 در انتگرال های وابسته به مسیر مدارهای C_1 و C_2 ، از یک انتها به انتهای دیگر جذب شده است. معادله (۶-۱۵۰ ب)، فرمول نویسنی برای اندوکتانس متقابل است. این رابطه، فرمول کلی است که محاسبه یک انتگرال خطی دوگانه را لازم می دارد. در مورد هر مسئله مفروض اول همواره شرایط تقارنی را جستجو می کنیم که ممکن است تعیین پیوند شار و اندوکتانس متقابل را بدون توسل مستقیم به معادله (۶-۱۵۰ ب) تسهیل نماید.

از معادله (۶-۱۵۰ ب) پیداست که اندوکتانس متقابل، یک ویژگی شکل هندسی و ترتیب فیزیکی مدارهای تزویج شده، است. در یک محیط خطی، اندوکتانس متقابل با نفوذپذیری محیط متناسب بوده و مستقل از جریانهای مدارها است. واضح است که جابجائی زیرنویس های ۱ و ۲ مقدار انتگرال دوگانه را تغییر نمی دهد؛ از این رو جواب مثبت به سؤال مطرحه در معادله (۶-۱۴۶)، نتیجه می شود. این یک نتیجه مهم است زیرا ما را مجاز می دارد که ساده ترین راه (یافتن L_{12} یا L_{21}) را برای تعیین اندوکتانس متقابل به کار ببریم.^۱

مثال ۶-۱۸ دو سیم پیچ با دورهای N_1 و N_2 به طور هم محور روی هسته استوانه ای مستقیم به شعاع a و نفوذپذیری μ پیچیده شده اند. طول دو سیم پیچ به ترتیب l_1 و l_2 است. اندوکتانس متقابل بین سیم پیچها را پیدا کنید.

۱- Neumann formula

^۱ در کتابهای مربوط به نظریه مدار، معمولاً نماد M برای نمایش اندوکتانس متقابل به کار می رود.



شکل ۶-۲۶ یک سلونوئید با دو سیم پیچ (مثال ۶-۱۸)

حل شکل ۶-۲۶ این چنین سلونوئیدی را با دو سیم پیچ هم محور نشان می دهد. فرض کنید جریان I_1 در سیم پیچ داخلی وجود دارد. از معادله (۶-۱۳۳) درمی یابیم که شار Φ_{12} در هسته سلونوئید که با سیم پیچ بیرونی در پیوند است برابر می شود با:

$$\Phi_{12} = \mu \left(\frac{N_1}{l_1} \right) (\pi a^2) I_1$$

چون سیم پیچ بیرونی دارای N_2 دور است، داریم،

$$\Lambda_{12} = N_2 \Phi_{12} = \frac{\mu}{l_1} N_1 N_2 \pi a^2 I_1$$

از این رو، اندوکتانس متقابل برابر است با

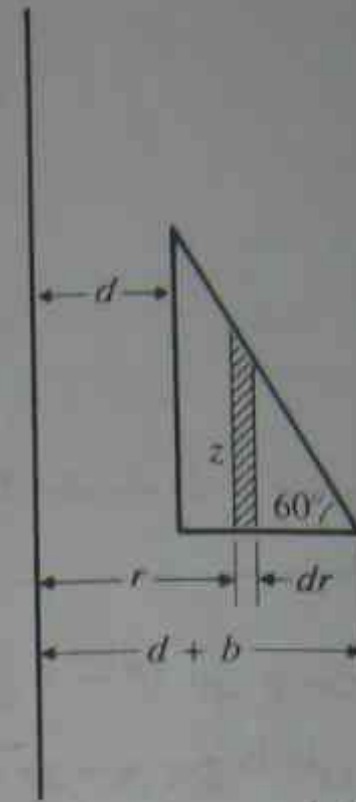
$$L_{12} = \frac{\Lambda_{12}}{I_1} = \frac{\mu}{l_1} N_1 N_2 \pi a^2 \quad (H) \quad (۶-۱۵۱)$$

از شار نشستی صرف نظر شده است.

مثال ۶-۱۹ اندوکتانس متقابل بین یک حلقه هادی مثلثی و یک سیم مستقیم بسیار طویل در شکل ۶-۲۱ را تعیین کنید.

حل گیریم حلقه مثلثی را به عنوان مدار ۱ و سیم طویل را به عنوان مدار ۲ مشخص کنیم. اگر جریان I_1 را در حلقه مثلثی فرض کنیم، یافتن چگالی شار مغناطیسی B_1 در تمام نقاط دشوار است. در نتیجه، تعیین اندوکتانس متقابل L_{12} از روی Λ_{12}/I_1 در معادله (۶-۱۲۷) مشکل می باشد. اما می توانیم قانون مداری آمپر را به کار برده و به سادگی عبارت مربوط به B_2 را که توسط جریان I_2 در سیم مستقیم طویل تولید می شود، بنویسیم

$$B_2 = \mu_0 \frac{I_2}{2\pi r} \quad (۶-۱۵۲)$$



شکل ۶-۲۷ یک حلقه مثلثی هادی و یک سیم مستقیم طویل (مثال ۶-۱۹)

پیوند شار $\Lambda_{r1} = \Phi_{r1}$ برابر است با

$$\Lambda_{r1} = \int_{S_1} \mathbf{B}_r \cdot d\mathbf{s}_1 \quad (153-6)$$

که در آن

$$d\mathbf{s}_1 = \mathbf{a}_\phi z dr \quad (154-6)$$

رابطه بین z و r توسط معادله وتر مثلث داده می‌شود:

$$z = -[r - (d+b)] \tan 60^\circ = -\sqrt{3}[r - (d+b)] \quad (155-6)$$

با جایگذاری معادلات (۱۵۲-۶)، (۱۵۴-۶) و (۱۵۵-۶) در معادله (۱۵۳-۶)، داریم

$$\begin{aligned} \Lambda_{r1} &= -\frac{\sqrt{3}\mu_0 I_r}{2\pi} \int_d^{d+b} \frac{1}{r} [r - (d+b)] dr \\ &= \frac{\sqrt{3}\mu_0 I_r}{2\pi} \left[(d+b) \ln \left(1 + \frac{b}{d} \right) - b \right] \end{aligned}$$

بنابراین، اندوکتانس متقابل برابر می‌شود با

$$L_{r1} = \frac{\Lambda_{r1}}{I_r} = \frac{\sqrt{3}\mu_0}{2\pi} \left[(d+b) \ln \left(1 + \frac{b}{d} \right) - b \right] \quad (H) \quad (156-6)$$

۶-۱۲ انرژی مغناطیسی

۶-۱۲ انرژی مغناطیسی

تاکنون اندوکتانس‌های خودی و متقابل را در حالت استاتیکی بررسی نموده‌ایم. از آنجائی که اندوکتانس‌ها به شکل هندسی و ترتیب فیزیکی هادی‌های تشکیل دهنده مدار بستگی دارند و در یک محیط خطی مستقل از جریان می‌باشند، در تعریف اندوکتانس‌ها با جریانهای غیردائم سروکار نداشتیم. اما می‌دانیم که سلفهای بدون مقاومت در مقابل جریانهای دائم (d-c) مانند اتصال کوتاه عمل می‌کنند، روشن است که وقتی تأثیرات اندوکتانس‌ها در مدارها و میدانهای مغناطیسی مورد نظر باشد، لازم است جریانهای متناوب را در نظر داشته باشیم. بررسی کلی میدانهای الکترومغناطیسی متغیر با زمان (الکتروسیسته پویا[†]) را تا فصل آینده به تعویق خواهیم انداخت. فعلاً، شرایط شبه ایستا را فرض می‌کنیم که ایجاب می‌نماید، جریانها بسیار آهسته یا زمان تغییر کنند (دارای فرکانس پایین باشند) و ابعاد مدار در مقایسه با طول موج بسیار کوچک باشند. به طوری که به هنگام مورد بحث قراردادن امواج الکترومغناطیسی در فصل ۸ خواهیم دید، این شرایط در حکم چشم‌پوشی از تأثیرات تأخیری و تشعشی هستند.

در بخش ۳-۱۱، این حقیقت را بررسی کردیم که برای در جای خود قراردادن دسته‌ای از بارها به انجام کار نیاز است و این کار به صورت انرژی الکتریکی ذخیره می‌شود. مطمئناً انتظار داریم که به هنگام ارسال جریان در حلقه‌های هادی نیز لازم باشد کاری صرف شود و این کار به صورت انرژی مغناطیسی ذخیره گردد. حلقه بسته تنهایی را با اندوکتانس خودی L_1 و جریان اولیه صفر در نظر بگیرید. یک مولد جریان به این حلقه متصل می‌شود و جریان i_1 را از صفر به I_1 افزایش می‌دهد. از فیزیک می‌دانیم که نیروی محرک الکتریکی (emf) در حلقه القا خواهد شد که با تغییرات جریان مخالفت می‌کند. برای غلبه بر این emf القائی، مقداری کار باید انجام شود. گیریم $v_1 = L_1 di_1/dt$ ولتاژ دو سر این اندوکتانس باشد. کار مورد نیاز برابر است با

$$W_1 = \int v_1 i_1 dt = L_1 \int_0^{I_1} i_1 di_1 = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 \quad (157-6)$$

چون در محیط‌های خطی $L_1 = \Phi_1/I_1$ ، معادله (۱۵۷-۶) به صورتی دیگر برحسب پیوند شار قابل نوشتن است

$$W_1 = \frac{1}{2} I_1 \Phi_1 \quad (158-6)$$

که به صورت انرژی مغناطیسی ذخیره می‌شود.

[†] موضوع القای الکترومغناطیسی در فصل ۷ بررسی خواهد شد.

اکنون دو حلقه بسته C_1 و C_2 را در نظر بگیرید که به ترتیب جریانهای i_1 و i_2 را حمل می نمایند. مقدار اولیه جریانها صفر بوده و به ترتیب تا I_1 و I_2 افزایش پیدا می کنند. برای یافتن مقدار کار لازم، نخست $i_2 = 0$ را در نظر گرفته و i_1 را از صفر به I_1 افزایش می دهیم. این افزایش، به کار W_1 در حلقه C_1 ، مطابق معادله (۶-۱۵۷) یا (۶-۱۵۸) نیاز دارد؛ در حلقه C_2 کاری انجام نمی شود، زیرا $i_2 = 0$ است. سپس i_1 را در I_1 نگه داشته و i_2 را از صفر تا I_2 افزایش می دهیم. به دلیل توزیع متقابل، بخشی از شار مغناطیسی ناشی از i_2 با حلقه C_1 در پیوند خواهد بود، و باعث تولید یک emf القائی می شود که باید توسط ولتاژ $v_{21} = L_{21} di_2/dt$ بر آن غلبه گردد تا i_2 در مقدار I_2 خود ثابت بماند. کار مورد نظر برابر است با،

$$W_{21} = \int v_{21} I_2 dt = L_{21} I_1 \int_0^{I_2} di_2 = L_{21} I_1 I_2 \quad (۶-۱۵۹)$$

در همین زمان، کار W_{22} باید در حلقه C_2 انجام گیرد تا اینکه با emf القائی مشارکت به عمل آمده و i_2 را به I_2 افزایش دهد.

$$W_{22} = \frac{1}{2} L_2 I_2^2 \quad (۶-۱۶۰)$$

مقدار کل کار انجام شده برای افزایش جریان حلقه های C_1 و C_2 از صفر تا به ترتیب I_1 و I_2 برابر حاصل جمع W_{22} و W_{21} و W_1 است:

$$\begin{aligned} W_T &= \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + L_{21} I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 L_{jk} I_j I_k \end{aligned} \quad (۶-۱۶۱)$$

با تعمیم این نتیجه به سیستمی از N حلقه حامل جریانهای I_1, I_2, \dots, I_N ، به دست می آید:

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N L_{jk} I_j I_k \quad (J) \quad (۶-۱۶۲)$$

که انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی است. در مورد جریان I که در یک سلف تنها با اندوکتانس L برقرار است، انرژی مغناطیسی ذخیره شده برابر است با

$$W_m = \frac{1}{2} L I^2 \quad (J) \quad (۶-۱۶۳)$$

آموزنده است اگر معادله (۶-۱۶۲) را به شکل دیگری نیز به دست آوریم. حلقه نمونه ای k م از N حلقه توزیع شده مغناطیسی را در نظر بگیرید. فرض کنید v_k و i_k به ترتیب ولتاژ دو

سر حلقه و جریان گذرنده از آن باشند. کار انجام شده در حلقه k م در زمان dt برابر است با

$$dW_k = v_k i_k dt = i_k d\phi_k \quad (۶-۱۶۴)$$

که در آن، از رابطه $v_k = d\phi_k/dt$ استفاده کرده ایم. توجه داشته باشید که تغییر $d\phi_k$ در شار ϕ_k که با k امین حلقه پیوند دارد، نتیجه تغییرات جریان در تمام حلقه های توزیع شده است. پس کار دیفرانسیلی انجام شده یا انرژی مغناطیسی دیفرانسیلی ذخیره شده در سیستم برابر است با

$$dW_m = \sum_{k=1}^N dW_k = \sum_{k=1}^N i_k d\phi_k \quad (۶-۱۶۵)$$

کل انرژی ذخیره شده، انتگرال dW_m و مستقل از چگونگی رسیدن جریانها و شارها به مقدار نهائی است. گیریم فرض کنیم که همه جریانها و شارها به طور هماهنگ، با یک ضریب یکسان α که از صفر به یک افزایش می یابد، به مقدار نهائی خود برسند؛ یعنی در هر لحظه از زمان $i_k = \alpha I_k$ و $\phi_k = \alpha \Phi_k$ ، انرژی مغناطیسی کل چنین بدست می آید:

$$W_m = \int dW_m = \sum_{k=1}^N I_k \Phi_k \int_0^1 \alpha d\alpha$$

یا

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N I_k \Phi_k \quad (J) \quad (۶-۱۶۶)$$

و همان گونه که انتظار می رفت، به ازای $N=1$ به معادله (۶-۱۵۸) ساده می شود. با توجه به اینکه در محیط های خطی،

$$\Phi_k = \sum_{j=1}^N L_{jk} I_j$$

بلافاصله معادله (۶-۱۶۲) بدست می آید.

۶-۱۲-۱ انرژی مغناطیسی برحسب کمیات میدان

معادله (۶-۱۶۶) را می توان برای تعیین انرژی مغناطیسی توزیع پیوسته جریان در یک حجم، تعمیم داد. هر حلقه حامل جریان تنها را می توان به صورت تعداد زیادی مثلاً N جزء کوچک جریان رشته ای مجاور هم در مسیرهای بسته C_k ، که هر یک دارای جریان گذرنده ΔI_k از سطح مقطع بی نهایت کوچک $\Delta a'_k$ بوده و با شار مغناطیسی Φ_k در پیوند هستند، در نظر گرفت.

$$\Phi_k = \int_{S_k} \mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_n ds'_k = \oint_{C_k} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}'_k \quad (۶-۱۶۷)$$

که در آن S_k سطح محصور شده توسط C_k است. با جایگذاری معادله (۶-۱۶۷) در معادله (۶-۱۶۶) داریم

$$W_m = \frac{1}{\gamma} \sum_{k=1}^N \Delta I_k \oint_{C_k} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}'_k \quad (۶-۱۶۸)$$

اکنون

$$\Delta I_k d\mathbf{l}'_k = J(\Delta a'_k) d\mathbf{l}'_k = J \Delta v'_k$$

وقتی که $N \rightarrow \infty$ ، $\Delta v'_k$ تبدیل به dv' و جمع معادله (۶-۱۶۸) به صورت انتگرال نوشته می شود. داریم

$$W_m = \frac{1}{\gamma} \int_{V'} \mathbf{A} \cdot \mathbf{J} dV' \quad (J) \quad (۶-۱۶۹)$$

که در آن V' حجم حلقه یا محیط خطی دارای \mathbf{J} ، می باشد. این حجم می تواند تا کل فضا گسترش یابد. زیرا شامل نمودن ناحیه ای که در آن $\mathbf{J} = 0$ است، W_m را تغییر نمی دهد. معادله (۶-۱۶۹) باید با عبارت مربوط به انرژی الکتریکی W_e در معادله (۳-۱۷۰) مقایسه شود. اغلب مطلوب آن است که انرژی مغناطیسی را به جای چگالی جریان \mathbf{J} و پتانسیل برداری \mathbf{A} ، بر حسب کمیات میدان یعنی \mathbf{B} و \mathbf{H} بیان کنیم. با استفاده از اتحاد برداری

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{H})$$

(مسئله ۲۰-۲۳ یا لیست آخر کتاب را ببینید)، داریم

$$\mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{H})$$

یا

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{J} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} - \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) \quad (۶-۱۷۰)$$

با جایگذاری معادله (۶-۱۷۰) در معادله (۶-۱۶۹) بدست می آید

$$W_m = \frac{1}{\gamma} \int_{V'} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dv' - \frac{1}{\gamma} \oint_{S'} (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{a}_n ds' \quad (۶-۱۷۱)$$

در معادله (۶-۱۷۱)، قضیه دیورژانس به کار گرفته شده و S' سطح در برگیرنده V' است. اگر V' به قدر کافی بزرگ فرض شود، نقاط روی سطح S' آن از جریانها بسیار دور خواهند شد. در این نقاط دوردست، اثر انتگرال سطحی معادله (۶-۱۷۱) به صفر میل می کند، زیرا به طوری که از معادلات (۶-۲۳) و (۶-۲۲) ملاحظه می شود، به ترتیب $|\mathbf{A}|$ با $1/R$ و $|\mathbf{H}|$ با $1/R^2$ کاهش می یابد. از این رو اندازه $(\mathbf{A} \times \mathbf{H})$ با $1/R^3$ کاهش می یابد، در حالی که در همین زمان، سطح

S' فقط متناسب با R^2 افزایش پیدا می کند. با میل کردن R به سمت بی نهایت، انتگرال سطحی معادله (۶-۱۷۱) صفر شده و در نتیجه داریم

$$W_m = \frac{1}{\gamma} \int_{V'} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dv \quad (J) \quad (۶-۱۷۲ الف)$$

باتوجه به اینکه $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu$ ، معادله (۶-۱۷۲ الف) را به دو صورت دیگر می توانیم بنویسیم:

$$W_m = \frac{1}{\gamma} \int_{V'} \frac{B^2}{\mu} dv' \quad (J) \quad (۶-۱۷۲ ب)$$

و

$$W_m = \frac{1}{\gamma} \int_{V'} \mu H^2 dv' \quad (J) \quad (۶-۱۷۲ پ)$$

عبارات به دست آمده در معادلات (۶-۱۷۲ الف)، (۶-۱۷۲ ب) و (۶-۱۷۲ پ) در مورد انرژی مغناطیسی W_m در یک محیط خطی، به ترتیب مشابه با عبارات مربوط به انرژی الکتریسیته ساکن W_e در معادلات (۳-۱۷۶ الف)، (۳-۱۷۶ ب) و (۳-۱۷۶ پ) هستند. اگر چگالی انرژی مغناطیسی w_m را چنان تعریف کنیم که انتگرال حجمی آن معادل کل انرژی مغناطیسی باشد،

$$W_m = \int_{V'} w_m dv' \quad (۶-۱۷۳)$$

w_m را به سه صورت مختلف می توانیم بنویسیم:

$$w_m = \frac{1}{\gamma} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \quad (J/m^3) \quad (۶-۱۷۴ الف)$$

یا

$$w_m = \frac{B^2}{\gamma \mu} \quad (J/m^3) \quad (۶-۱۷۴ ب)$$

یا

$$w_m = \frac{1}{\gamma} \mu H^2 \quad (J/m^3) \quad (۶-۱۷۴ پ)$$

با استفاده از معادله (۶-۱۶۳)، اغلب تعیین اندوکتانس خودی از روی انرژی مغناطیسی ذخیره شده که بر حسب \mathbf{B} و یا \mathbf{H} محاسبه می شود، آسانتر از استفاده از پیوند شار است.

داریم

$$L = \frac{2W_m}{I^2} \quad (H) \quad (175-6)$$

(۱۷۵-۶)

مثال ۶-۲۰ با استفاده از انرژی مغناطیسی ذخیره شده، اندوکتانس یک خط انتقال هم‌محور هوائی که دارای هادی داخلی توپر به شعاع a ، هادی خارجی بسیار نازک با شعاع داخلی b است را در واحد طول تعیین کنید.

حل این همان مسئله مطرح شده در مثال ۶-۱۶ است، که اندوکتانس خودی از طریق ملاحظات بیوند شار تعیین گردید. بار دیگر به شکل ۶-۲۴ مراجعه کنید. جریان یکنواخت I از هادی داخلی می‌گذرد و از طریق هادی بیرونی برمی‌گردد. انرژی مغناطیسی ذخیره شده در واحد طول هادی داخلی، از معادلات (۶-۱۳۶) و (۶-۱۷۲) برابر می‌شود با

$$W'_{m1} = \frac{1}{2\mu_0} \int_a^b B_{\phi 1}^2 2\pi r dr \quad (6-176 \text{ الف})$$

$$= \frac{\mu_0 I^2}{4\pi a^2} \int_a^b r^2 dr = \frac{\mu_0 I^2}{16\pi} \quad (J/m)$$

انرژی مغناطیسی ذخیره شده در واحد طول ناحیه بین هادی‌های داخلی و بیرونی از معادلات (۶-۱۳۷) و (۶-۱۷۲) برابر می‌شود با

$$W'_{m2} = \frac{1}{2\mu_0} \int_a^b B_{\phi 2}^2 2\pi r dr \quad (6-176 \text{ ب})$$

$$= \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \int_a^b \frac{1}{r} dr = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \ln \frac{b}{a} \quad (J/m)$$

بنابراین، از معادله (۶-۱۷۵) داریم:

$$L' = \frac{2}{I^2} (W'_{m1} + W'_{m2})$$

$$= \frac{\mu_0}{8\pi} + \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \quad (H/m)$$

که همان معادله (۶-۱۴۰) است. روش به‌کار رفته در این راه حل، در مقایسه با روش به‌کار رفته در مثال ۶-۱۶ نسبتاً ساده‌تر است، به‌ویژه آن قسمتی که به اندوکتانس داخلی $\mu_0/8\pi$ منجر می‌شود.

۱۳-۶ نیروها و گشتاورهای مغناطیسی

در بخش ۶-۱ متذکر شدیم که وقتی بار q با سرعت u در میدان مغناطیسی با چگالی شار B حرکت می‌کند، نیروی مغناطیسی F_m را طبق معادله (۶-۲) که در اینجا تکرار می‌شود، تحمل می‌نماید:

$$F_m = qu \times B \quad (N) \quad (177-6)$$

در این بخش جنبه‌های مختلف نیروها و گشتاورها را در میدانهای مغناطیسی ساکن بررسی خواهیم کرد.

۱۳-۶-۱ اثر هال

ماده‌ای هادی یا سطح مقطع مستطیلی $d \times b$ در میدان مغناطیسی یکنواخت $B = a_y B_x$ مطابق شکل ۶-۲۸ در نظر بگیرید. جریان مستقیم یکنواختی در جهت z عبور می‌کند:

$$J = a_z J_z = Nqu \quad (178-6)$$

که در آن، N ، تعداد حاملهای بار در واحد حجم که با سرعت u حرکت می‌کنند، و q بار هر حامل بار است. به موجب معادله (۶-۱۷۷)، حاملهای بار تحت نیروی که هم بر B و هم بر u عمود است، قرار می‌گیرند. اگر ماده، هادی یا نیمه هادی نوع n باشد، حاملهای بار الکترونها هستند و q منفی است. نیروی مغناطیسی مایل است الکترون‌ها را در جهت مثبت x حرکت دهد و یک میدان الکتریکی عرضی^۱ را به وجود آورد. این عمل ادامه خواهد یافت تا اینکه میدان عرضی برای متوقف کردن رانش حاملهای بار کافی باشد. در حالت دائمی، نیروی خالص وارده بر حاملهای بار صفر است:

$$E_h + u \times B = 0 \quad (6-179 \text{ الف})$$

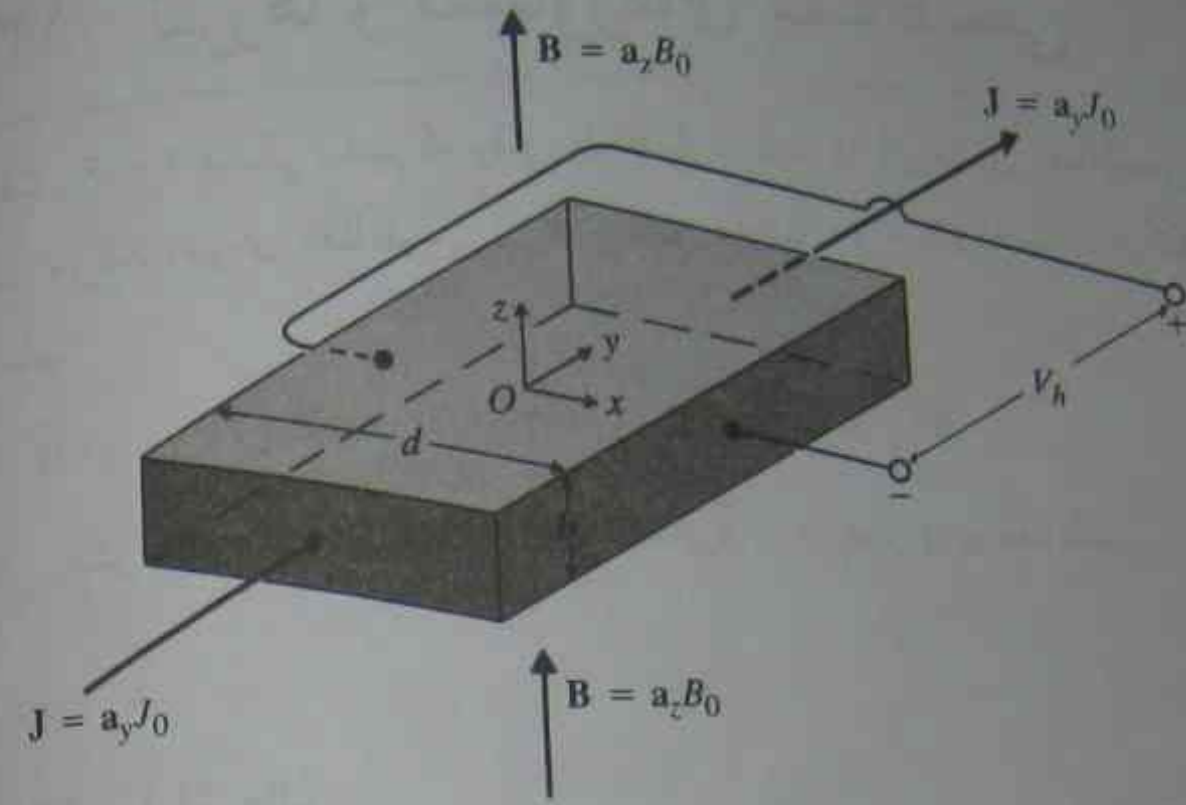
یا

$$E_h = -u \times B \quad (6-179 \text{ ب})$$

این پدیده را اثر هال گویند و E_h میدان هال خوانده می‌شود. در مورد هادیها و نیمه‌هادی‌های نوع n و J_z مثبت، $u = -a_y u_x$ و

$$E_h = -(-a_y u_x) \times a_z B_x$$

$$= a_y u_x B_x \quad (180-6)$$



شکل ۶-۲۸ تشریح اثر هال

یک بتانسیل عرضی، بین دو وجه جانبی ماده ظاهر می شود، از این رو در مورد حاملهای الکترونی داریم

$$V_h = - \int_0^d E_h dx = u_x B_z d \quad (۱۸۱-۶)$$

در معادله (۱۸۱-۶)، V_h را ولتاژ هال می نامیم. نسبت $E_x / J_y B_z = 1/Nq$ یک مشخصه ماده است و ضریب هال نامیده می شود.

اگر حاملهای بار حفره ها باشند، مثل حاملهای بار در نیمه هادی نوع p ، میدان هال معکوس خواهد شد و ولتاژ هال در معادله (۱۸۱-۶)، نسبت به قطبهای مرجع شکل ۶-۲۸ منفی خواهد بود.

از اثر هال می توان برای اندازه گیری میدان مغناطیسی و تعیین علامت حاملهای بار غالب (تشخیص نیمه هادی نوع n از نوع p) استفاده کرد. در اینجا شکل ساده شده ای از اثر هال مطرح شده است. در عمل، اثر هال مطلب پیچیده ای است و شامل مباحث نظریه کوانتوم می باشد.

۶-۱۳-۲ نیروها و گشتاورها در هادیهای حامل جریان

گیریم جزء کوچک dl از یک هادی را با سطح مقطع S در نظر بگیریم. اگر N حامل بار (الکترون ها) در واحد حجم یا سرعت u در جهت dl حرکت کنند، آنگاه نیروی مغناطیسی وارد

۱- Hall coefficient

بر جزء کوچک دیفرانسیلی برابر است با:

$$dF_m = -NeS|dl|u \times B \quad (۱۸۲-۶)$$

$$= -NeS|u|dl \times B$$

که در آن e بار الکترونی است. دو عبارت معادله (۱۸۲-۶) معادلند، زیرا u و dl هم جهت هستند. حال، چون $-NeS|u|$ برابر جریان در هادی است، معادله (۱۸۲-۶) را می توان به صورت زیر نوشت

$$dF_m = Idl \times B \quad (N) \quad (۱۸۳-۶)$$

پس، نیروی مغناطیسی وارد بر یک مدار کامل (بسته)، به مسیر C که حامل جریان I در میدان مغناطیسی B است، برابر می شود با

$$F_m = I \oint_C dl \times B \quad (N) \quad (۱۸۴-۶)$$

وقتی دو مدار، به ترتیب حامل جریانهای I_1 و I_2 در اختیار داریم، شرایط، مشابه آن است که یک مدار حامل جریان در میدان مغناطیسی مدار دیگر واقع شده باشد. در حضور میدان مغناطیسی B_{21} که ناشی از جریان I_2 در مدار C_2 است، نیروی F_{21} بر مدار C_1 به صورت زیر قابل نوشتن است:

$$F_{21} = I_1 \oint_{C_1} dl_1 \times B_{21} \quad (۱۸۵-الف)$$

که در آن B_{21} با استفاده از قانون بیوساوار، معادله (۶-۳۲)، برابر است با،

$$B_{21} = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \oint_{C_2} \frac{dl_2 \times a_{R_{21}}}{R_{21}^2} \quad (۱۸۵-ب)$$

با ترکیب معادلات (۱۸۵-الف) و (۱۸۵-ب) به دست می آید

$$F_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{dl_1 \times (dl_2 \times a_{R_{21}})}{R_{21}^2} \quad (N) \quad (۱۸۶-الف)$$

که قانون نیروی آمپر، بین دو مدار حامل جریان است. این معادله، رابطه ای متناسب با عکس توان دوم و قابل مقایسه با قانون نیروی کولمب در معادله (۳-۱۷) بین دو بار ساکن می باشد، قانون نیروی کولمب شکل بسیار ساده تری دارد.

نیروی F_{12} وارد بر مدار C_2 ، در حضور میدان مغناطیسی ناشی از جریان I_1 در مدار C_1 ، از روی معادله (۱۸۶-الف) و با تعویض زیرنویس های ۱ و ۲ قابل نوشتن است:

$$F_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{dl_2 \times (dl_1 \times a_{R_{12}})}{R_{12}^2} \quad (۱۸۶-ب)$$

اما چون $dl_2 \times (dl_1 \times a_{R_{12}}) \neq -dl_1 \times (dl_2 \times a_{R_{21}})$ برشش می‌کنیم ببینیم آیا این بدان معنی است که $-F_{12} \neq -F_{21}$ یعنی آیا قانون سوم نیوتون حاکم بر نیروهای عمل و عکس‌العمل در اینجا از اعتبار می‌افتد؟ گیریم ضرب سه‌گانه برداری عبارت مورد انتگرال‌گیری معادله (۶-۱۸۶ الف) را با استفاده از قاعده *back-cab*، معادله (۲-۲۰)، بسط دهیم:

$$\frac{dl_1 \times (dl_2 \times a_{R_{21}})}{R_{21}^2} = \frac{dl_2 (dl_1 \cdot a_{R_{21}})}{R_{21}^2} - \frac{a_{R_{21}} (dl_1 \cdot dl_2)}{R_{21}^2} \quad (۶-۱۸۷)$$

اکنون انتگرال خطی بسته دوگانه جمله اول طرف راست معادله (۶-۱۸۷) برابر می‌شود با

$$\begin{aligned} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{dl_2 (dl_1 \cdot a_{R_{21}})}{R_{21}^2} &= \oint_{C_2} dl_2 \oint_{C_1} \frac{dl_1 \cdot a_{R_{21}}}{R_{21}^2} \\ &= \oint_{C_2} dl_2 \oint_{C_1} dl_1 \cdot \left(-\nabla_1 \left(\frac{1}{R_{21}} \right) \right) \quad (۶-۱۸۸) \\ &= - \oint_{C_2} dl_2 \oint_{C_1} d \left(\frac{1}{R_{21}} \right) = 0 \end{aligned}$$

در معادله (۶-۱۸۸)، از معادله (۲-۸۸) و رابطه $\nabla_1 (1/R_{21}) = -a_{R_{21}}/R_{21}^2$ استفاده کرده‌ایم. انتگرال خطی بسته (با حدود بالائی و پایینی یکسان) در پیرامون مدار C_1 صفر می‌شود. با جایگذاری معادله (۶-۱۸۷) در معادله (۶-۱۸۶ الف) و استفاده از معادله (۶-۱۸۸)، به دست می‌آوریم

$$F_{21} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{a_{R_{21}} (dl_1 \cdot dl_2)}{R_{21}^2} \quad (۶-۱۸۹)$$

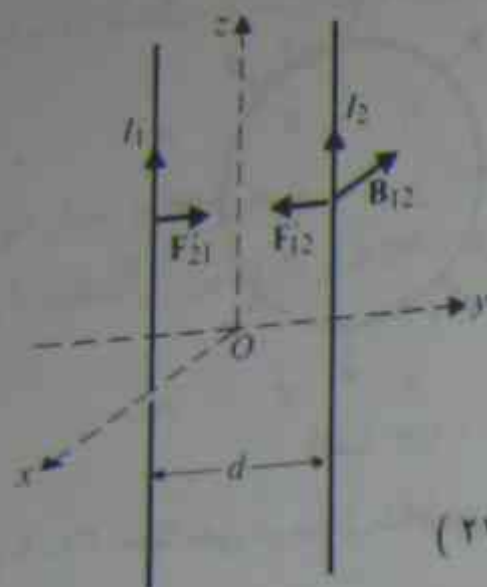
که به وضوح معادل $-F_{12}$ است، زیرا $a_{R_{12}} = -a_{R_{21}}$. در نتیجه همان‌گونه که انتظار می‌رفت، قانون سوم نیوتون برقرار است.

مثال ۶-۲۱ نیروی وارد بر واحد طول بین دو سیم هادی موازی بسیار طویل حامل جریانهای هم جهت I_1 و I_2 را تعیین کنید. فاصله سیم‌ها از یکدیگر برابر d است.

حل فرض کنید که سیم‌ها در صفحه xy و مطابق شکل ۶-۲۹ به موازات محور z قرار داشته باشند. این مسئله، کاربرد سراسر معادله (۶-۱۸۵ الف) است. اگر F'_{12} ، نمایشگر نیروی وارد بر واحد طول سیم ۲ باشد، داریم،

$$F'_{12} = I_2 (a_z \times B_{12}) \quad (۶-۱۹۰)$$

که در آن B_{12} چگالی شار مغناطیسی در سیم ۲ ناشی از جریان I_1 در سیم ۱، روی سیم ۲ ثابت است. چون سیم‌ها بی‌نهایت طویل فرض می‌شوند و تقارن استوانه‌ای برقرار است، لازم نیست



شکل ۶-۲۹ نیروی بین دو سیم موازی حامل جریان (مثال ۶-۲۱)

برای تعیین B_{12} از معادله (۶-۱۸۵ ب) استفاده کنیم. قانون مداری آمپر را به کار برده و با استفاده از معادله (۶-۱۱ ب) می‌نویسیم،

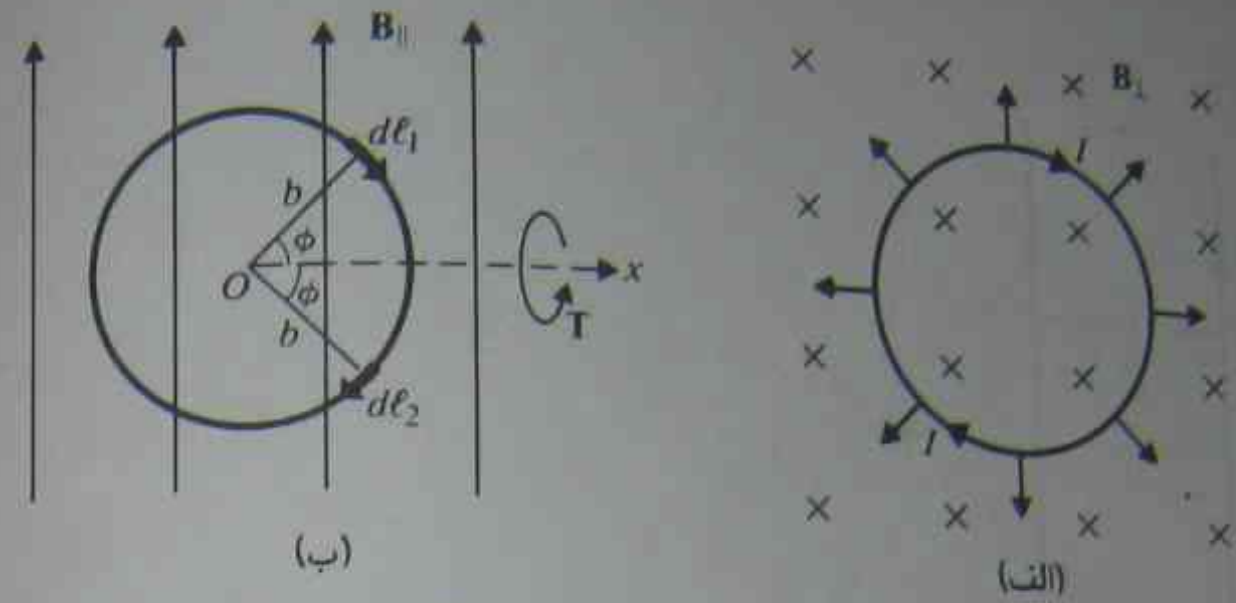
$$B_{12} = -a_z \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} \quad (۶-۱۹۱)$$

جایگذاری معادله (۶-۱۹۱) در معادله (۶-۱۹۰) نتیجه می‌دهد

$$F'_{12} = -a_y \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} \quad (\text{N/m}) \quad (۶-۱۹۲)$$

ملاحظه می‌کنیم که نیروی وارد بر سیم ۲ آن را به سوی سیم ۱ می‌کشد. از این رو نیروی بین دو سیم حامل جریان در جهت یکسان از نوع جاذبه است (برعکس نیروی بین دو بار هم‌علامت، که از نوع دافعه می‌باشد). باسانی ثابت می‌شود که $F'_{21} = -F'_{12} = a_y (\mu_0 I_1 I_2 / 2\pi d)$ و نیروی بین دو سیم حامل جریان در جهت مخالف از نوع دافعه است.

اکنون حلقهٔ مدور کوچکی به شعاع b ، که حامل جریان I در میدان مغناطیسی یکنواختی با چگالی شار B است را در نظر می‌گیریم. مناسب‌تر است B را به دو مؤلفهٔ $B = B_{\perp} + B_{\parallel}$ تجزیه کنیم، که در آن B_{\perp} و B_{\parallel} به ترتیب عمود بر صفحهٔ حلقه و به موازات آن هستند. به طوری که در شکل ۶-۳۰ (الف) ملاحظه می‌کنید، مؤلفهٔ عمودی B_{\perp} تمایل به گسترش حلقه (یا اگر جهت I برعکس شود، تمایل به انقباض آن) دارد، اما B_{\parallel} هیچ نیروی خالصی برای حرکت حلقه اعمال نمی‌کند. مؤلفهٔ موازی B_{\parallel} ، مطابق شکل ۶-۳۰ ب)، نیرویی به سمت بالا، dF_{\perp} ، (به سمت خارج صفحه کاغذ) بر عنصر کوچک dl_1 و نیرویی به سمت پایین (به سمت داخل صفحه کاغذ) $dF_{\parallel} = -dF_{\perp}$ ، بر عنصر کوچک dl_2 در محل تقارن وارد می‌نماید. اگرچه نیروی خالص وارده بر کل حلقه ناشی از B_{\parallel} نیز صفر است، گشتاوری وجود دارد که سعی می‌کند حلقه را



شکل ۳۰-۶ حلقهٔ مدور در میدان مغناطیسی یکنواخت $B = B_{\perp} + B_{\parallel}$

حول محور x چنان بچرخاند که میدان مغناطیسی (ناشی از I) را با میدان خارجی B_{\parallel} هم/متداد سازد. گشتاور دینامیکی ایجاد شده توسط dF_{\perp} و dF_{\parallel} برابر است با

$$\begin{aligned} dT &= a_x (dF) \perp b \sin \phi \\ &= a_x (I dl B_{\parallel} \sin \phi) \perp b \sin \phi \\ &= a_x \perp I b^2 B_{\parallel} \sin^2 \phi d\phi \end{aligned} \quad (۱۹۳-۶)$$

که در آن $dF = |dF_{\perp}| = |dF_{\parallel}|$ و $dl = |dl_{\perp}| = |dl_{\parallel}| = b d\phi$. پس گشتاور کل مؤثر بر حلقه برابر می‌شود با

$$\begin{aligned} T &= \int dT = a_x \perp I b^2 B_{\parallel} \int_0^{\pi} \sin^2 \phi d\phi \\ &= a_x I (\pi b^2) B_{\parallel} \end{aligned} \quad (۱۹۴-۶)$$

اگر از تعریف گشتاور دوقطبی مغناطیسی در معادلهٔ (۶-۴۶) استفاده شود،

$$m = a_n I (\pi b^2) = a_n IS$$

که در آن a_n بردار واحد در جهت شست دست راست (عمود بر صفحهٔ حلقه) است وقتی که سایر انگشتان این دست جهت جریان را دنبال کنند، آنگاه معادلهٔ (۶-۱۹۴) به صورت زیر قابل نوشتن است

$$T = m \times B \quad (N \cdot m) \quad (۱۹۵-۶)$$

در معادلهٔ (۶-۱۹۵) از بردار B (بجای بردار B_{\parallel}) استفاده شده است، زیرا $m \times (B_{\perp} + B_{\parallel}) = m \times B_{\parallel}$. این گشتاوری است که دوقطبی‌های مغناطیسی میکروسکوپی مواد مغناطیسی را هم‌راستا می‌کند و باعث مغناطیسی شدن ماده به وسیلهٔ میدان مغناطیسی اعمالی

می‌شود. باید به خاطر سپرد که اگر B روی حلقه حامل جریان یکنواخت نباشد، معادلهٔ (۶-۱۹۵) برقرار نخواهد بود.

مثال ۶-۲۲ یک حلقهٔ مستطیل شکل در صفحهٔ xy با اضلاع b_1 و b_2 جریان I را حمل می‌کند و در میدان مغناطیسی یکنواخت $B = a_x B_x + a_y B_y + a_z B_z$ قرار دارد. نیرو و گشتاور وارد بر حلقه را تعیین کنید.

حل با تجزیهٔ B به دو مؤلفهٔ عمودی و موازی B_{\perp} و B_{\parallel} داریم

$$B_{\perp} = a_z B_z \quad (۶-۱۹۶ \text{ الف})$$

$$B_{\parallel} = a_x B_x + a_y B_y \quad (۶-۱۹۶ \text{ ب})$$

با فرض اینکه جریان در جهت عقربه‌های ساعت مطابق شکل ۶-۲۱ برقرار است، درمی‌یابیم که مؤلفهٔ عمودی $a_z B_z$ ، نیروهای $I b_1 B_z$ و $I b_2 B_z$ را روی اضلاع (۱) و (۳) و نیروهای $I b_2 B_z$ و $I b_1 B_z$ را روی اضلاع (۲) و (۴) نتیجه می‌دهد و جهت تمام نیروها به سمت مرکز حلقه است. جمع برداری این چهار نیروی منقبض کننده صفر است و گشتاوری تولید نمی‌شود.

مؤلفهٔ موازی چگالی شار مغناطیسی B_{\parallel} ، نیروهای زیر را روی چهار ضلع ایجاد می‌کند:

$$\begin{aligned} F_1 &= I b_1 a_x \times (a_x B_x + a_y B_y) \\ &= a_z I b_1 B_y = -F_{1z} \end{aligned} \quad (۶-۱۹۷ \text{ الف})$$

$$\begin{aligned} F_2 &= I b_2 (-a_y) \times (a_x B_x + a_y B_y) \\ &= a_z I b_2 B_x = -F_{2z} \end{aligned} \quad (۶-۱۹۷ \text{ ب})$$

این بار نیز نیروی خالص وارد بر حلقهٔ $F_1 + F_2 + F_3 + F_4$ صفر است. اما این نیروها گشتاور خالصی را نتیجه می‌دهند که به صورت زیر محاسبه می‌شود. گشتاور T_{1z} ناشی از نیروهای F_1 و F_2 روی اضلاع (۱) و (۲) برابر است با،

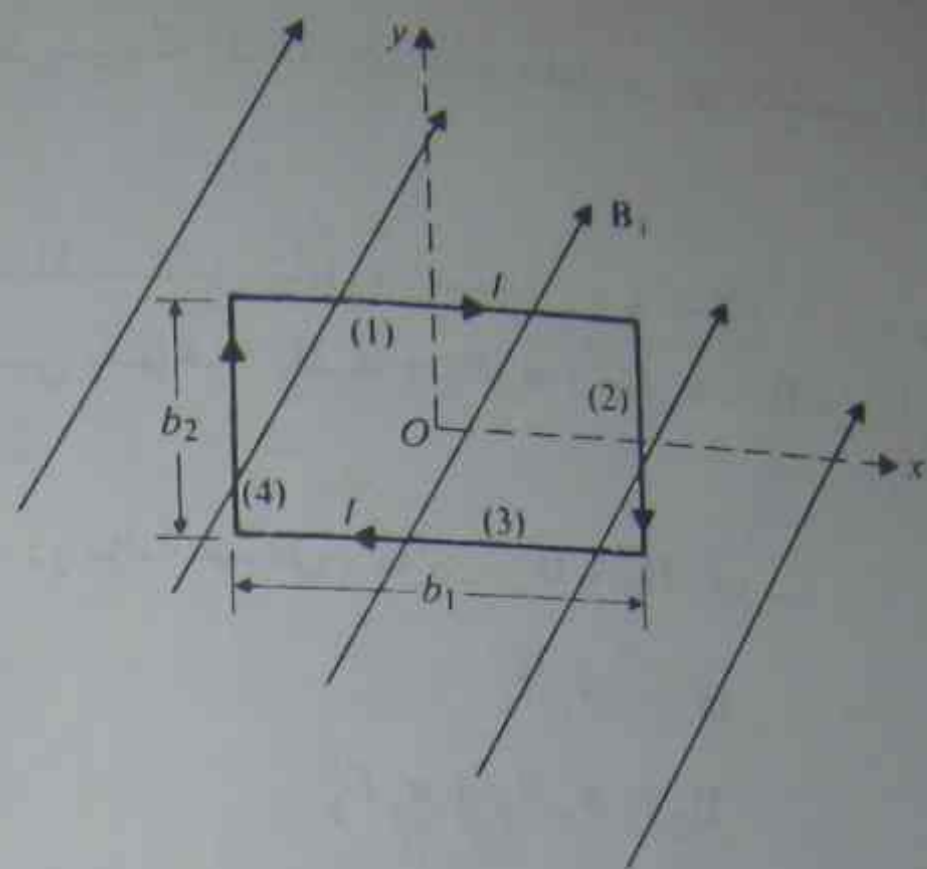
$$T_{1z} = a_x I b_1 b_2 B_y \quad (۶-۱۹۸ \text{ الف})$$

گشتاور T_{2z} ناشی از نیروهای F_2 و F_1 روی اضلاع (۲) و (۱) برابر است با

$$T_{2z} = -a_y I b_1 b_2 B_x \quad (۶-۱۹۸ \text{ ب})$$

بنابراین گشتاور کل وارد بر حلقه مستطیل شکل برابر می‌شود با

$$T = T_{1z} + T_{2z} = I b_1 b_2 (a_x B_y - a_y B_x) \quad (N \cdot m) \quad (۶-۱۹۹)$$



شکل ۳۱-۶ یک حلقه مستطیل شکل در میدان مغناطیسی یکنواخت (مثال ۶-۲۲)

از آنجائی که گشتاور مغناطیسی حلقه برابر $m = -a_z I b_1 b_2$ است، نتیجه معادله (۶-۱۹۹) دقیقاً $T = m \times (a_x B_x + a_y B_y) = m \times B$ می باشد. از این رو با وجود اینکه معادله (۶-۱۹۵) در مورد یک حلقه مدور به دست آمد، فرمول گشتاور در مورد یک حلقه مستطیل شکل نیز معتبر است. در واقع می توان ثابت کرد که معادله (۶-۱۹۵) در مورد هر حلقه مسطح با هر شکلی، مادامی که در یک میدان مغناطیسی یکنواخت قرار دارد، معتبر است. آیا می توانید اثباتی برای این بیان اخیر پیشنهاد کنید؟

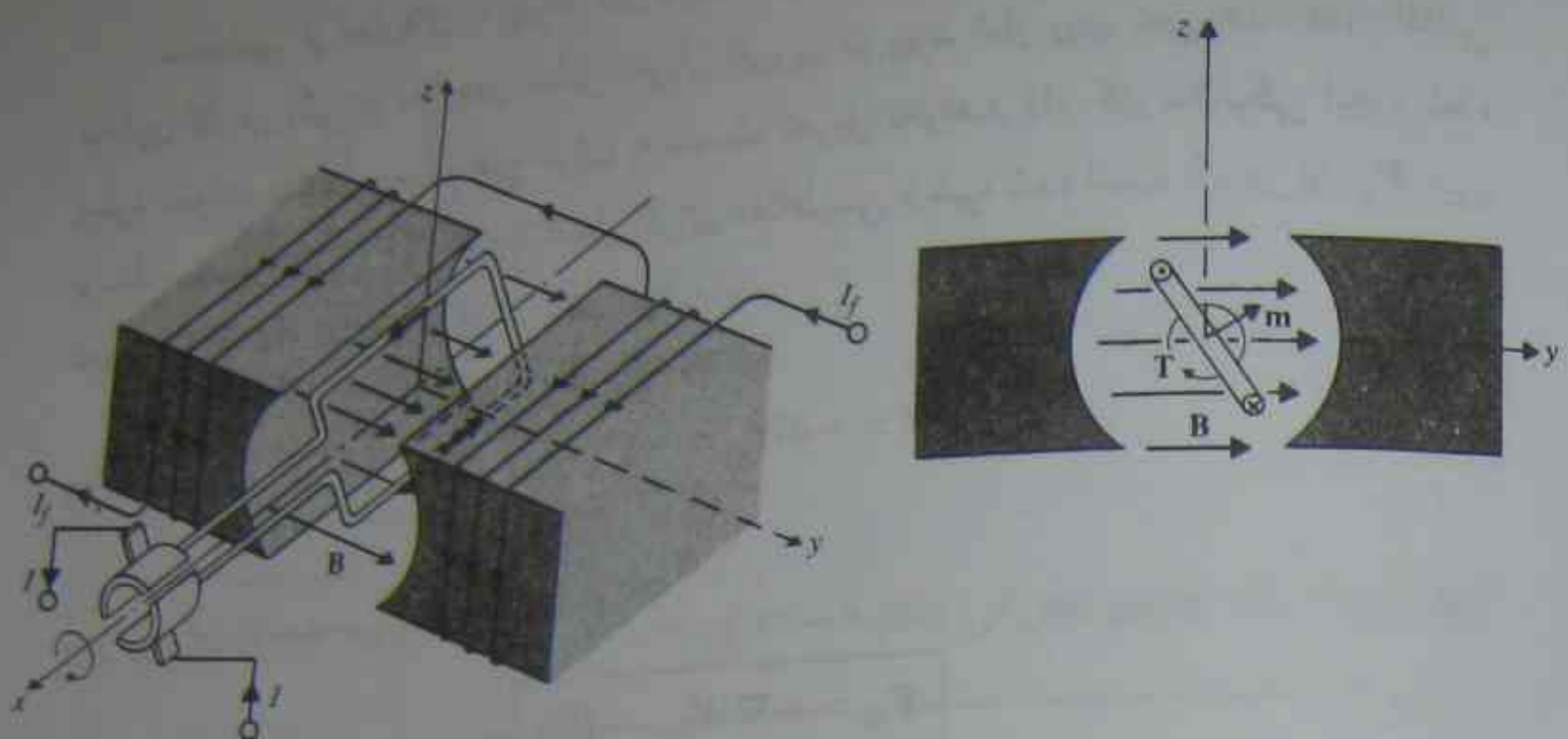
اصول کار موتور جریان مستقیم (d-c) بر اساس معادله (۶-۱۹۵) است. شکل ۳۲-۶ (الف) نمودار شماتیک این چنین موتوری را نشان می دهد. میدان مغناطیسی B، توسط جریان میدان I_r در سیم پیچ دور قطبین تولید می شود. وقتی جریان I به درون حلقه مستطیل شکل فرستاده می شود، گشتاوری حاصل می شود که حلقه را، اگر از جهت +x رویت شود، در جهت عقربه های ساعت می چرخاند. این مطلب را در شکل ۳۲-۶ (ب) نشان داده ایم. یک حلقه دو تکه با جاروبک ها^۱ مورد نیاز است تا اینکه جریان در دو بازوی سیم پیچ در هر نیم دور معکوس شود و در نتیجه گشتاور T همیشه در جهت یکسان نگه داشته شود؛ گشتاور مغناطیسی حلقه، m، باید دارای مؤلفه مثبت باشد.

برای حصول عملکرد یکنواخت، موتورهای d-c دارای تعداد بسیاری از چنین حلقه های مستطیل شکل هستند که حول آرمیچر پیچیده و پخش شده اند. دو انتهای هر حلقه به جفت

۱- Pole pieces

۲- Split ring

۳- Brushes



(الف) نمای تجسمی

(ب) نمای شماتیک از جهت +x

شکل ۳۲-۶ تشریح اصول کار یک موتور d-c

میله های هادی که روی یک استوانه مدور کوچک به نام جابجاگر مرتب شده اند، متصل شده است. جابجاگر، به تعداد دو برابر حلقه ها، دارای میله های هادی موازی است که به طور عایق بندی شده از هم قرار داده شده اند.

۶-۱۳-۳ نیرو و گشتاور بر حسب انرژی مغناطیسی ذخیره شده

تمام هادی ها و مدارهای حامل جریان وقتی در یک میدان مغناطیسی قرار می گیرند، تحت تأثیر نیروی مغناطیسی واقع می شوند. این اجسام وقتی در جای خود ثابت می مانند که نیروهای مکانیکی برابر و مخالف با نیروهای مغناطیسی موجود باشد. به جز در موارد خاص متقارن، (مثل مورد دو سیم هادی موازی حامل جریان بینهایت طویل مثال ۶-۲۱)، تعیین نیروهای مغناطیسی بین مدارهای حامل جریان، با استفاده از قانون نیروی آمپر، کار بسیار خسته کننده ای است. اکنون روش دیگری را برای یافتن نیروها و گشتاورهای مغناطیسی، بر اساس اصل جابجائی مجازی مورد بررسی قرار می دهیم. این اصل در بخش ۳-۱۱-۲ برای تعیین نیروهای الکتریسته ساکن بین هادی های باردار مورد استفاده قرار گرفت. در اینجا، دو حالت را در نظر بگیرید: نخست، سیستمی از مدارهایی با پیوند شار مغناطیسی ثابت و دوم سیستمی از مدارهایی با جریان ثابت.

۱- Commutator

۲- Principle of virtual displacement

سیستمی از مدارهای با پیوند شار ثابت اگر فرض کنیم که به دلیل جابجائی دیفرانسیلی مجازی $d\ell$ در یکی از مدارهای حامل جریان تغییری در پیوند شار روی نمی‌دهد، emf القائی وجود نخواهد داشت و منابع هیچ انرژی به سیستم تحویل نخواهند داد. کار مکانیکی انجام شده توسط سیستم $F_\Phi \cdot d\ell$ ، به هزینه کاهش انرژی مغناطیسی ذخیره شده است، که در آن F_Φ نیرو تحت شرایط شار ثابت را نشان می‌دهد، از این رو:

$$F_\Phi \cdot d\ell = -dW_m = -(\nabla W_m) \cdot d\ell \quad (۲۰۰-۶)$$

و از روی آن بدست می‌آید،

$$F_\Phi = -\nabla W_m \quad (N) \quad (۲۰۱-۶)$$

در مختصات کارتزین، مؤلفه‌های نیرو عبارتند از

$$(F_\Phi)_x = -\frac{\partial W_m}{\partial x} \quad (۲۰۲-۶ \text{ الف})$$

$$(F_\Phi)_y = -\frac{\partial W_m}{\partial y} \quad (۲۰۲-۶ \text{ ب})$$

$$(F_\Phi)_z = -\frac{\partial W_m}{\partial z} \quad (۲۰۲-۶ \text{ پ})$$

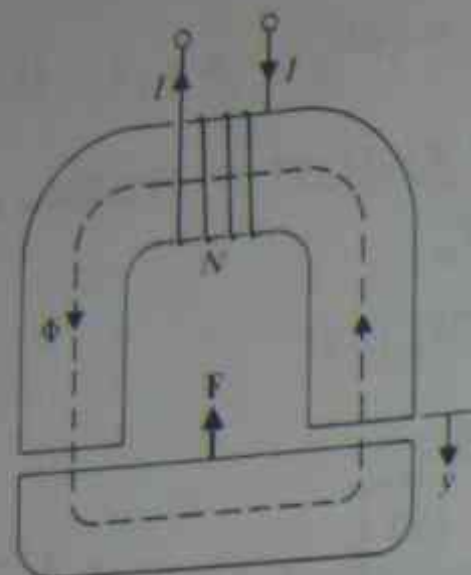
اگر مدار محدود به چرخش حول یک محور باشد، مثلاً محور z ، کار مکانیکی انجام شده توسط سیستم برابر $(T_\Phi)_z d\phi$ خواهد بود و

$$(T_\Phi)_z = -\frac{\partial W_m}{\partial \phi} \quad (N \cdot m) \quad (۲۰۳-۶)$$

که مؤلفه z گشتاور مؤثر بر مدار، تحت شرایط پیوند شار ثابت است.

مثال ۲۳-۶ آهنربای الکتریکی شکل ۳۳-۶ را در نظر بگیرید که در آن، جریان I در سیم پیچی با N دور، تولید شار Φ در مدار مغناطیسی می‌نماید. سطح مقطع هسته S است. نیروی کشش وارد بر قطعه فلزی را تعیین کنید.

حل فرض کنید قطعه فلزی تحت جابجائی مجازی dy (افزایش دیفرانسیلی در y) قرار گیرد و منبع چنان تنظیم شود که شار Φ ثابت بماند. هر جابجائی در قطعه فلزی، فقط طول شکاف هوایی را تغییر می‌دهد؛ در نتیجه این جابجائی تنها انرژی مغناطیسی ذخیره شده در دو شکاف هوایی را



شکل ۶-۳۳ یک آهنربای الکتریکی (مثال ۶-۲۳)

تغییر می‌دهد. از معادله (۶-۱۷۲) داریم.

$$dW_m = d(W_m)_{\text{شکاف هوایی}} = \int \left(\frac{B^2}{2\mu_0} S dy \right) \quad (۲۰۴-۶)$$

$$= \frac{\Phi^2}{\mu_0 S} dy$$

افزایش طول شکاف هوایی (dy مثبت) انرژی مغناطیسی ذخیره شده را در صورتی که Φ ثابت باشد، افزایش می‌دهد. با استفاده از معادله (۶-۲۰۲) بدست می‌آید

$$F_\Phi = a_y (F_\Phi)_y = -a_y \frac{\Phi^2}{\mu_0 S} \quad (N) \quad (۲۰۵-۶)$$

در این رابطه، علامت منفی نشان می‌دهد که نیرو قصد کاهش طول شکاف هوایی را دارد. یعنی نیرو از نوع جاذبه‌ای است.

سیستمی از مدارهای با جریان ثابت در این حالت، مدارها به منابع جریانی وصل شده‌اند که با emf نتیجه شده از تغییرات پیوند شار ناشی از جابجائی مجازی $d\ell$ مخالفت می‌کنند. کار انجام شده یا انرژی تحویلی توسط منابع برابر است با (معادله ۶-۱۶۵ را ببینید)،

$$dW_s = \sum_k I_k d\Phi_k \quad (۲۰۶-۶)$$

این انرژی باید برابر مجموع کار مکانیکی انجام شده توسط سیستم، $dW = F_I \cdot d\ell$ ، که در آن F_I نمایشگر نیروی وارد بر مدار جابجا شده تحت شرایط جریان ثابت است) و افزایش در انرژی مغناطیسی ذخیره شده، dW_m ، می‌باشد. یعنی،

$$dW_s = dW + dW_m \quad (۲۰۷-۶)$$

از معادله (۶-۱۶۶) داریم

$$dW_m = \frac{1}{\mu_0} \sum_k I_k d\Phi_k = \frac{1}{\mu_0} dW_s \quad (۶-۲۰۸)$$

با ترکیب معادلات (۶-۲۰۷) و (۶-۲۰۸) به دست می‌آید،

$$dW = \mathbf{F}_I \cdot d\mathbf{l} = dW_m \\ = (\nabla W_m) \cdot d\mathbf{l}$$

یا

$$\mathbf{F}_I = \nabla W_m \quad (\text{N}) \quad (۶-۲۰۹)$$

که با عبارت مربوط به \mathbf{F}_Φ در معادله (۶-۲۰۱) فقط یک تغییر علامت، تفاوت دارد. اگر مدار محدود به چرخش حول محور z باشد، مؤلفه z گشتاور مؤثر بر مدار برابر می‌شود با

$$(T_I)_z = \frac{\partial W_m}{\partial \phi} \quad (\text{N} \cdot \text{m}) \quad (۶-۲۱۰)$$

بار دیگر اختلاف بین رابطه فوق و $(T_\Phi)_z$ در معادله (۶-۲۰۳) تنها در علامت است. باید تفهیم شود که علی‌رغم اختلاف در علامت، معادلات (۶-۲۰۱) و (۶-۲۰۳) باید جواب‌های مشابهی، به ترتیب مانند معادلات (۶-۲۰۹) و (۶-۲۱۰) در مورد هر مسئله خاص نتیجه دهند. فرمول بندی‌های با استفاده از روش جابجائی مجازی تحت شرایط پیوند شار ثابت و جریان ثابت صرفاً دو طریقه حل یک مسئله هستند.

فرض می‌کنیم مسئله آهنربای الکتریکی مثال ۶-۲۳ را با فرض جابجائی مجازی تحت شرایط جریان ثابت حل کنیم. بدین منظور W_m را برحسب جریان I ، بیان می‌کنیم:

$$W_m = \frac{1}{\mu_0} LI^2 \quad (۶-۲۱۱)$$

که در آن L ، اندوکتانس خودی سیم بیج است. شار Φ در آهنربای الکتریکی، از تقسیم بیروی محرکه مغناطیسی (NI) بر مجموع رلوکتانس هسته (\mathcal{R}_c) و رلوکتانس دو شکاف هوایی $(2y/\mu_0 S)$ به دست می‌آید. از این رو،

$$\Phi = \frac{NI}{\mathcal{R}_c + 2y/\mu_0 S} \quad (۶-۲۱۲)$$

اندوکتانس L ، برابر پیوند شار در واحد جریان است:

$$L = \frac{N\Phi}{I} = \frac{N^2}{\mathcal{R}_c + 2y/\mu_0 S} \quad (۶-۲۱۳)$$

۶-۱۳ نیروها و گشتاورهای مغناطیسی

با ترکیب حالات (۶-۲۰۹) و (۶-۲۱۱) و استفاده از معادله (۶-۲۱۲) به دست می‌آید،

$$\mathbf{F}_I = a_y \frac{I^2 dL}{\mu_0 S} = -a_y \frac{1}{\mu_0 S} \left(\frac{NI}{\mathcal{R}_c + 2y/\mu_0 S} \right)^2 \\ = -a_y \frac{\Phi^2}{\mu_0 S} \quad (\text{N}) \quad (۶-۲۱۴)$$

که دقیقاً همان \mathbf{F}_Φ در معادله (۶-۲۰۵) است.

۶-۱۳-۴ نیرو و گشتاور برحسب اندوکتانس متقابل

روش جابجائی مجازی در جریانهای ثابت، روش قدرتمندی برای تعیین نیروها و گشتاورهای بین مدارهای صلب حامل جریان است. در دو مدار با جریان‌های I_1 و I_2 ، اندوکتانس‌های خودی L_1 و L_2 و اندوکتانس متقابل L_{12} ، انرژی مغناطیسی با استفاده از معادله (۶-۱۶۱) برابر است با

$$W_m = \frac{1}{\mu_0} L_1 I_1^2 + L_{12} I_1 I_2 + \frac{1}{\mu_0} L_2 I_2^2 \quad (۶-۲۱۵)$$

اگر یکی از مدارها دچار جابجائی مجازی تحت شرایط جریان ثابت گردد، تغییری در W_m به وجود آمده و معادله (۶-۲۰۹) به کار می‌رود. جایگذاری معادله (۶-۲۱۵) در معادله (۶-۲۰۹) نتیجه می‌دهد

$$\mathbf{F}_I = I_1 I_2 (\nabla L_{12}) \quad (\text{N}) \quad (۶-۲۱۶)$$

به طور مشابه، از معادله (۶-۲۱۰) به دست می‌آوریم،

$$(T_I)_z = I_1 I_2 \frac{\partial L_{12}}{\partial \phi} \quad (\text{N} \cdot \text{m}) \quad (۶-۲۱۷)$$

مثال ۶-۲۴ نیروی بین دو سیم بیج مدور هم محور به شعاعهای b_1 و b_2 به فاصله d از یکدیگر که بسیار بزرگتر از شعاعهاست ($d \gg b_1, b_2$) را تعیین کنید. سیم بیج‌ها به ترتیب شامل N_1 و N_2 دور سیم فشرده و حامل جریان‌های I_1 و I_2 هستند.

حل اگر سعی کنیم این مسئله را با استفاده از قانون نیروی آمپر، طبق معادله (۶-۱۸۵ الف) حل کنیم، مسئله نسبتاً مشکلی خواهد شد. بنابراین راه حل خود را بر اساس معادله (۶-۲۱۶) قرار می‌دهیم. نخست، اندوکتانس متقابل بین دو سیم بیج را تعیین می‌کنیم. در مثال ۶-۷، در معادله

(۶-۴۳). پتانسیل برداری ناشی از یک حلقهٔ مدور تک دوری، حامل جریان I را در یک نقطهٔ دور پیدا کردیم. با مراجعه به شکل ۶-۲۴، در این مسئله، در نقطهٔ P روی سیم بیج ۲، $A_{۱۲}$ ناشی از جریان I_1 در سیم بیج ۱ با N_1 دور به صورت زیر است

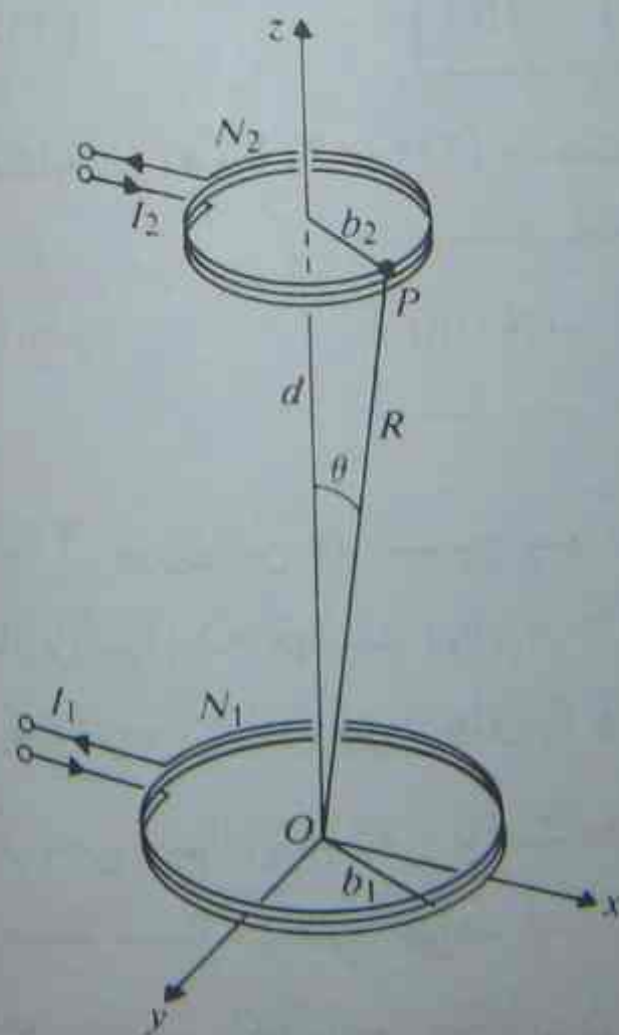
$$\begin{aligned} A_{۱۲} &= a_\phi \frac{\mu_0 N_1 I_1 b_1^2}{4R^2} \sin \theta \\ &= a_\phi \frac{\mu_0 N_1 I_1 b_1^2}{4R^2} \left(\frac{b_2}{R} \right) \\ &= a_\phi \frac{\mu_0 N_1 I_1 b_1^2 b_2}{4(z^2 + b_2^2)^{3/2}} \end{aligned} \quad (۶-۲۱۸)$$

در معادله (۶-۲۱۸)، به جای d از z استفاده شده است، زیرا یک جابجائی مجازی پیش‌بینی می‌شود و z در حال حاضر به صورت یک متغیر نگه داشته می‌شود. با استفاده از معادله (۶-۲۱۸) در معادله (۶-۲۵)، شار متقابل پیدا می‌شود.

$$\begin{aligned} \Phi_{۱۲} &= \oint_{C_2} A_{۱۲} \cdot d\ell_2 = \int_0^{2\pi} A_{۱۲} b_2 d\phi \\ &= \frac{\mu_0 N_1 I_1 b_1^2 b_2^2 \pi}{2(z^2 + b_2^2)^{3/2}} \end{aligned} \quad (۶-۲۱۹)$$

پس اندوختانس متقابل از معادله (۶-۱۲۷) برابر می‌شود با،

$$L_{۱۲} = \frac{N_2 \Phi_{۱۲}}{I_1} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 \pi b_1^2 b_2^2}{2(z^2 + b_2^2)^{3/2}} \quad (H) \quad (۶-۲۲۰)$$



شکل ۶-۲۴ حلقه‌های مدور هم‌محور حامل جریان (مثال ۶-۲۴)

اکنون، نیروی ناشی از میدان مغناطیسی سیم بیج ۱ بر سیم بیج ۲، مستقیماً با جایگذاری معادله (۶-۲۲۰) در معادله (۶-۲۱۶) به دست می‌آید:

$$F_{۱۲} = a_z I_1 I_2 \frac{dL_{۱۲}}{dz} \Big|_{z=d} = -a_z I_1 I_2 \frac{3\mu_0 N_1 N_2 \pi b_1^2 b_2^2 d}{2(d^2 + b_2^2)^{5/2}}$$

که می‌تواند به صورت زیر نوشته شود

$$F_{۱۲} \cong -a_z \frac{3\mu_0 m_1 m_2}{2\pi d^2} \quad (N) \quad (۶-۲۲۱)$$

که در آن، $(d^2 + b_2^2)$ به طور تقریبی با d^2 جایگزین شده‌اند، و m_1 و m_2 به ترتیب اندازه گشتاورهای مغناطیسی سیم بیج‌های ۱ و ۲ هستند:

$$m_1 = N_1 I_1 \pi b_1^2 \quad m_2 = N_2 I_2 \pi b_2^2$$

علامت منفی در معادله (۶-۲۲۱)، خاطر نشان می‌سازد که اگر جریانها در یک جهت عبور نمایند، نیروی $F_{۱۲}$ از نوع جاذبه‌ای خواهد بود. این نیرو متناسب با عکس توان چهارم فاصلهٔ جدائی آنها بسیار سریع به صفر میل می‌نماید.

پرسش‌های دوره‌ای

- ۱-۶. عبارت مربوط به نیروی وارد بر بار آزمونی q که با سرعت u در یک میدان مغناطیسی با چگالی شار B حرکت می‌کند چیست؟
- ۲-۶. تحقیق کنید که تسلا (T)، واحد چگالی شار مغناطیسی، با ولت-ثانیه بر مترمربع ($V \cdot s/m^2$) یکسان است.
- ۳-۶. معادلهٔ نیروی لورنتس را بنویسید.
- ۴-۶. کدام اصل موضوعی مغناطیس ساکن وجود بارهای مغناطیسی مجزا را انکار می‌کند؟
- ۵-۶. قانون بقای شار مغناطیسی را بیان کنید.
- ۶-۶. قانون مداری آمپر را بیان کنید.
- ۷-۶. آیا به هنگام استفاده از قانون مداری آمپر، مسیر انتگرال‌گیری باید دایره‌ای باشد؟ توضیح دهید.
- ۸-۶. چرا میدان B در مورد یک هادی مستقیم بینهایت طولی حامل جریان، نمی‌تواند دارای مؤلفه‌ای در جهت جریان باشد؟
- ۹-۶. آیا فرمول‌های مربوط به B به دست آمده در معادلات (۶-۱۱) و (۶-۱۲) در مورد یک هادی مدور، در مورد هادی با سطح مقطع مربع، با همان مساحت و حامل همان جریان

- قابل استفاده است؟ توضیح دهید.
- ۱۰-۶. د. میدان B در مورد یک رشته بینهایت طویل مستقیم حامل جریان مستقیم I ، چگونه با فاصله تغییر می‌کند؟
- ۱۱-۶. د. آیا میدان مغناطیسی ساکن می‌تواند در یک هادی خوب وجود داشته باشد؟ توضیح دهید.
- ۱۲-۶. د. پتانسیل مغناطیسی برداری A را با کلمات تعریف کنید. واحد SI آن چیست؟
- ۱۳-۶. د. رابطه بین چگالی شار مغناطیسی B و پتانسیل مغناطیسی برداری A چیست؟ وضعیتی را مثال بزنید که B صفر و A مخالف صفر باشد.
- ۱۴-۶. د. رابطه بین پتانسیل مغناطیسی برداری A و شار مغناطیسی گذرنده از یک سطح مفروض چیست؟
- ۱۵-۶. د. قانون بیوساوار را بیان کنید.
- ۱۶-۶. د. مفید بودن قانون مداری آمپر و قانون بیوساوار را در تعیین B در مورد یک مدار حامل جریان، باهم مقایسه کنید.
- ۱۷-۶. د. دوقطبی مغناطیسی چیست؟ گشتاور دوقطبی مغناطیسی را تعریف کنید. واحد SI آن چیست؟
- ۱۸-۶. د. پتانسیل مغناطیسی عددی V_m را تعریف کنید. واحد SI آن چیست؟
- ۱۹-۶. د. مزایای نسبی استفاده از پتانسیل‌های مغناطیسی برداری و عددی را در مغناطیس ساکن، بررسی کنید.
- ۲۰-۶. د. بردار مغناطیس شدگی را تعریف کنید. واحد SI آن چیست؟
- ۲۱-۶. د. منظور از "چگالی‌های جریان مغناطیس شدگی معادل" چیست؟ واحدهای SI مربوط به $\nabla \times M$ و $M \times a_n$ چیست؟
- ۲۲-۶. د. بردار شدت میدان مغناطیسی را تعریف کنید. واحد SI آن چیست؟
- ۲۳-۶. د. چگالی بار مغناطیس شدگی چیست؟ واحد SI مربوط به $M \cdot a_n$ و $\nabla \cdot M$ چیست؟
- ۲۴-۶. د. روشی برای یافتن میدان مغناطیسی خارجی یک آهنربای میله‌ای با چگالی حجمی گشتاور دوقطبی معلوم، بیان کنید.
- ۲۵-۶. د. ضریب حساسیت مغناطیسی و نفوذپذیری نسبی را تعریف کنید. واحدهای SI آنها چه هستند؟
- ۲۶-۶. د. آیا شدت میدان مغناطیسی ناشی از یک توزیع جریان به خواص محیط بستگی دارد؟ چگالی شار مغناطیسی چطور؟
- ۲۷-۶. د. نیروی محرکه مغناطیسی را تعریف کنید. واحد SI آن چیست؟
- ۲۸-۶. د. رلوکتانس یک قطعه از ماده‌ای مغناطیسی با نفوذپذیری μ ، طول l و سطح مقطع ثابت S

- چیست؟ واحد SI آن چیست؟
- ۲۹-۶. د. یک شکاف هوایی در یک هسته چنبره‌ای فرومغناطیسی بریده شده است. این هسته با NI, mmf آمپر-دور تحریک شده است. آیا شدت میدان مغناطیسی در شکاف هوایی از شدت میدان مغناطیسی در هسته بیشتر است یا کمتر؟
- ۳۰-۶. د. مواد دیامغناطیسی، پارامغناطیسی و فرومغناطیسی را تعریف کنید.
- ۳۱-۶. د. حوزه مغناطیسی چیست؟
- ۳۲-۶. د. چگالی شار باقی مانده و شدت میدان وادارنده را تعریف کنید.
- ۳۳-۶. د. تفاوت بین مواد فرومغناطیسی نرم و سخت را مورد بحث قرار دهید.
- ۳۴-۶. د. دمای کوری چیست؟
- ۳۵-۶. د. مشخصات فریت‌ها چه هستند؟
- ۳۶-۶. د. شرایط مرزی میدانهای مغناطیس ساکن در فصل مشترک بین دو محیط مغناطیسی متفاوت چه هستند؟
- ۳۷-۶. د. توضیح دهید چرا خطوط شار مغناطیسی، سطح محیط فرومغناطیسی را به‌طور عمودی ترک می‌کنند.
- ۳۸-۶. د. این بیان را به‌طور کیفی توضیح دهید که H و B در امتداد محور آهن‌ربای میله‌ای استوانه‌ای در جهت‌های مخالف همدیگر هستند.
- ۳۹-۶. د. (الف) اندوکتانس متقابل بین دو مدار، و (ب) اندوکتانس خودی یک سیم‌پیچ تنها را تعریف کنید.
- ۴۰-۶. د. توضیح دهید که چگونه اندوکتانس خودی یک سلف سیم‌پیچی شده به تعداد دورهای آن بستگی دارد.
- ۴۱-۶. د. اگر در مثال ۶-۱۶ هادی خارجی "خیلی نازک" نباشد، جواب همان خواهد بود؟ توضیح دهید.
- ۴۲-۶. د. "شرایط شبه‌ساکن" در الکترومغناطیس چه چیزی را ایجاب می‌کند؟
- ۴۳-۶. د. عبارتی برای انرژی مغناطیسی بر حسب B و/یا H مطرح نمایید.
- ۴۴-۶. د. اثر هال را توضیح دهید.
- ۴۵-۶. د. عبارت انتگرالی مربوط به نیروی وارد بر یک مدار بسته حامل جریان I در میدان مغناطیسی B را بیان کنید.
- ۴۶-۶. د. نخست نیروی خالص و سپس گشتاور خالص مؤثر بر یک مدار حامل جریان، قرار گرفته در میدان مغناطیسی یکنواخت را مورد بحث قرار دهید.
- ۴۷-۶. د. اصلاً، کار، مه‌های $d-c$ را بیان کنید.

د. ۴۸۶ رابطه بین نیرو و انرژی مغناطیسی ذخیره شده در سیستمی از مدارهای حامل جریان تحت شرط پیوند شار ثابت چیست؟ تحت شرایط جریان ثابت چگونه؟

مسائل

۱۶. م. بار نقطه‌ای مثبت q به جرم m ، با سرعت $u_x = a_y u_y$ به ناحیه $z > 0$ که در آن میدان مغناطیسی یکنواخت $B = a_z B_0$ وجود دارد، داخل می‌شود. معادله حرکت بار را به دست آورده، و مسیر حرکت بار را توصیف نمایید.

۲۶. م. یک الکترون با سرعت $u_x = a_y u_y$ به ناحیه‌ای داخل می‌شود که در آن هم میدان الکتریکی E و هم میدان مغناطیسی B وجود دارد. حرکت الکترون را در حالات زیر توصیف نمایید.

الف) $E = a_z E_0$ و $B = a_z B_0$

ب) $E = -a_z E_0$ و $B = -a_z B_0$

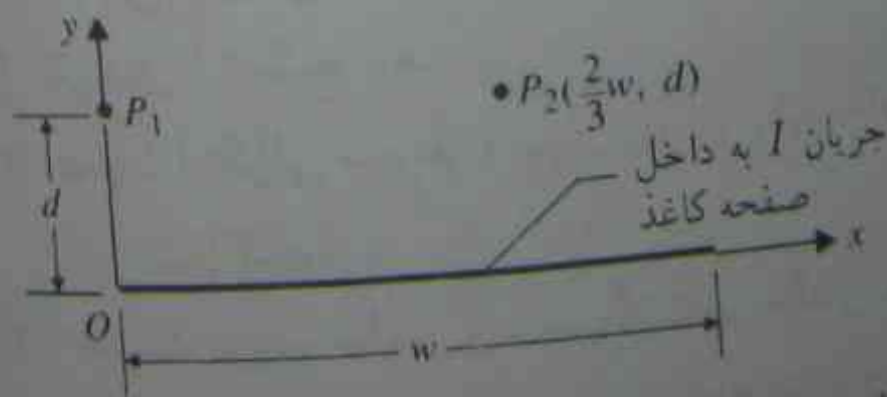
تأثیر اندازه‌های نسبی E و B را بر مسیرهای الکترون در حالات (الف) و (ب) مورد بحث قرار دهید.

۳۶. م. جریان I از هادی داخلی یک خط هم‌محور بینهایت طویل گذشته و از طریق هادی بیرونی برمی‌گردد. شعاع هادی داخلی a و شعاعهای داخلی و خارجی هادی بیرون به ترتیب b و c است. چگالی شار مغناطیسی B را در تمام نواحی پیدا کنید و $|B|$ را بر حسب r رسم نمایید.

۴۶. م. جریان I به صورت طولی از یک ورقه هادی نازک بسیار طویل به پهنای w مطابق شکل ۲۵-۶ می‌گذرد.

الف) با فرض اینکه جریان به صفحه کاغذ داخل می‌شود، چگالی شار مغناطیسی B_1 را در نقطه $P_1(0, d)$ تعیین کنید.

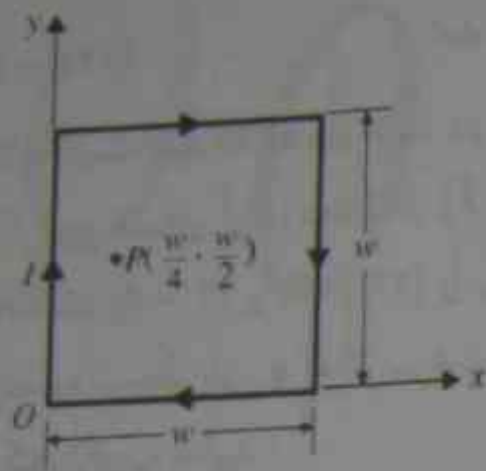
ب) با استفاده از نتیجه قسمت (الف)، چگالی شار مغناطیسی B_2 را در نقطه $P_2(\frac{2}{3}w, d)$ بیابید.



شکل ۲۵-۶ یک ورقه هادی نازک حامل جریان I (مسئله م. ۴-۶)

مسائل

۵۶. م. جریان I مطابق شکل ۳۶-۶ از یک حلقه مربعی $w \times w$ می‌گذرد. چگالی شار مغناطیسی را در نقطه غیرمرکزی $P(w/4, w/2)$ بیابید.



شکل ۳۶-۶ یک حلقه مربعی حامل جریان I (مسئله م. ۵-۶)

۶۶. م. شکل ۶-۳۷ یک سلونوئید بینهایت طویل را با هسته هوایی که دارای n دور سیم‌پیچ به هم فشردده در واحد طول است، نشان می‌دهد. سیم‌پیچها به صورت مایل با زاویه α بوده و جریان عبورکننده از آن I است. چگالی شار مغناطیسی را هم در درون و هم در بیرون سلونوئید تعیین نمایید.



شکل ۳۷-۶ یک سلونوئید طویل با سیم‌پیچ به هم فشردده حامل جریان I (مسئله م. ۶-۶)

۷۶. م. چگالی شار مغناطیسی را در نقطه‌ای روی محور یک سلونوئید با شعاع b و طول L در حالی که جریان I در N دور سیم‌پیچ به هم فشردده آن برقرار است، تعیین نمایید. نشان دهید که اگر L به سمت بینهایت میل کند، نتیجه به معادله (۶-۱۴) ساده خواهد شد.

۸۶. م با شروع از عبارت مربوط به پتانسیل مغناطیسی برداری A در معادله (۶-۲۳)، ثابت کنید که

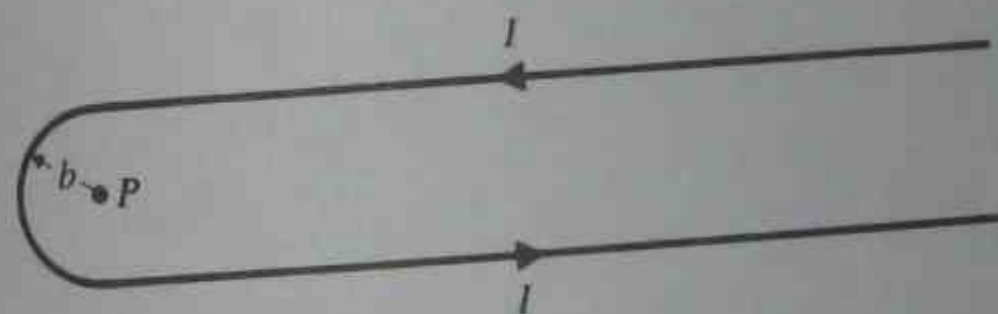
$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{J \times a_R}{R^2} dv' \quad (۶-۲۲۲)$$

بعلاوه ثابت کنید که B داده شده در معادله (۶-۲۲۲) اصول موضوعی اساسی مغناطیس ساکن در فضای آزاد، معادلات (۶-۶) و (۶-۷) را برآورده می سازد.

۹۶. م معادلات (۶-۴) و (۶-۲۲) را برای به دست آوردن فرمولی برای نیروی مغناطیسی $F_{۱۲}$ وارد شده توسط بار q_1 که با سرعت u_1 حرکت می کند، بر بار q_2 که با سرعت u_2 حرکت می کند ترکیب نمایید.

۱۰۶. م یک نوار هادی نازک بسیار طویل به پهنای w ، در صفحه xz ، بین $x = \pm w/2$ قرار دارد. جریان سطحی $J_s = a_z J_0$ از نوار می گذرد. چگالی شار مغناطیسی را در یک نقطه دلخواه بیرون نوار بیابید.

۱۱۶. م یک سیم طویل حامل جریان I ، مطابق شکل ۶-۳۸، با یک انحنای نیم دایره ای به شعاع b خم شده است. چگالی شار مغناطیسی را در نقطه مرکزی انحنا، P ، تعیین کنید.



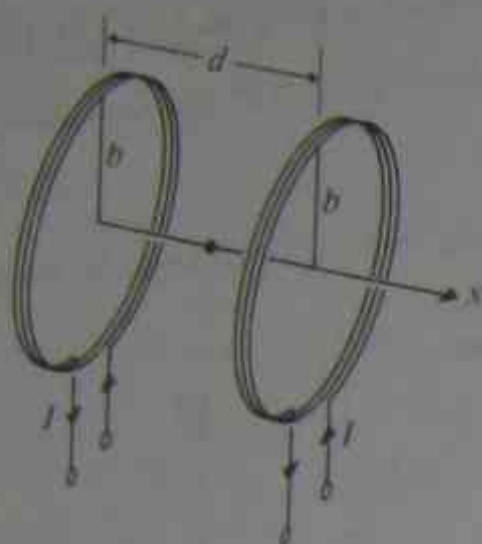
شکل ۶-۳۸ یک سیم بسیار طویل با انحنای نیم دایره ای (مسئله ۶-۱۱)

۱۲۶. م دو سیم پیچ مشابه هم محور، هریک دارای N دور و شعاع b ، مطابق شکل ۶-۳۹ در فاصله d از یکدیگر قرار دارند. جریان I ، با جهت یکسانی از هر دو سیم پیچ می گذرد. الف) چگالی شار مغناطیسی $B = a_z B_z$ را در نقطه بین دو سیم پیچ و به فاصله یکسان از هر دو پیدا کنید.

ب) نشان دهید که dB_z/dx در نقطه فوق صفر است.

پ) رابطه بین b و d را چنان بیابید که $d^2 B_z/dx^2$ نیز در نقطه میانی فوق صفر شود.

از این جفت سیم پیچ برای بدست آوردن میدان مغناطیسی تقریباً یکنواخت در ناحیه میانی استفاده می شود و آنها را سیم پیچهای هلمهولتز می نامند.



شکل ۶-۳۹ سیم پیچهای هلمهولتز (مسئله ۶-۱۲)

۱۳۶. م یک سیم نازک هادی به شکل N ضلعی منظم خم شده است. جریان I از سیم می گذرد. نشان دهید که چگالی شار مغناطیسی در مرکز آن به صورت

$$B = a_n \frac{\mu_0 N I}{2\pi b} \tan \frac{\pi}{N}$$

است که در آن b شعاع دایره محیطی چند ضلعی و a_n بردار واحد عمود بر سطح چند ضلعی است. همچنین نشان دهید که اگر N خیلی بزرگ شود، این نتیجه به معادله (۶-۳۸) با $z = 0$ ساده می شود.

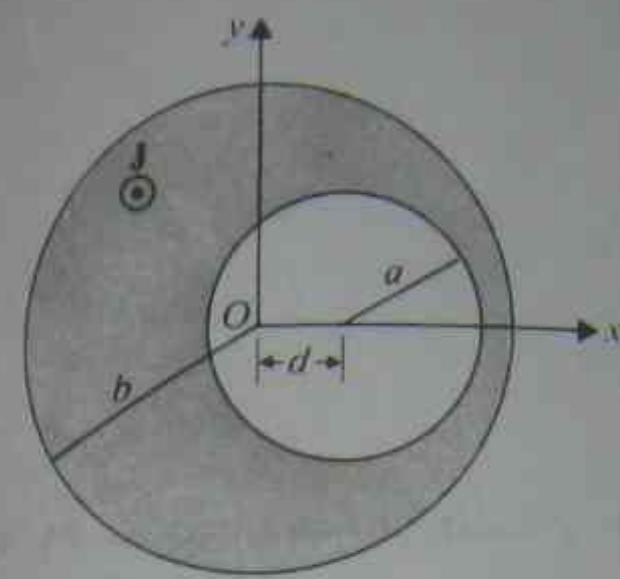
۱۴۶. م شار مغناطیسی کل گذرنده از یک چنبره مدور یا سطح مقطع مستطیلی به ارتفاع h را بیابید. شعاعهای داخلی و خارجی چنبره به ترتیب a و b هستند. جریان I از دور سیم پیچ به هم فشرده روی چنبره می گذرد. اگر بخواهیم شار را با ضرب سطح مقطع در چگالی شار بازاء شعاع متوسط به دست آوریم، درصد خطای حاصل را تعیین کنید.

۱۵۶. م در آزمایشهای معینی لازم می شود که ناحیه ای با چگالی شار مغناطیسی ثابت در دسترس باشد. این ناحیه را می توان در داخل حفره استوانه ای خارج از مرکزی که در یک هادی استوانه ای بسیار طویل، حامل یک چگالی جریان یکنواخت، ایجاد شده است، به وجود آورد. به سطح مقطع شکل ۶-۴۰ مراجعه کنید. چگالی جریان محوری یکنواخت برابر $J = a_z J_0$ است. اندازه و جهت B را در حفره استوانه ای که محور آن در فاصله d از محور ناحیه هادی قرار دارد پیدا کنید. (راهنمایی: از اصل جمع آثار استفاده کرده و B در حفره و ناشی از دو هادی استوانه ای طویل با شعاعهای a و b و چگالی های جریان، به ترتیب J و $-J$ در نظر بگیرید.)

ثابت کنید: ۱۶۶. م

الف) اگر مختصات کارتزین به کار رود، معادله (۶-۱۸) در مورد لاپلاسین یک میدان برداری صادق است.

ب) اگر مختصات استوانه ای به کار رود، $\nabla^2 A \neq a_r \nabla^2 A_r + a_\phi \nabla^2 A_\phi + a_z \nabla^2 A_z$



شکل ۴۰-۶ مقطع عرضی یک هادی استوانه‌ای طویل با یک حفره (مسئله ۶-۱۵)

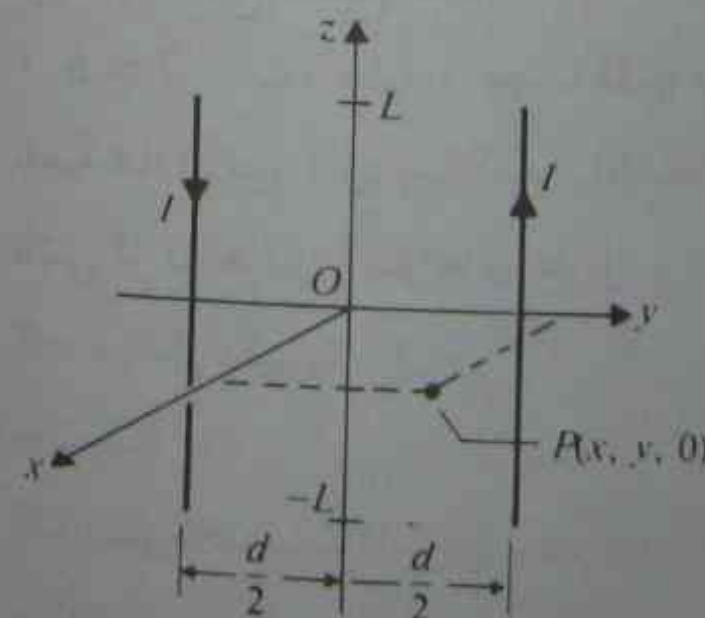
۱۷-۶-۱۰ چگالی شار مغناطیسی B در مورد یک هادی استوانه‌ای بی‌نهایت طویل در مثال ۶-۱ به دست آمد. با استفاده از رابطه $B = \nabla \times A$ پتانسیل مغناطیسی برداری A را در داخل و خارج هادی تعیین نمایید.

۱۸-۶-۱۰ با شروع از عبارت A در معادله (۶-۲۴) در مورد پتانسیل مغناطیسی برداری در نقطه‌ای واقع در صفحه منصف یک سیم مستقیم به طول $2L$ ، که جریان I را حمل می‌نماید:

الف) A را در نقطه $P(x, y, 0)$ در صفحه منصف دو سیم موازی هریک به طول $2L$ واقع در $y = \pm d/2$ و حامل جریانهای مساوی و مختلف‌الجهت، مطابق شکل ۶-۴۱ بیابید. ب) A ناشی از جریانهای مساوی و مختلف‌الجهت یک خط انتقال دوسیمه بسیار طویل را پیدا کنید.

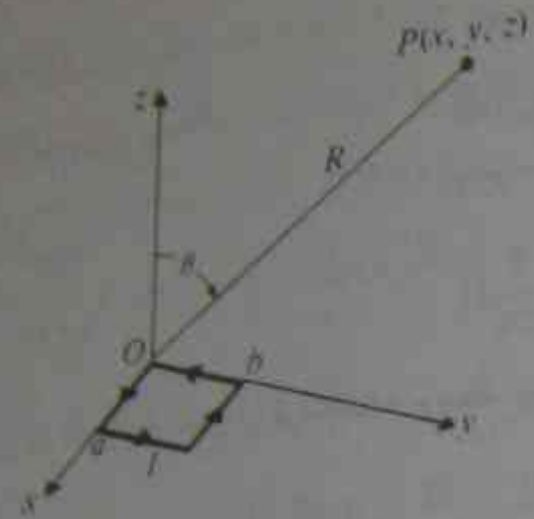
پ) B را از روی A در بند (ب)، بیابید و درستی جواب خود را با نتیجه به دست آمده از بکارگیری قانون مدار آمپر بررسی نمایید.

ت) معادله خطوط شار مغناطیسی در صفحه xy را پیدا کنید.



شکل ۴۱-۶ سیم‌های موازی حامل جریانهای مساوی و مختلف‌الجهت (مسئله ۶-۱۸)

۱۹-۶-۱۰ در مورد حلقه مستطیلی کوچک شکل ۶-۲۲، با اضلاع a و b و حامل جریان I :
الف) پتانسیل مغناطیسی برداری A را در نقاط دور دست $P(x, y, z)$ پیدا کنید. نشان دهید که آن را می‌توان به شکل معادله (۶-۲۵) درآورد.
ب) چگالی شار مغناطیسی B را از روی A تعیین نموده و نشان دهید که همان رابطه داده شده در معادله (۶-۴۸) است.



شکل ۴۲-۶ یک حلقه مستطیل شکل کوچک حامل جریان I (مسئله ۶-۱۹)

۲۰-۶-۲۰ در مورد میدان برداری F با مشتقات اول پیوسته، ثابت کنید

$$\int_V (\nabla \times F) dv = - \oint_S F \times ds$$

۲۰-۶-۲۰ در مورد میدان برداری F با مشتقات اول پیوسته، ثابت کنید

$$\int_V (\nabla \times F) dv = - \oint_S F \times ds$$

که در آن S ، سطح در برگیرنده حجم V است. (راهنمایی: قضیه دیورژانس را در مورد $(F \times C)$ به کار ببرید، که در آن C یک بردار ثابت است.)

۲۱-۶-۲۱ یک قطعه بسیار بزرگ از ماده‌ای به ضخامت d ، به‌طور عمود بر میدان مغناطیسی بکنواختی با شدت $H_0 = a_z H_0$ قرار گرفته است. با صرف نظر کردن از اثرات لبه‌ای، شدت میدان مغناطیسی را در قطعه پیدا کنید:

الف) اگر ماده قطعه، دارای نفوذپذیری μ باشد،

ب) اگر قطعه، یک آهنربای دائم با بردار مغناطیس شدگی $M_i = a_z M_i$ باشد.

۲۲-۶-۲۲ یک میله با مقطع دایره‌ای از ماده‌ای مغناطیسی با نفوذپذیری μ ، به‌طور هم‌محور در سلونوئید طویل شکل ۶-۴ قرار داده شده است. شعاع میله a ، از شعاع داخلی سلونوئید b ، کوچکتر است. سیم بیخ سلونوئید دارای n دور در واحد طول بوده و حامل جریان I می‌باشد.

الف) مقادیر B ، H و M را در داخل سلونوئید برای $r < a$ و $a < r < b$ پیدا کنید.

ب) چگالی‌های جریان مغناطیس‌شدگی معادل J_m و J_{ms} در میله مغناطیس شده چه هستند؟

۲۳-۶. م. پتانسیل مغناطیسی عددی V_m ناشی از یک حلقه جریان را می توان نخست با تقسیم سطح حلقه به حلقه های بسیار کوچک و سپس جمع اثرات این حلقه های کوچک (دوقطبی های مغناطیسی) به دست آورد؛ یعنی:

$$V_m = \int dV_m = \int \frac{dm \cdot a_R}{4\pi R^2} \quad (۲۲۳-۶ \text{ الف})$$

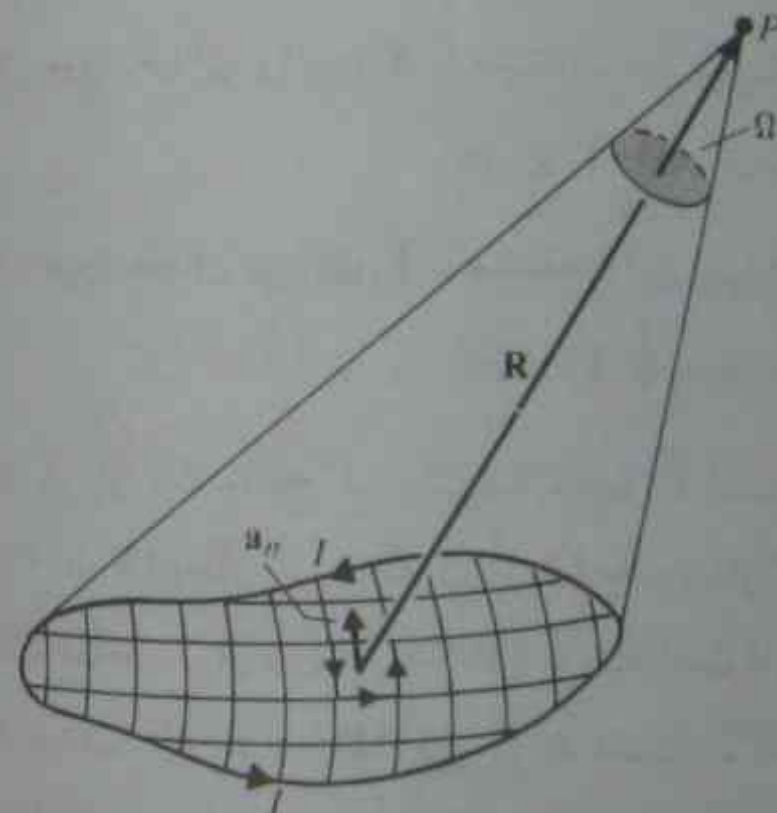
که در آن،

$$dm = a_n I ds \quad (۲۲۳-۶ \text{ ب})$$

ثابت کنید:

$$V_m = \frac{I}{4\pi} \Omega \quad (۲۲۴-۶)$$

که در آن Ω زاویه کنج فراگرفته شده توسط سطح حلقه در نقطه P است (شکل ۶-۲۳ را ببینید).



شکل ۶-۲۳ حلقه جریان تقسیم بندی شده برای تعیین پتانسیل مغناطیسی عددی (مسئله ۶-۲۳)

۲۴-۶. م. با استفاده از معادله (۲۲۴-۶):

الف) پتانسیل مغناطیسی عددی را در نقطه ای روی محور یک حلقه دایره ای به شعاع b و حامل جریان I تعیین کنید.

ب) چگالی شار مغناطیسی B را از روی $-\mu \cdot \nabla V_m$ به دست آورده و نتیجه را با معادله (۲۸-۶) مقایسه کنید.

۲۵-۶. م. با استفاده از مفهوم چگالی جریان مغناطیسی شدگی معادل، مسئله آهنربای میله ای استوانه ای

۲۶-۶. م. کرده ای فرومغناطیسی به شعاع b به طور بکثرت با مغناطیس شدگی $M = a_n M_0$ آهنربا شده است.

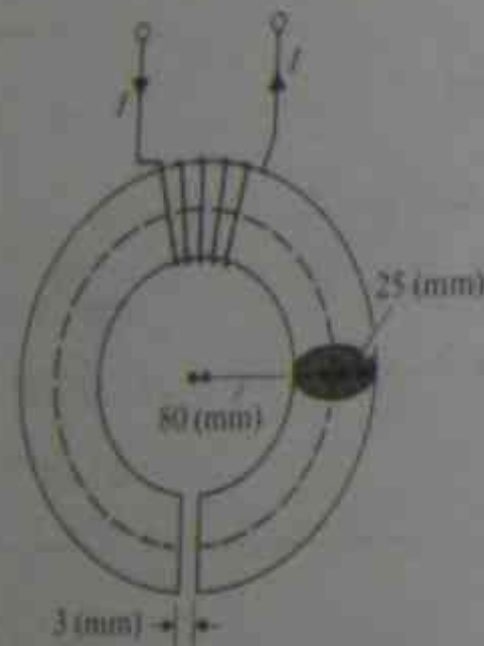
الف) چگالی های جریان مغناطیسی شدگی معادل J_m و J_{ms} را تعیین کنید.
ب) چگالی شار مغناطیسی را در مرکز کره تعیین نمایید.

۲۷-۶. م. یک هسته آهنی چنبره ای با نفوذپذیری نسبی ۳۰۰۰، شعاع متوسطی برابر $R = 80$ (mm) و مقطع عرضی دایره ای به شعاع $b = 25$ (mm) دارد. یک شکاف هوایی $l_g = 3$ (mm) نیز وجود داشته و به منظور تولید شار مغناطیسی 10^{-4} (Wb) جریان I در ۵۰۰ دور سیم پیچ می گذرد. (شکل ۶-۴۴ را ببینید). با صرف نظر کردن از اثرات نشتی و با استفاده از طول مسیر متوسط، مطلوب است

الف) رلوکتانس شکاف هوایی و هسته آهنی.

ب) H_g و B_g در شکاف هوایی و H_c و B_c در هسته آهنی.

پ) جریان لازم I .



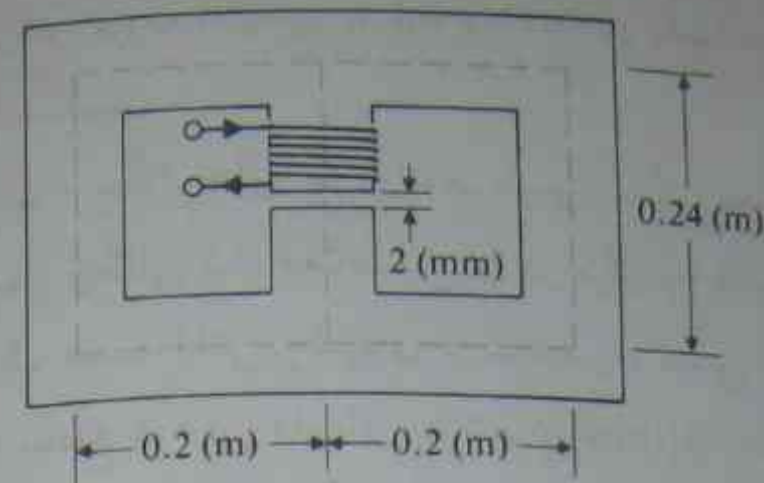
شکل ۶-۴۴ یک هسته آهنی چنبره ای با شکاف هوایی (مسئله ۶-۲۷)

۲۸-۶. م. مدار مغناطیسی شکل ۶-۴۵ را در نظر بگیرید. جریان I از ۲۰۰ دور سیم با زوی مرکزی می گذرد. با فرض اینکه سطح مقطع هسته ثابت و برابر 10^{-2} (m²) و نفوذپذیری نسبی آن ۵۰۰۰ باشد:

الف) شار مغناطیسی در هر بازو را تعیین کنید.

ب) شدت میدان مغناطیسی را در هر بازوی هسته و در شکاف هوایی تعیین نمایید.

۲۹-۶. م. یک سلونوئید بینهایت طویل با n دور در واحد طول به دور یک هسته فرومغناطیسی به سطح مقطع S را در نظر بگیرید. وقتی جریانی به منظور تولید یک میدان مغناطیسی به داخل



شکل ۴۵-۶ یک مدار مغناطیسی با شکاف هوایی (مسئله م. ۶-۲۸)

سیم پیچ فرستاده می شود، ولتاژی برابر $v_1 = -nd\Phi/dt$ در واحد طول آن القا می شود که با تغییرات جریان مخالفت می کند. برای غلبه بر این ولتاژ القائی و افزایش جریان تا I ، توان $P_1 = -v_1 I$ در واحد طول باید تأمین شود. (الف) ثابت کنید، کار لازم در واحد حجم، برای تولید چگالی شار مغناطیسی نهائی B_f برابر است با

$$W_v = \int_0^{B_f} H dB \quad (۲۲۵-۶)$$

(ب) با فرض اینکه جریان به صورت متناوب چنان تغییر می کند که B از B_f به $-B_f$ کاهش یافته و سپس دوباره به B_f افزایش می یابد، ثابت کنید که کار انجام شده در واحد حجم در مورد این چرخه تغییرات در هسته فرومغناطیسی با سطح حلقه هیستریزس ماده هسته مشخص می شود.

۳۰-۶. م ثابت کنید که در فصل مشترک بین دو محیط رابطه $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ به معادله (۶-۱۱۱) منجر می شود.

۳۱-۶. م در فصل مشترک بین دو محیط مغناطیسی متفاوت، بتانسیل مغناطیسی عددی V_m چه شرایط مرزی را باید برآورده نماید؟

۳۲-۶. م مرز مسطحی را (در $\theta = 0$) بین هوا (ناحیه ۱، $\mu_{r1} = 1$) و آهن (ناحیه ۲، $\mu_{r2} = 5000$) در نظر بگیرید.

(الف) با فرض $B_1 = a_x 0.5 - a_y 10$ (mT) و زاویه ای که B_2 با فصل مشترک می سازد، را پیدا کنید.

(ب) با فرض $B_1 = a_x 10 + a_y 0.5$ (mT) و زاویه ای که B_2 با امتداد عمود بر فصل مشترک می سازد، را بیابید.

۳۳-۶. م در مسائل مغناطیس ساکن معینی نیز می توان روش تصاویر را اعمال نمود. یک هادی مستقیم نازک در هوا، به موازات و در فاصله d ، بالای فصل مشترک سطح ماده ای مغناطیسی با

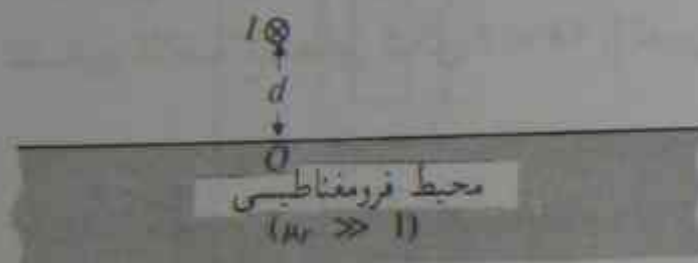
نفوذپذیری نسبی μ_r را در نظر بگیرید. جریان I از هادی می گذرد. (الف) نشان دهید که تمام شرایط مرزی برآورده می شوند، اگر (۱) میدان مغناطیسی در هوا با استفاده از I و جریان تصویری I_i محاسبه شود و این جریانه ها هم فاصله از فصل مشترک بوده و در هوا قرار دارند.

$$I_i = \left(\frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \right) I$$

(۲) میدان مغناطیسی پایین صفحه مرزی با استفاده از I و $-I_i$ به طوری که هر دو جریان در همان محل قرار گیرند، محاسبه می شود. این جریانه ها در ماده مغناطیسی بینهایت با نفوذپذیری نسبی μ_r قرار گرفته اند.

(ب) در مورد یک هادی طویل حامل جریان I و به ازای $\mu_r \gg 1$ ، چگالی شار مغناطیسی B را در نقطه P مطابق شکل ۴۶-۶ تعیین کنید.

• P(x, y)



شکل ۴۶-۶ یک هادی حامل جریان در نزدیکی یک محیط فرومغناطیسی (مسئله م. ۶-۳۳)

۳۴-۶. م یک هادی بسیار طویل در فضای آزاد، حامل جریان I بوده و به موازات و در فاصله d از یک فصل مشترک صفحه ای بینهایت با یک محیط است.

(الف) رفتار مؤلفه های عمودی و مماسی \mathbf{B} و \mathbf{H} را در فصل مشترک مورد بحث قرار دهید: (۱) اگر محیط هادی کامل باشد؛

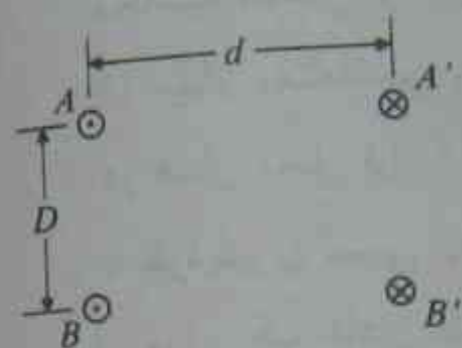
(۲) اگر محیط نفوذپذیر کامل باشد؛

(ب) برای دو مورد قسمت (الف)، شدت میدان مغناطیسی \mathbf{H} را در یک نقطه دلخواه فضای آزاد بیابید و آنها را باهم مقایسه کنید.

(پ) در دو مورد مطرح شده، چگالی های جریان سطحی را در فصل مشترک، در صورت وجود تعیین کنید.

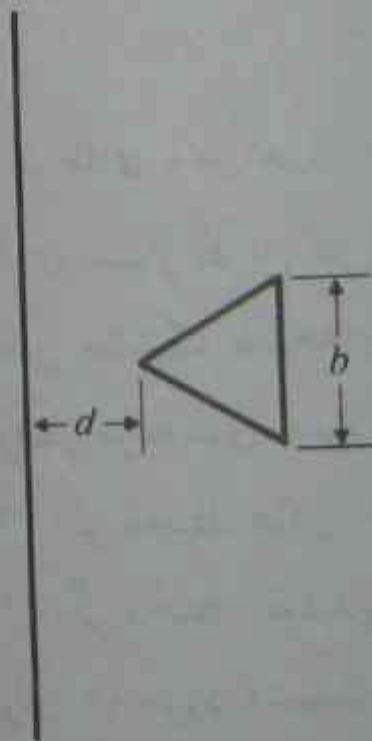
۳۵-۶. م اندوکتانس خودی یک سیم پیچ چنبره ای متشکل از N دور سیم که روی یک قاب هوایی به شعاع متوسط r ، و مقطع عرضی دایره ای به شعاع b پیچیده شده است را تعیین کنید. با فرض $b \ll r$ ، عبارت تقریبی اندوکتانس خودی را به دست آورید.

۳۶۶. م به مثال ۶-۱۶ مراجعه کنید. با فرض این که هادی خارجی خیلی نازک نبوده و دارای ضخامت d باشد، اندوکتانس در واحد طول خط انتقال هم محور هوائی را تعیین کنید.
 ۳۷۶. م اندوکتانس متقابل در واحد طول بین دو خط انتقال دو سیم موازی $A-A'$ و $B-B'$ را که مطابق شکل ۶-۴۷ در فاصله D از یکدیگر قرار گرفته اند، محاسبه نمایید. فرض کنید که شعاع سیم بسیار کوچکتر از D و فاصله بین سیم ها، d است.



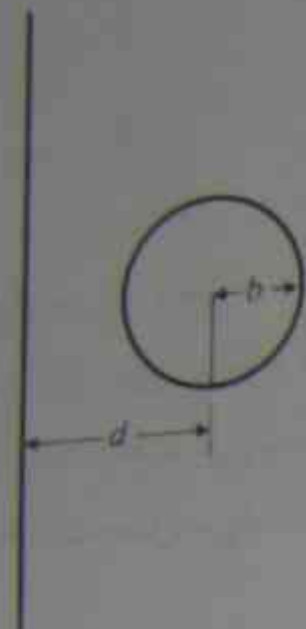
شکل ۶-۴۷ خطوط انتقال دو سیم تزویج شده (مسئله م. ۶-۳۷)

۳۸۶. م اندوکتانس متقابل بین یک سیم مستقیم بسیار طولی و یک حلقه هادی به شکل مثلث متساوی الاضلاع مطابق شکل ۶-۴۸ را تعیین کنید.

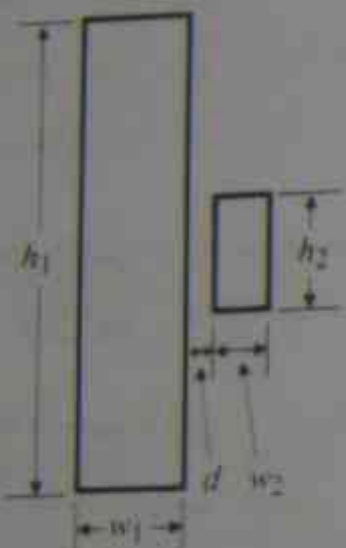


شکل ۶-۴۸ یک سیم مستقیم طولی و یک حلقه هادی به شکل مثلث متساوی الاضلاع (مسئله م. ۶-۳۸)
 ۳۹۶. م اندوکتانس متقابل بین یک سیم مستقیم بسیار طولی و یک حلقه هادی دایره ای مطابق شکل ۶-۴۹ را تعیین کنید.

۴۰۶. م اندوکتانس متقابل بین دو حلقه مستطیلی هم صفحه، با اضلاع موازی مطابق شکل ۶-۵۰ را بیابید. فرض کنید $h_1 \gg h_2$ ($h_2 > w_2 > d$)



شکل ۶-۴۹ یک سیم مستقیم طولی و یک حلقه هادی دایره ای (مسئله م. ۶-۳۹)

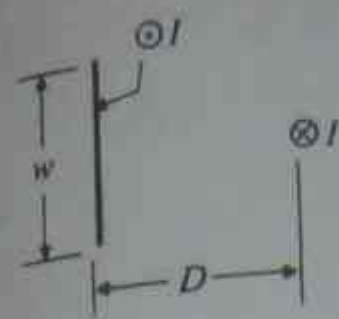


شکل ۶-۵۰ دو حلقه مستطیلی هم صفحه با فرض $h_1 \gg h_2$ (مسئله م. ۶-۴۰)

۴۱۶. م دو مدار تزویج شده به ترتیب با اندوکتانس های خودی L_1 و L_2 و حامل جریانهای I_1 و I_2 را در نظر بگیرید. اندوکتانس متقابل بین مدارها M است.
 الف) با استفاده از معادله (۶-۱۶۱)، نسبت I_1/I_2 را چنان پیدا کنید که انرژی مغناطیسی ذخیره شده W_p را به حداقل برساند.
 ب) نشان دهید که $M \leq \sqrt{L_1 L_2}$.

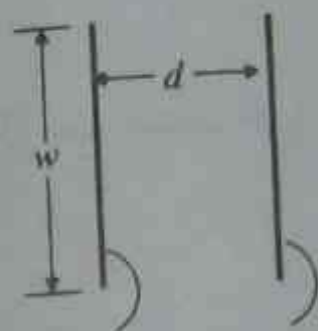
۴۲۶. م نیروی وارد بر واحد طول هریک از سه سیم موازی بینهایت طولی هم فاصله را، که در فاصله $0.15(m)$ از یکدیگر واقع بوده و هریک جریان $25(A)$ را در جهت یکسان حمل می کنند محاسبه نمایید. جهت نیرو را مشخص کنید.

۴۳۶. م مقطع عرضی یک نوار فلزی باریک طولی و یک سیم موازی با آن، در شکل ۶-۵۱ نشان داده شده است. جریانهای مساوی و مخالف جهت I در هادی ها برقرار است. نیروی وارد بر واحد طول هادی ها را بیابید.



شکل ۵۱-۶ مقطع عرضی نوار و سیم هادی موازی (مسئله ۴۳-۶)

۴۴-۶. نیرو در واحد طول میان دو نوار هادی باریک و طویل موازی، با پهنای یکسان w را تعیین کنید. نوارها در فاصله d از یکدیگر قرار دارند و جریانهای I_1 و I_2 را مطابق شکل ۵۲-۶ در جهات مخالف حمل می‌کنند.

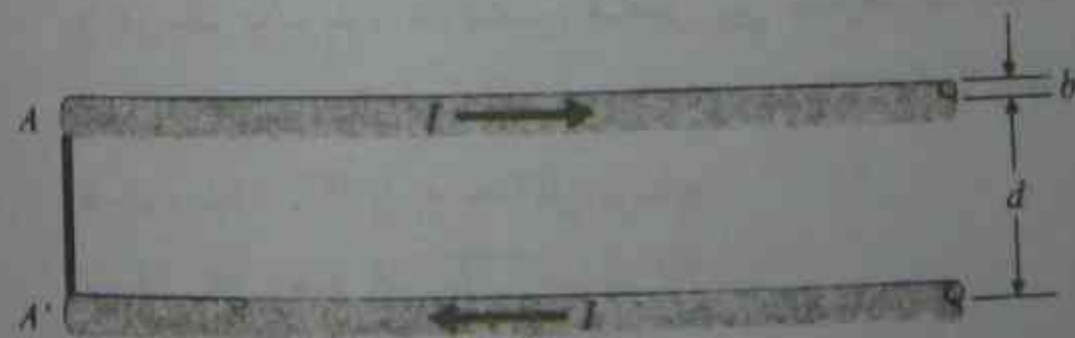


جریان I_2 به خارج کاغذ، جریان I_1 به داخل کاغذ

شکل ۵۲-۶ مقطع عرضی دو نوار موازی حامل جریانهای مخالف (مسئله ۴۴-۶)

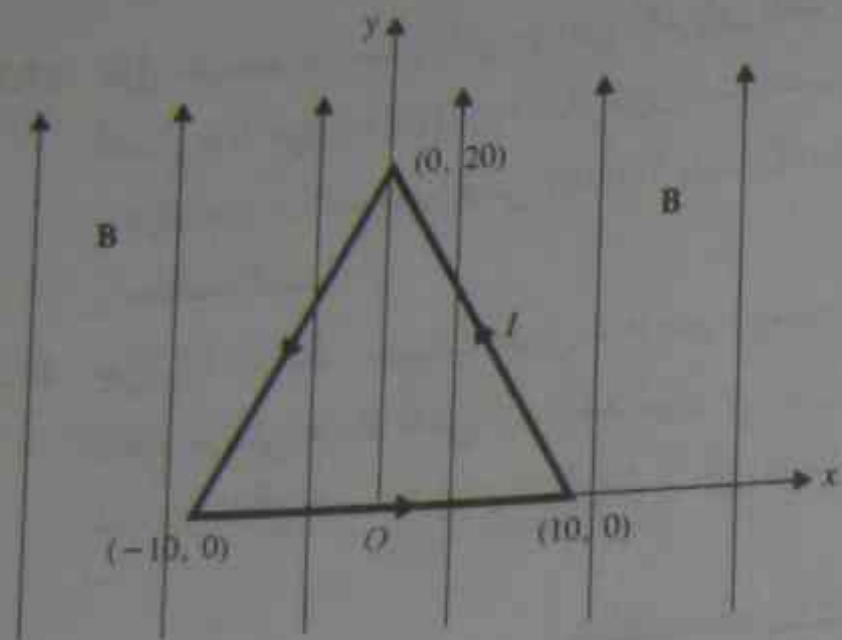
۴۵-۶. به مسئله ۳۹-۶ و شکل ۴۹-۶ مراجعه کنید. نیروی وارد بر حلقه دایره‌ای، که توسط میدان مغناطیسی ناشی از جریان رو به بالای I_1 در سیم مستقیم طویل، وارد می‌گردد را پیدا کنید. حلقه دایره‌ای، جریان I_2 را در خلاف جهت عقربه‌های ساعت حمل می‌کند.

۴۶-۶. میله AA' در شکل ۵۳-۶، به عنوان یک مسیر هادی برای جریان I در دو خط موازی بسیار طویل به کار می‌رود (مثل تیغه یک مدارشکن). شعاع خطوط، b و فاصله آنها d است. جهت و اندازه نیروی مغناطیسی وارد بر میله را پیدا کنید.



شکل ۵۳-۶ نیروی وارد بر میله هادی انتهایی (مسئله ۴۶-۶)

۴۷-۶. جریان $I = 10(A)$ ، $d = c$ در حلقه مثلثی واقع در صفحه xy ، مطابق شکل ۵۴-۶ برقرار است. با فرض چگالی شار مغناطیسی یکنواخت $B = a_y 0.5(T)$ در این ناحیه، نیروها و گشتاور اعمال شده به حلقه را پیدا کنید. ابعاد بر حسب (cm) هستند.



شکل ۵۴-۶ یک حلقه مثلثی در میدان مغناطیسی یکنواخت (مسئله ۴۷-۶)

۴۸-۶. یک انتهای یک خط انتقال طویل هم‌محور با هسته هوایی، دارای هادی درونی به شعاع a و هادی بیرونی به شعاع b ، توسط یک واشر هادی نازک محکم چسبیده، اتصال کوتاه شده است. اگر جریان I از این خط عبور نماید، اندازه و جهت نیروهای مغناطیسی وارده بر واشر را بیابید.

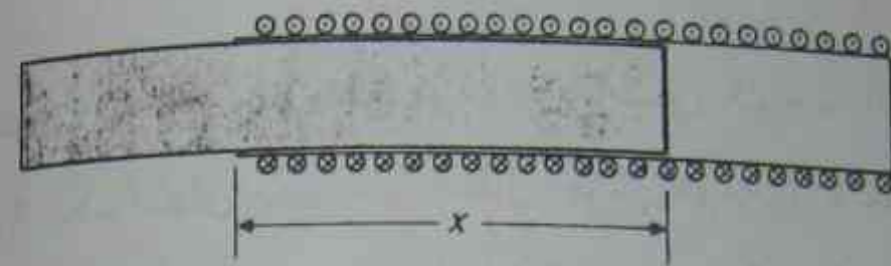
۴۹-۶. فرض کنید حلقه دایره‌ای مسئله ۴۵-۶ حول محور افقی خود به قدر زاویه α بچرخد، گشتاور وارد بر حلقه دایره‌ای را بیابید.

۵۰-۶. یک دور سیم دایره‌ای کوچک به شعاع r_1 که جریان دائم I_1 را حمل می‌کند، در مرکز یک دور سیم دایره‌ای بسیار بزرگ به شعاع r_2 ($r_2 \gg r_1$) که جریان دائم I_2 را در همان جهت حمل می‌کند، قرار گرفته است. زاویه بین امتدادهای عمود بر دو مدار θ است و سیم دایره‌ای کوچک می‌تواند آزادانه حول قطر خود دوران کند. اندازه و جهت گشتاور وارد بر سیم دایره‌ای کوچک را تعیین کنید.

۵۱-۶. یک سوزن مغناطیس شده قطب‌نما هم‌امتداد با میدان مغناطیسی زمین قرار می‌گیرد. یک آهنربای میله‌ای کوچک (دوقطبی مغناطیسی) با گشتاور مغناطیسی $2(A \cdot m^2)$ در فاصله $0.15(m)$ از مرکز سوزن قطب‌نما قرار گرفته است. با فرض اینکه چگالی شار مغناطیسی زمین در محل سوزن $0.1(mT)$ باشد، حداکثر زاویه‌ای را پیدا کنید که در آن، آهنربای میله‌ای می‌تواند باعث انحراف سوزن از جهت شمال-جنوب شود. جهت آهنربای میله‌ای باید چگونه باشد؟

۵۲-۶. م طول متوسط کل مسیر شار در آهن آهنربای الکتریکی شکل ۶-۳۳، $3(m)$ و مساحت اتصال میله طوقی $0.01(m^2)$ اندازه‌گیری شده است. با فرض اینکه نفوذپذیری آهن 4000μ و هرکدام از شکاف‌های هوایی $2(mm)$ باشد، لازم برای بلندکردن جرم کل $100(kg)$ را محاسبه کنید.

۵۳-۶. م جریان I از یک سلونوئید طویل با n دور سیم‌پیچ فشرده در واحد طول می‌گذرد. سطح مقطع عرضی هسته آهنی آن با نفوذپذیری μ برابر S است. اگر هسته به محل نشان داده شده در شکل ۶-۵۵ بیرون کشیده شود، نیروی مؤثر بر آن را تعیین نمایید.



شکل ۶-۵۵ یک سلونوئید طویل در حالی که هسته آهنی آن قدری بیرون کشیده شده است (مسئله ۶-۵۳)



میدانهای متغیر با زمان و معادلات ماکسول

۱-۷ مقدمه

به منظور بنا نهادن مدل الکتریسیته ساکن، بردار شدت میدان الکتریکی E و بردار چگالی شار الکتریکی (جابجائی الکتریکی) D را تعریف کردیم. معادلات دیفرانسیل اصلی حاکم عبارتند از

$$\nabla \times E = 0 \quad (۵-۳)$$

$$\nabla \cdot D = \rho \quad (۹۸-۳)$$

در محیط‌های خطی و هم‌سویکسان (نه لزوماً همگن)، E و D توسط معادله اساسی زیر به هم ارتباط می‌یابند

$$D = \epsilon E \quad (۱۰۲-۳)$$

در مدل مغناطیس ساکن، بردار چگالی شار مغناطیسی B و بردار شدت میدان مغناطیسی H را تعریف کردیم. معادلات دیفرانسیل اصلی حاکم عبارتند از

$$\nabla \cdot B = 0 \quad (۶-۶)$$

$$\nabla \times H = J \quad (۷۶-۶)$$

جدول ۱-۷ روابط اصلی مدل‌های الکترومغناطیسی ساکن و مغناطیسی ساکن

روابط اصلی	مدل الکترومغناطیسی ساکن	مدل مغناطیسی ساکن
معادلات حاکم	$\nabla \times \mathbf{E} = 0$	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
روابط اساسی (محیط‌های خطی و هم‌سو یکسان)	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$	$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$
	$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$	$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B}$

رابطه اساسی بین \mathbf{H} و \mathbf{B} در محیط‌های هم‌سو یکسان عبارت است از

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B} \quad (۶-۸۰ ب)$$

این روابط اساسی را در جدول ۱-۷ خلاصه نموده‌ایم.

ملاحظه می‌کنیم که در حالت ساکن (تغییر ناپذیر با زمان)، بردارهای میدان الکترومغناطیسی \mathbf{E} و \mathbf{D} و بردارهای میدان مغناطیسی \mathbf{B} و \mathbf{H} جفت‌های جداگانه و مجزا از هم را تشکیل می‌دهند. به عبارت دیگر، \mathbf{E} و \mathbf{D} در مدل الکترومغناطیسی ساکن، به \mathbf{B} و \mathbf{H} در مدل مغناطیسی ساکن مرتبط نیستند. در یک محیط هادی، میدانهای الکترومغناطیسی ساکن می‌توانند هردو موجود باشند و تشکیل یک میدان الکترومغناطیسی ساکن دهند. (عبارت بعد از مثال ۲-۵ را در صفحه ۲۵۶ ببینید). میدان الکترومغناطیسی ساکن در محیط هادی باعث عبور جریان الکترومغناطیسی دائمی می‌گردد که به نوبه خود باعث به وجود آمدن میدان مغناطیسی ساکن می‌شود. اما میدان الکترومغناطیسی به طور کامل از روی توزیع بارهای الکترومغناطیسی ساکن یا پتانسیل الکترومغناطیسی قابل تعیین است. میدان مغناطیسی یک نتیجه بوده و در محاسبات میدان الکترومغناطیسی وارد نمی‌شود. در این فصل خواهیم دید که یک میدان مغناطیسی متغیر، میدان الکترومغناطیسی به وجود می‌آورد و برعکس. برای توضیح پدیده‌های الکترومغناطیسی تحت شرایط متغیر با زمان، لازم است یک مدل الکترومغناطیسی بنا نهاده شود که در آن بردارهای میدان الکترومغناطیسی \mathbf{E} و \mathbf{D} به طور مناسبی میان بردارهای میدان مغناطیسی \mathbf{B} و \mathbf{H} ارتباط یابند. بنابراین، به منظور نشان دادن وابستگی متقابل میان بردارهای میدان الکترومغناطیسی در موارد متغیر با زمان، دو جفت از معادلات حاکم جدول ۱-۷ باید اصلاح شود.

با یک اصل موضوعی اساسی شروع می‌کنیم که معادله $\nabla \times \mathbf{E}$ در جدول ۱-۷ را اصلاح

۲-۷ قانون القای الکترومغناطیسی فاراده

نموده و به قانون القای الکترومغناطیسی فاراده، منجر می‌گردد. مفاهیم emf ترانسفورماتوری و emf حرکتی بررسی خواهند شد. با این اصل موضوعی جدید، همچنین لازم خواهد بود که به منظور سازگار کردن معادلات حاکم با معادله پیوستگی (قانون بقای بار)، معادله $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ را اصلاح نماییم. دو معادله کرل اصلاح شده به همراه دو معادله دیورژانس جدول ۱-۷ معادلات ماکسول نامیده شده و اساس نظریه الکترومغناطیسی را تشکیل می‌دهند. وقتی که تمام کمیات مستقل از زمان هستند، معادلات حاکم بر الکترومغناطیسی ساکن و مغناطیسی ساکن شکل‌های خاصی از معادلات ماکسول می‌باشند. معادلات ماکسول را می‌توان ترکیب نموده و معادلات موج را نتیجه گرفت. این معادلات، وجود امواج الکترومغناطیسی انتشار یابنده با سرعت نور را پیش بینی می‌نمایند. حل معادلات موج، به خصوص در میدانهای هماهنگ زمانی^۲ در این فصل بررسی خواهد شد.

۲-۷ قانون القای الکترومغناطیسی فاراده

یکی از پیشرفت‌های اصلی در نظریه الکترومغناطیسی توسط مایکل فاراده^۱ انجام گرفت. وی در سال ۱۸۳۱ به طور تجربی کشف کرد که وقتی شار مغناطیسی در حال پیوند با یک حلقه هادی تغییر می‌کند، جریانی در این حلقه القا می‌شود. رابطه کتی بین emf القائی و نرخ تغییر پیوند شار، براساس مشاهدات تجربی، به قانون فاراده معروف است. این یک قانون تجربی است و می‌تواند به عنوان یک اصل موضوعی در نظر گرفته شود. اما ما رابطه تجربی مرتبط با یک حلقه محدود را به عنوان نقطه آغازین بنا نهادن نظریه القای الکترومغناطیسی در نظر نمی‌گیریم. در عوض، روش خود در فصل ۳، در مورد الکترومغناطیسی ساکن و در فصل ۶ در مورد مغناطیسی ساکن را با مطرح کردن اصل موضوعی اساسی زیر دنبال خواهیم کرد و از روی آن شکل انتگرالی قانون فاراده را نتیجه خواهیم گرفت.

اصل موضوعی اساسی القای الکترومغناطیسی

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (۱-۷)$$

معادله (۱-۷)، یک تابع نقطه‌ای را بیان می‌کند؛ یعنی این معادله در هر نقطه از فضا قابل اعمال است، چه آن نقطه در فضای آزاد باشد چه در محیط مادی. بنابراین شدت میدان الکترومغناطیسی در ناحیه‌ای با چگالی شار مغناطیسی تغییرپذیر با زمان غیرایجابی بوده و نمی‌تواند به صورت گرادیان

۱- Maxwell's equations

۲- Time-harmonic fields

۳- Michael Faraday

یک بتانسیل عددی بیان شود.

با گرفتن انتگرال سطحی از دو طرف معادله (۷-۱) روی یک سطح باز و بکارگیری قضیه

استوکس، به دست می آید

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} \quad (2-7)$$

معادله (۷-۲) در مورد هر سطح S با مسیر محصورکننده C برقرار است، چه مداری فیزیکی به دور C موجود باشد یا نباشد. البته، در میدان بدون تغییرات زمانی، $\partial \mathbf{B} / \partial t = 0$ ، معادلات (۷-۱) و (۷-۲)، به ترتیب به معادلات (۳-۵) و (۳-۸) در الکتروستاتیک ساکن، ساده می شوند. در زیربخش های بعدی، حالت های مدار ساکن در میدان مغناطیسی تغییر پذیر با زمان، هادی متحرک در میدان مغناطیسی ساکن، و مدار متحرک در میدان مغناطیسی تغییر پذیر با زمان را به طور جداگانه مورد بحث قرار خواهیم داد.

۷-۲-۱ مدار ساکن در میدان مغناطیسی تغییر پذیر با زمان

در یک مدار ساکن با مسیر C و سطح S ، معادله (۷-۲) به صورت زیر نوشته می شود

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \quad (3-7)$$

اگر تعریف کنیم

$$\mathcal{V} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \text{emf القاشده در مداری با مسیر } C \quad (V) \quad (4-7)$$

و

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \text{شار مغناطیسی عبورکننده از سطح } S \quad (\text{Wb}) \quad (5-7)$$

آنگاه معادله (۷-۳) به صورت زیر در می آید

$$\mathcal{V} = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (V) \quad (6-7)$$

معادله (۷-۶) بیان می کند که، نیروی محرکه الکتریکی القا شده در یک مدار بسته ساکن، برابر منفی نرخ افزایش شار مغناطیسی دارای پیوند با آن مدار است. این بیانی از قانون القای الکترومغناطیسی فاراده است. نرخ تغییر زمانی شار مغناطیسی، حتی در غیاب یک مدار فیزیکی بسته، براساس معادله (۷-۳) باعث القای یک میدان الکتریکی می شود. علامت منفی در معادله (۷-۶) گویای این مطلب است که emf القائی باعث عبور جریان در حلقه بسته در

۷-۲ قانون القای الکترومغناطیسی فاراده

جهتی می شود که با تغییر شار مغناطیسی پیوندی مخالفت کند. این مطلب، به قانون لنتز معروف است. emf القائی در یک حلقه ساکن، ناشی از یک میدان مغناطیسی متغیر با زمان را emf ترانسفورماتوری می نامند.

مثال ۷-۱ حلقه ای دایره ای با N دور سیم هادی در صفحه xy قرار دارد، به طوری که مرکز آن در مبدأ میدان مغناطیسی توصیف شده با $\mathbf{B} = a_z B_0 \cos(\pi r / 2b) \sin \omega t$ است. شعاع حلقه و ω ، فرکانس زاویه ای است. emf القاشده در حلقه را پیدا کنید.

حل این مسئله، حلقه ساکنی را در یک میدان مغناطیسی تغییر پذیر با زمان مشخص می کند؛ از این رو برای یافتن emf القائی \mathcal{V} ، معادله (۷-۶) مستقیماً قابل بکارگیری است. شار مغناطیسی دارای پیوند با یک حلقه دایره ای برابر است با

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \\ &= \int_0^b \left[a_z B_0 \cos \frac{\pi r}{2b} \sin \omega t \right] \cdot (a_z 2\pi r dr) \\ &= \frac{\Lambda b^2}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) B_0 \sin \omega t \end{aligned}$$

چون N دور وجود دارد، کل شار پیوندی $N\Phi$ است و به دست می آید

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= -N \frac{d\Phi}{dt} \\ &= -\frac{\Lambda N}{\pi} b^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) B_0 \omega \cos \omega t \quad (V) \end{aligned}$$

ملاحظه می شود که emf القائی نود درجه با شار مغناطیسی اختلاف فاز زمانی دارد.

۷-۲-۲ ترانسفورماتورها

ترانسفورماتور یکی از ادوات جریان متناوب (ac) است که ولتاژها، جریانها و امپدانسها را تبدیل می نماید. ترانسفورماتور معمولاً از دو یا چند سیم پیچ دارای توزیع مغناطیسی، از طریق یک هسته فرومغناطیسی، همچون شکل ۷-۱ تشکیل می شود. قانون القای الکترومغناطیسی فاراده، اساس کار ترانسفورماتورهاست.

در مورد مسیر بسته مدار مغناطیسی شکل ۷-۱ (الف)، که توسط شار مغناطیسی Φ دنبال می شود، از معادله (۷-۶) داریم

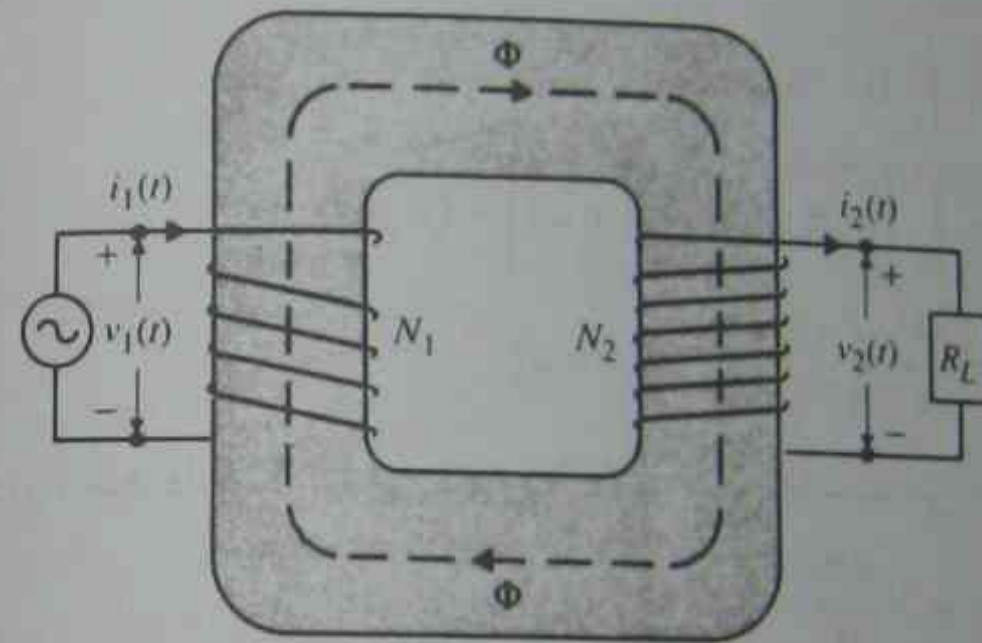
$$N_1 i_1 - N_2 i_2 = \mathcal{R} \Phi \quad (7-7)$$

که در آن N_1, N_2 و i_1, i_2 به ترتیب تعداد دور و جریان در مدارهای اولیه و ثانویه، و \mathcal{R} نمایشگر رلوکتانس مدار مغناطیسی است. در معادله (۷-۷) ملاحظه می‌کنیم که براساس قانون لنز، mmf القائی در مدار ثانویه، $N_2 i_2$ با جریان شار مغناطیسی Φ که توسط mmf در مدار اولیه، $N_1 i_1$ ایجاد می‌شود، مخالفت می‌کند. از بخش ۶-۸ می‌دانیم که رلوکتانس هسته فرامغناطیسی به طول ℓ ، سطح مقطع S و نفوذپذیری μ برابر است با

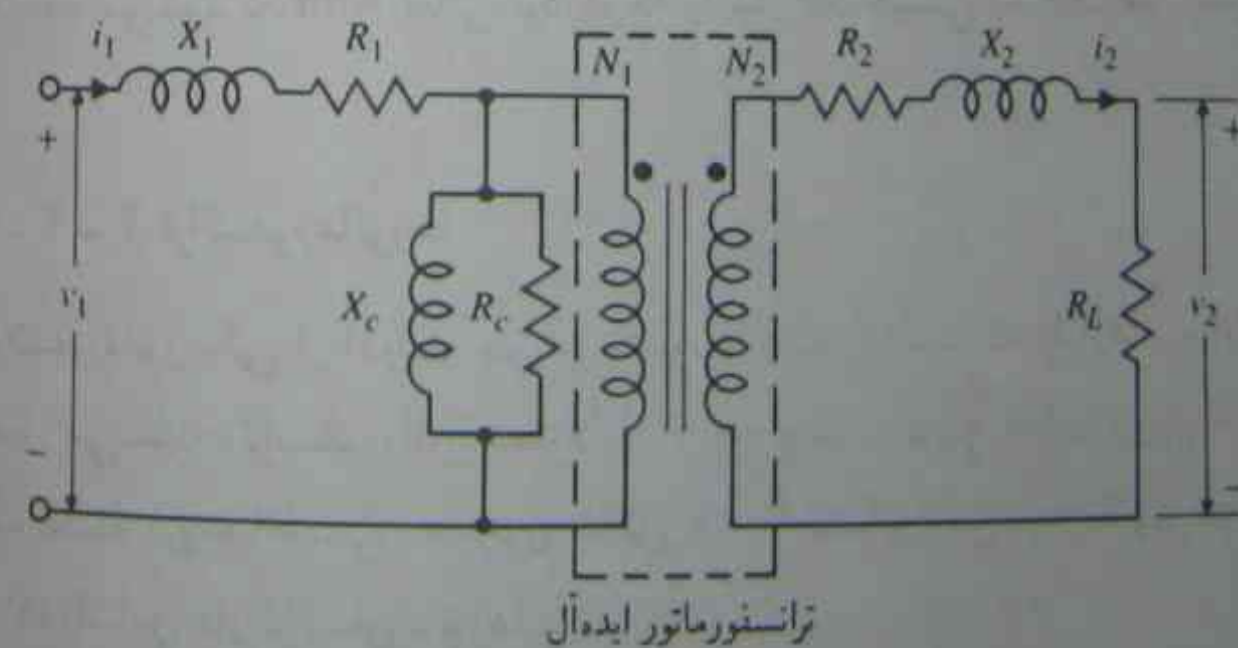
$$\mathcal{R} = \frac{\ell}{\mu S} \quad (۸-۷)$$

با جاگذاری معادله (۸-۷) در معادله (۷-۷)، به دست می‌آوریم

$$N_1 i_1 - N_2 i_2 = \frac{\ell}{\mu S} \Phi \quad (۹-۷)$$



(الف) نمودار شماتیک یک ترانسفورماتور



ترانسفورماتور ایده‌آل

(ب) یک مدار معادل

شکل ۱-۷ نمودار شماتیک و مدار معادل یک ترانسفورماتور

۲-۷ قانون القای الکترومغناطیسی فاراده

الف) ترانسفورماتور ایده‌آل. در یک ترانسفورماتور ایده‌آل، فرض می‌کنیم که $\mu \rightarrow \infty$ و معادله (۷-۹) به صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{N_2}{N_1} \quad (۱۰-۷)$$

معادله (۱۰-۷) بیان می‌کند که نسبت جریان در سیم‌پیچهای اولیه و ثانویه یک ترانسفورماتور ایده‌آل، مساوی عکس نسبت تعداد دورهاست. قانون فاراده بیان می‌دارد که

$$v_1 = N_1 \frac{d\Phi}{dt} \quad (۱۱-۷)$$

و

$$v_2 = N_2 \frac{d\Phi}{dt} \quad (۱۲-۷)$$

باتوجه به قطبهای مشخص شده در شکل ۱-۷ (الف)، علامت صحیح v_1 و v_2 در نظر گرفته شده است. از معادلات (۱۱-۷) و (۱۲-۷) داریم

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{N_1}{N_2} \quad (۱۳-۷)$$

از این رو، نسبت ولتاژ دو سرسیم پیچهای اولیه و ثانویه یک ترانسفورماتور ایده‌آل مساوی نسبت دورهاست.

اگر سیم‌پیچ ثانویه، مطابق شکل ۱-۷ (الف)، به یک بار مقاومتی R_L ختم شود، بار مؤثر دیده‌شده توسط منبع متصل‌شده به سیم‌پیچ اولیه برابر است با

$$\text{مؤثر}(R_1) = \frac{v_1}{i_1} = \frac{(N_1/N_2)v_2}{(N_2/N_1)i_2}$$

یا

$$\text{مؤثر}(R_1) = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 R_L \quad (۱۴-۷ \text{ الف})$$

که برابر مقاومت بار ضرب در توان دوم نسبت دورهاست. در مورد یک منبع سینوسی $v_1(t)$ و امپدانس بار Z_L ، روشن است که بار مؤثر دیده‌شده توسط منبع برابر $(N_1/N_2)^2 Z_L$ است، یعنی تبدیل امپدانس صورت گرفته است. داریم

$$\boxed{(Z_1) \text{ مؤثر} = \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 Z_L} \quad (۷-۱۴ \text{ ب})$$

ب) ترانسفورماتور واقعی. با رجوع به معادله (۷-۱) می‌توانیم پیوندهای شار مغناطیسی سیم‌پیچ‌های اولیه و ثانویه را به صورت زیر بنویسیم:

$$\Lambda_1 = N_1 \Phi = \frac{\mu S}{\ell} (N_1^2 i_1 - N_1 N_2 i_2) \quad (۷-۱۵)$$

$$\Lambda_2 = N_2 \Phi = \frac{\mu S}{\ell} (N_1 N_2 i_1 - N_2^2 i_2) \quad (۷-۱۶)$$

با استفاده از معادلات (۷-۱۵) و (۷-۱۶) در معادلات (۷-۱۱) و (۷-۱۲)، به دست می‌آوریم

$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} - L_{12} \frac{di_2}{dt} \quad (۷-۱۷)$$

$$v_2 = L_{12} \frac{di_1}{dt} - L_2 \frac{di_2}{dt} \quad (۷-۱۸)$$

که در آن

$$L_1 = \frac{\mu S}{\ell} N_1^2 \quad (۷-۱۹)$$

$$L_2 = \frac{\mu S}{\ell} N_2^2 \quad (۷-۲۰)$$

$$L_{12} = \frac{\mu S}{\ell} N_1 N_2 \quad (۷-۲۱)$$

به ترتیب، اندوکتانس خودی سیم‌پیچ اولیه، اندوکتانس خودی سیم‌پیچ ثانویه و اندوکتانس متقابل میان سیم‌پیچ‌های اولیه و ثانویه است. در یک ترانسفورماتور ایده‌آل، شار ناشی وجود ندارد، و $L_{12} = \sqrt{L_1 L_2}$ در ترانسفورماتور واقعی،

$$L_{12} = k \sqrt{L_1 L_2} \quad k < 1 \quad (۷-۲۲)$$

که در آن k ضریب تزویج نامیده می‌شود. ملاحظه می‌کنیم که عبارتهای معادلات (۷-۱۹)، (۷-۲۰) و (۷-۲۱) با فرمول اندوکتانس در واحد طول، معادله (۶-۱۳۵)، در مورد یک سلونوئید طولی سازگار است. در هر دو مورد، شار ناشی، صفر فرض می‌شود. توجه کنید که فرض μ بینهایت، در مورد ترانسفورماتور ایده‌آل اندوکتانس‌های بینهایت را نیز ایجاب می‌نماید.

در ترانسفورماتورهای واقعی، شرایط کار واقعی زیر مطرح هستند: وجود شار ناشی ($k < 1$)، اندوکتانس‌های غیربینهایت، مقاومت غیرصفر سیم‌پیچ و وجود تلفات هیستریزیس و جریان گردابی. تلفات جریان گردابی، هم اینک مورد بررسی قرار خواهد گرفت. (طبیعت غیرخطی هسته فرومغناطیسی (وابستگی نفوذپذیری به شدت میدان مغناطیسی) نیز بر دشواری

۷-۲ قانون القای الکترومغناطیسی فاراد.

تحلیل دقیق ترانسفورماتورهای واقعی می‌افزاید. شکل ۷-۱ (ب)، یک مدار معادل تقریبی برای ترانسفورماتور شکل ۷-۱ (الف) است. در شکل ۷-۱ (ب) R_1 و R_2 مقاومت سیم‌پیچها، X_1 و X_2 راکتانس‌های القایی ناشی R_c نمایش‌دهنده تلفات توان ناشی از تأثیرات هیستریزیس و جریان گردابی و X_c یک راکتانس القایی غیرخطی، نمایش‌دهنده رفتار مغناطیسی شدگی غیرخطی هسته فرومغناطیسی است. تعیین تحلیلی این کمیات کار فوق‌العاده مشکلی است. دو نقطه‌ای که روی سر سیم‌پیچ‌های ترانسفورماتور ایده‌آل ظاهر شده‌اند، نشان می‌دهند که بتانسیل ناشی از القای الکترومغناطیسی در این سرها با هم بالا و پایین می‌رود. این قاعده نقطه‌گذاری، روش ساده‌ای برای نشان دادن جهت نسبی سیم‌پیچها روی هسته ترانسفورماتور است. ^۱

وقتی، شار مغناطیسی تغییرپذیر با زمان، در هسته فرومغناطیسی جریان می‌یابد، براساس قانون فاراد، یک emf القایی نتیجه می‌شود. این emf القایی، جریانهای محلی را عمود بر شار مغناطیسی در هسته هادی تولید خواهد کرد. این جریانها را جریانهای گردابی می‌نامند. جریانهای گردابی تلفات توان اهمی تولید نموده و باعث گرم شدن محلی می‌شوند. در واقع، این مطلب اساس گرمایش القایی است. کوره‌های القایی برای تولید درجه حرارت‌های به قدر کافی بالا جهت ذوب فلزات ساخته شده‌اند. در ترانسفورماتورها، این تلفات توان جریان گردابی، نامطلوب است و با استفاده از هسته‌هایی ساخته شده از مواد با نفوذپذیری بالا و رسانندگی پایین (μ بالا و σ پایین) قابل کاهش می‌باشد. فریت‌ها از جمله این مواد هستند. در کاربردهای ترانس پائین و توان بالا، یک روش اقتصادی برای کاهش تلفات توان جریان گردابی، استفاده از هسته‌های ورقه‌ورقه‌آ است. یعنی، ساختن هسته‌های ترانسفورماتورها از ورقه‌های فرومغناطیسی (آهنی) روی هم قرارداده شده به طوری که هرکدام از ورقه‌ها از ورقه مجاور با پوشش نازک روغنی یا اکسیدی عایق‌بندی شده است. پوشش‌های عایقی، موازی با جهت شار مغناطیسی هستند، به طوری که جریانهای گردابی عمود بر شار، به صفحات ورقه‌ورقه محدود می‌شوند. می‌توان ثابت کرد که با افزایش تعداد ورقه‌ها، کل تلفات توان جریان گردابی کاهش می‌یابد. (مسئله ۷-۶ را ببینید.) مقدار کاهش تلفات توان، به شکل و اندازه سطح مقطع، همچنین به روش ورقه‌ورقه‌سازی بستگی دارد. برای مثال، هسته دایره‌ای شکل ۷-۱۲ (الف) را می‌توان به جای جزءهای رشته‌ای نشان داده شده در شکل ۷-۱۲ (ب)، به صورت صفحات عایق‌بندی شده و روی هم قرارگرفته، ورقه‌ورقه ساخت.

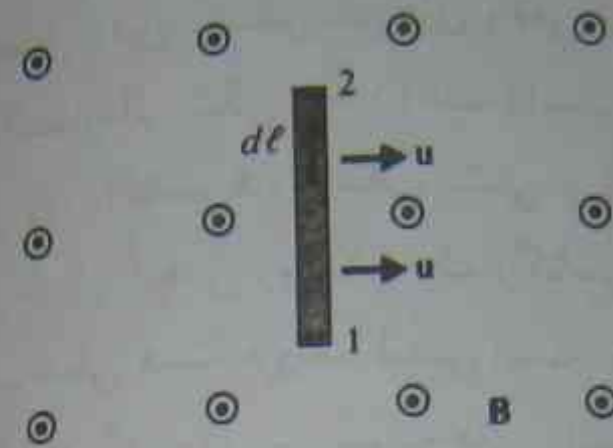
۱- Induction heating

۲- Induction furnaces

۳- Laminated cores

۴- Filamentary parts

^۱ برای مثال، تحلیل سیستم‌های خطی، نوشته D.K. Cheng، چاپ Addison-Wesley، Reading-Mass، ۱۹۵۹، صفحه ۵۰ را ببینید.



شکل ۲-۷ میله‌ای هادی که در یک میدان مغناطیسی حرکت می‌کند.

۲-۲-۳ هادی متحرک در میدان مغناطیسی ساکن

وقتی یک هادی با سرعت u در میدان مغناطیسی ساکن B (تغییرناپذیر با زمان)، مطابق شکل ۲-۷ حرکت می‌کند، نیروی $F_m = qu \times B$ باعث می‌شود الکترونهای دارای آزادی حرکت در هادی، به‌سوی یک انتهای هادی رانده شوند و انتهای دیگری آن را دارای بار مثبت نمایند. این جدائی بارهای مثبت و منفی، یک نیروی جاذبه کولمبی را به‌وجود می‌آورد. فرآیند جدائی بارها، آنقدر ادامه می‌یابد تا اینکه نیروهای الکتریکی و مغناطیسی یکدیگر را متوازن نموده و حالت تعادلی فرا رسد. در حالت تعادل، که بسیار سریع فرا می‌رسد، نیروی خالص وارد بر بارهای آزاد در هادی متحرک صفر است.

از نظر بیننده‌ای که با هادی حرکت می‌کند، حرکت واضحی موجود نیست و نیروی مغناطیسی در واحد بار، $F_m/q = u \times B$ را می‌توان به‌عنوان میدان الکتریکی القاشده، عمل‌کننده در امتداد هادی و ایجاد کننده ولتاژ

$$V_{\text{emf}} = \int_C (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\ell \quad (23-7)$$

تفسیر نمود. اگر هادی متحرک، بخشی از مدار بسته C باشد، آنگاه، emf تولیدی در پیرامون مدار برابر است با،

$$V' = \oint_C (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\ell \quad (V) \quad (24-7)$$

این emf قاطع‌شار یا emf حرکتی می‌گویند. روشن است که تنها بخشی از مدار که در جهت ناموازی با (و از این‌رو به‌طور مجازی، "قاطع") شار مغناطیسی است، سهمی در V'

۲-۷ قانون القای الکترومغناطیسی فاراده

معادله (۲۴-۷) خواهد داشت.

مثال ۲-۷ یک میله فلزی در میدان مغناطیسی یکنواخت $B = a_z B_0$ با سرعت ثابت u مطابق شکل ۲-۷ روی یک جفت ریل هادی می‌لغزد.

الف) ولتاژ مدار باز V_0 را که در سرهای ۱ و ۲ ظاهر می‌شود، تعیین کنید.
ب) فرض کنید مقاومت R بین این سرها متصل شده است. توان الکتریکی تلف شده در R را پیدا کنید.

پ) نشان دهید که این توان الکتریکی برابر توان مکانیکی لازم برای حرکت میله لغزان با سرعت u است. از مقاومت الکتریکی میله فلزی و ریل‌های هادی صرف‌نظر کنید. از اصطکاک مکانیکی در نقاط تماس نیز چشم‌پوشی نمایید.

حل

الف) میله متحرک، emf قاطع‌شار تولید می‌نماید. برای پیدا کردن ولتاژ مدار باز V_0 از معادله (۲۴-۷) استفاده می‌کنیم:

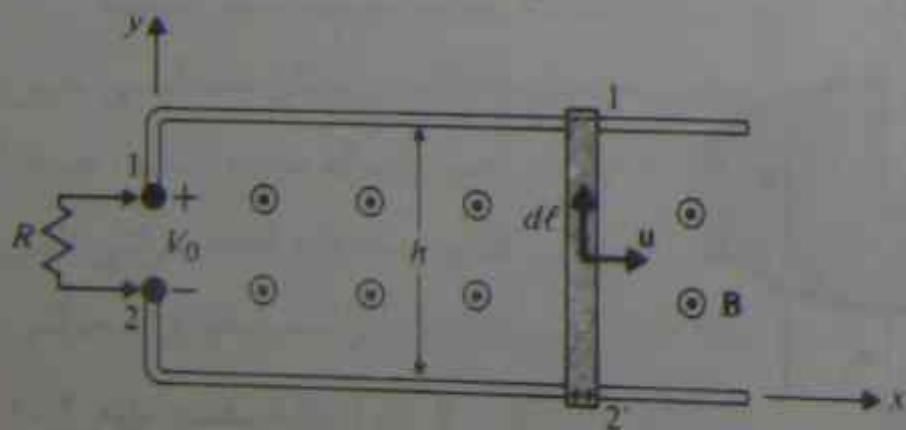
$$\begin{aligned} V_0 &= V_1 - V_2 = \int_C (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\ell \\ &= \int_{1'}^{2'} (a_z u \times a_z B_0) \cdot (a_y d\ell) \quad (25-7) \\ &= -uB_0 h \quad (V) \end{aligned}$$

ب) وقتی مقاومت R بین سرهای ۱ و ۲ متصل می‌شود، جریان $I = uB_0 h / R$ از سر ۲ به سمت سر ۱ عبور خواهد کرد، به‌طوری که P_e توان الکتریکی تلف‌شده در R برابر است با

$$P_e = I^2 R = \frac{(uB_0 h)^2}{R} \quad (W) \quad (26-7)$$

پ) توان مکانیکی لازم برای حرکت دادن میله لغزان برابر است با

$$P_m = F \cdot u \quad (W) \quad (27-7)$$



شکل ۲-۷ یک میله فلزی که روی ریل‌های هادی می‌لغزد (مثال ۲-۷)

که در آن نیروی مکانیکی لازم برای مقابله با نیروی مغناطیسی F_m است که میدان مغناطیسی بر میله فلزی حامل جریان وارد می‌کند. از معادله (۶-۱۸۴) داریم

$$F_m = I \int_{r'}^{r''} d\ell \times B = -a_x IB \cdot h \quad (N) \quad (28-7)$$

علامت منفی در معادله (۷-۲۸) به این دلیل است که جریان I در جهت خلاف $d\ell$ جاری می‌شود. از این رو

$$F = -F_m = a_x IB \cdot h = a_x u B^2 h^2 / R \quad (N) \quad (29-7)$$

جاگذاری معادله (۷-۲۹) در معادله (۷-۲۷) ثابت می‌کند که $P_m = P_e$ که اصل بقای انرژی را تأیید می‌کند.

۷-۲ قانون القای الکترومغناطیسی فاراده

که emf مولد دیسک فاراده است. برای اندازه‌گیری V_e باید از یک ولت‌متر با مقاومت بسیار بالا استفاده شود، به طوری که جریان قابل ملاحظه‌ای از مدار نگذرد و میدان مغناطیسی اعمال شده خارجی تغییر ننماید.

۷-۲-۴ مدار متحرک در میدان مغناطیسی تغییرپذیر با زمان

وقتی بار q با سرعت u در ناحیه‌ای که هم میدان الکتریکی E و هم میدان مغناطیسی B وجود دارد، حرکت می‌کند، نیروی الکترومغناطیسی F وارد بر q ، آن طور که توسط یک ناظر آزمایشگاهی اندازه‌گیری می‌شود به توسط معادله نیروی لورنتس، معادله (۶-۵) که در زیر تکرار شده است، داده می‌شود:

$$F = q(E + u \times B) \quad (31-7)$$

از دید ناظری که با q حرکت می‌کند، حرکت مشهودی وجود ندارد، و نیروی وارد بر q را می‌توان ناشی از میدان الکتریکی E' تفسیر نمود، به طوری که

$$E' = E + u \times B \quad (32-7)$$

یا

$$E = E' - u \times B \quad (33-7)$$

از این رو، وقتی یک مدار هادی با مسیر C و سطح S با سرعت u در میدان (E, B) حرکت می‌کند، از معادله (۷-۳۳) در معادله (۷-۳۲) استفاده کرده، به دست می‌آوریم

$$\oint_C E' \cdot d\ell = - \int_S \frac{\partial B}{\partial t} \cdot ds + \oint_C (u \times B) \cdot d\ell \quad (V) \quad (34-7)$$

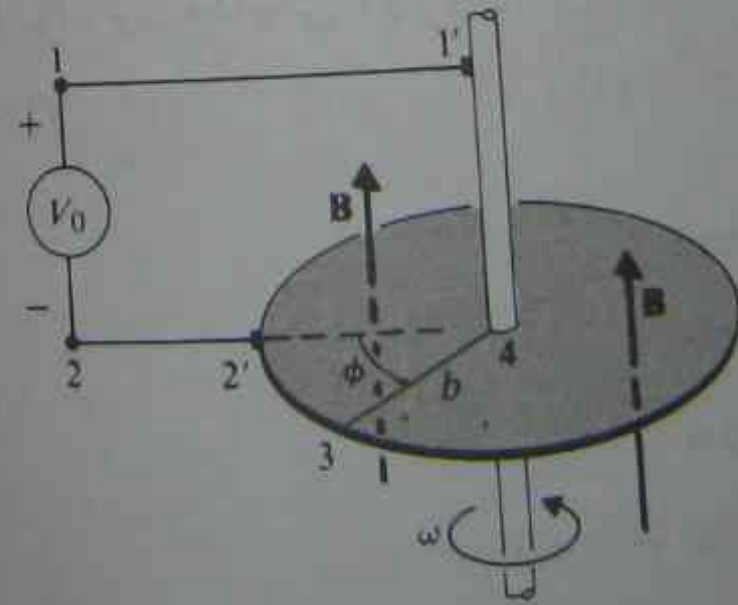
معادله (۷-۳۴)، شکل کلی قانون فاراده در مورد یک مدار متحرک در میدان مغناطیسی تغییرپذیر با زمان است. انتگرال خطی سمت چپ، emf القایی در قاب متحرک مرجع است. جمله اول سمت راست، emf ترانسفورماتوری ناشی از تغییرات زمانی B و جمله دوم emf حرکتی ناشی از حرکت مدار در B را نشان می‌دهد. تقسیم emf القایی بین بخشهای ترانسفورماتوری و حرکتی، به قاب انتخاب شده مرجع بستگی دارد.

گیریم مداری را با مسیر C در نظر بگیریم که از C_1 در لحظه t به C_2 در لحظه $t + \Delta t$ در میدان مغناطیسی متغیر B حرکت می‌کند. این حرکت می‌تواند شامل انتقال، چرخش و به هم ریختگی

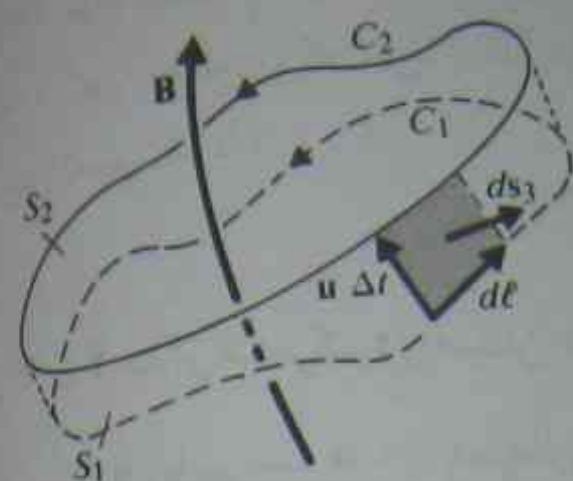
مثال ۷-۳ مولد دیسک فاراده از یک دیسک دایره‌ای فلزی تشکیل می‌شود که با سرعت زاویه‌ای ثابت ω در میدان مغناطیسی یکنواخت و ثابتی با چگالی شار $B = a_z B_0$ که به موازات محور چرخش آن است، می‌چرخد. جاروبک‌هایی مطابق شکل ۷-۴ روی محور و لبه دیسک تعبیه گشته‌اند. اگر شعاع دیسک b باشد، ولتاژ مدار باز مولد را تعیین کنید.

حل مدار $1'2'3'4'1$ را در نظر بگیرید. از قسمت ۲'۳۴ که با دیسک حرکت می‌کند، تنها قسمت مستقیم ۳۴ شار مغناطیسی را "قطع می‌کند". از معادله (۷-۲۴) داریم،

$$\begin{aligned} V_e &= \oint_C (u \times B) \cdot d\ell \\ &= \int_r^r [(a_\phi r \omega) \times a_z B_0] \cdot (a_r dr) \\ &= \omega B_0 \int_b^b r dr = -\frac{\omega B_0 b^2}{2} \quad (V) \end{aligned} \quad (30-7)$$



شکل ۷-۴ مولد دیسک فاراده (مثال ۷-۳)



شکل ۵-۷ مدار متحرک در میدان مغناطیسی تغییرپذیر با زمان

دلخواهی باشد. شکل ۵-۷ این وضعیت را به نمایش می گذارد. نرخ زمانی تغییرات شار مغناطیسی گذرنده از مسیر برابر است با

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\int_{S_2} \mathbf{B}(t + \Delta t) \cdot d\mathbf{s}_2 - \int_{S_1} \mathbf{B}(t) \cdot d\mathbf{s}_1 \right] \quad (۳۵-۷)$$

در معادله (۳۵-۷) به صورت سری تیلور قابل بسط است:

$$\mathbf{B}(t + \Delta t) = \mathbf{B}(t) + \frac{\partial \mathbf{B}(t)}{\partial t} \Delta t + \text{ج.م.ب.} \quad (۳۶-۷)$$

که در آن جملات مرتبه بالاتر (ج.م.ب.) شامل توان های دوم و بالاتر (Δt) است. جاگذاری معادله (۳۶-۷) در معادله (۳۵-۷) نتیجه می دهد

$$\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\int_{S_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}_2 - \int_{S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}_1 + \text{ج.م.ب.} \right] \quad (۳۷-۷)$$

که در آن به منظور سادگی \mathbf{B} به جای $\mathbf{B}(t)$ نوشته شده است. در حرکت از C_1 تا C_2 مدار فوق ناحیه ای را می پوشاند که توسط S_1 ، S_2 و S_3 محصور شده است. سطح جانبی S_3 مساحت جاروشده توسط مسیر در زمان Δt است. یک جزء کوچک این سطح جانبی برابر است با

$$d\mathbf{s}_3 = d\mathbf{l} \times \mathbf{u} \Delta t \quad (۳۸-۷)$$

اکنون قضیه دیورژانس را در لحظه t و در ناحیه مشخص شده در شکل ۵-۷ در مورد \mathbf{B} به کار می بریم:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{B} dv = \int_{S_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}_2 - \int_{S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}_1 + \int_{S_3} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}_3 \quad (۳۹-۷)$$

که در آن علامت منفی در جمله شامل $d\mathbf{s}_1$ به این دلیل آمده است که در قضیه دیورژانس باید از بردارهای عمود به سمت خارج استفاده شود. با استفاده از معادله (۳۸-۷) در معادله (۳۹-۷)

و باتوجه به اینکه $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ است، داریم

$$\int_{S_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}_2 - \int_{S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}_1 = -\Delta t \oint_C (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \quad (۴۰-۷)$$

از ترکیب معادلات (۳۷-۷) و (۴۰-۷) به دست می آید

$$\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} - \oint_C (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \quad (۴۱-۷)$$

که می تواند به صورت منهای سمت راست معادله (۳۴-۷) شناسائی شود. اگر در نظر بگیریم

$$\mathcal{V} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (۴۲-۷)$$

emf القایی در مدار C که در قاب متحرک اندازه گیری شود =

معادله (۳۴-۷) به صورت ساده زیر قابل نوشتن است

$$\mathcal{V} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (V) \quad (۴۳-۷)$$

که به همان شکل معادله (۶-۷) است. البته اگر مداری در حرکت نباشد، \mathcal{V} به V ساده شده و معادلات (۴۳-۷) و (۶-۷) دقیقاً یکسان هستند. از این رو، قانون فاراده، که بیان می کند emf القایی در یک مدار بسته برابر با منهای نرخ زمانی افزایش شار مغناطیسی پیوندی در یک مدار است، هم در مدارهای ساکن و هم در مدارهای متحرک قابل استفاده است. هر یک از دو معادله (۳۴-۷) یا (۴۳-۷) برای محاسبه emf القایی در حالت کلی قابل اعمال هستند. اگر یک ولتمتر با امپدانس بالا در یک مدار هادی قرار گیرد، ولتاژ مدار بازشناسی از القای الکترومغناطیسی توسط آن قرائت خواهد شد، چه مدار ساکن و چه در حال حرکت باشد. تذکر داده ایم که تقسیم emf القایی در معادله (۳۴-۷) به emf های ترانسفورماتوری و حرکتی یکتا نیست. اما مجموع آنها همیشه برابر آن چیزی است که با استفاده از معادله (۴۳-۷) محاسبه می شود.

در مثال ۷-۲ (شکل ۷-۳) ولتاژ مدار باز V_s را با استفاده از معادله (۳۴-۷) تعیین

کردیم. اگر از معادله (۴۳-۷) استفاده کنیم، خواهیم داشت

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = B_s(hut)$$

$$V_s = -\frac{d\Phi}{dt} = -uB_s h \quad (V)$$

که همان معادله (۷-۲۵) است.

به همین ترتیب، در مورد مولد دیسک فاراده، در مثال ۷-۳، شار مغناطیسی پیوندی با مدار ۱۲۲'۳۴۱' همان است که از ناحیه گوه شکل ۲'۳۴۲' می‌گذرد:

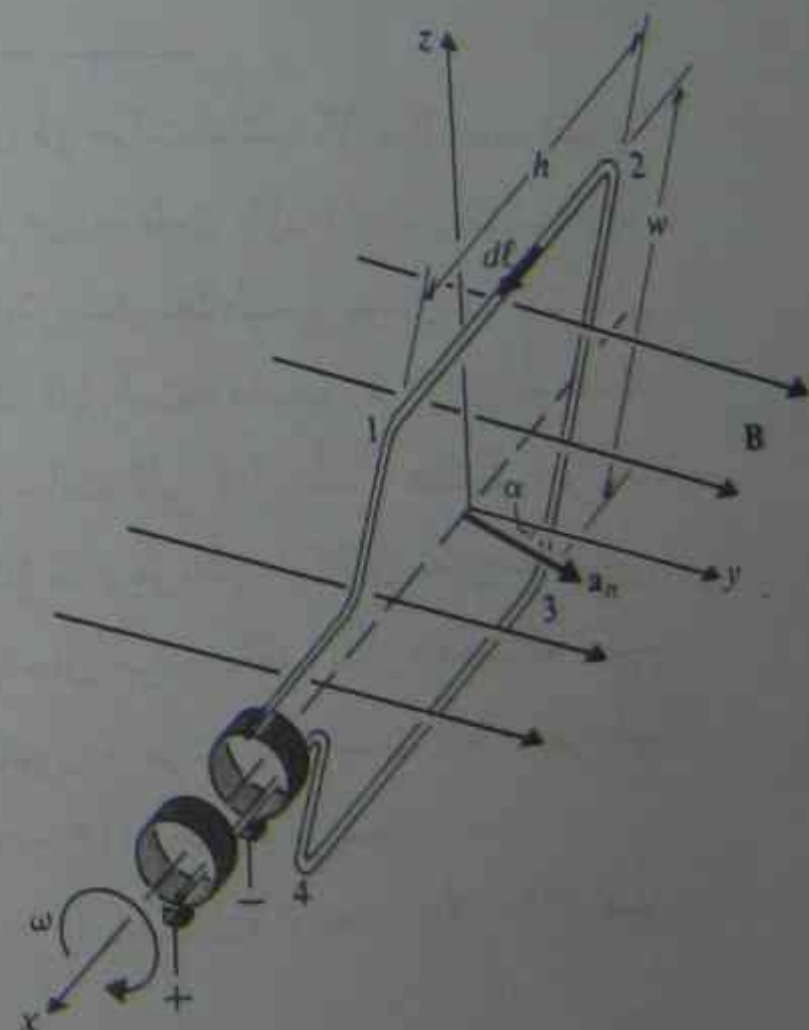
$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = B_0 \int_0^b \int_0^{\omega t} r d\phi dr$$

$$= B_0 (\omega t) \frac{b^2}{2}$$

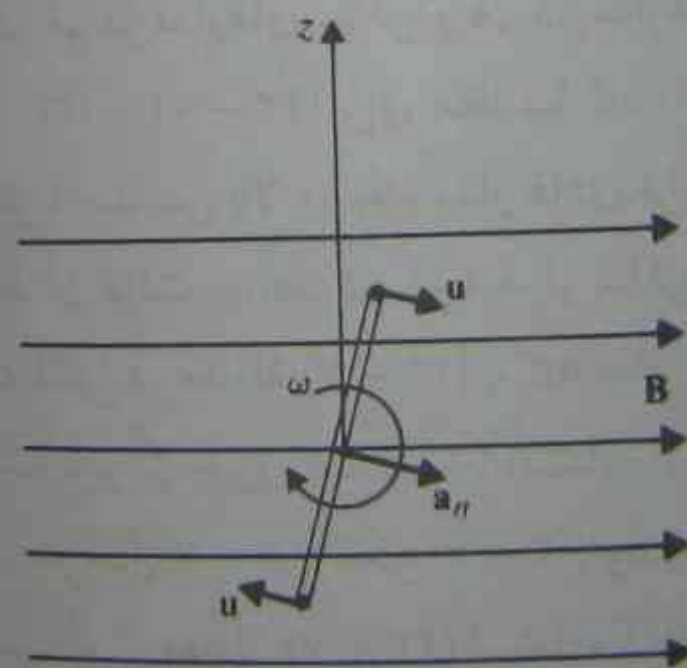
$$V_0 = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\omega B_0 b^2}{2}$$

که همان معادله (۷-۳۰) است.

مثال ۷-۴ یک حلقه هادی مستطیل شکل با ابعاد h در w در میدان مغناطیسی متغیر $\mathbf{B} = a_y B_0 \sin \omega t$ قرار دارد. در حالت اولیه، عمود بر حلقه با a_y مطابق شکل ۷-۶، زاویه α می‌سازد. emf القائی در حلقه را: (الف) وقتی حلقه در حال سکون است و (ب) وقتی حلقه با سرعت زاویه‌ای ω حول محور x دوران می‌نماید، پیدا کنید.



(الف) نمای تجسیمی



(ب) نما از جهت +x

شکل ۷-۶ حلقه هادی مستطیل شکل چرخان در میدان مغناطیسی متغیر (مثال ۷-۴)

حل

الف) وقتی حلقه در حال سکون است، با استفاده از معادله (۷-۶):

$$\Phi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$$

$$= (a_y B_0 \sin \omega t) \cdot (a_n hw)$$

$$= B_0 hw \sin \omega t \cos \alpha$$

بنابراین،

$$V_0 = -\frac{d\Phi}{dt} = -B_0 S \omega \cos \omega t \cos \alpha \quad (۷-۴۴)$$

که در آن $S = hw$ مساحت حلقه است. قطبیت‌های نسبی سرها مطابق شکل هستند. اگر مدار از طریق یک بار خارجی کامل شود، V_0 جریانی تولید خواهد کرد که با تغییرات Φ مخالفت می‌کند.

ب) وقتی حلقه حول محور x می‌چرخد، هر دو جمله معادله (۷-۴۴) اثر خواهند داشت: اثر جمله اول emf ترانسفورماتوری V_0 در معادله (۷-۴۴) و اثر جمله دوم emf حرکتی V_0' خواهد بود که در آن،

$$V_0' = \oint_C (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$$

$$= \int_1^2 \left[\left(a_n \frac{w}{r} \omega \right) \times (a_y B_0 \sin \omega t) \right] \cdot (a_x dx)$$

$$+ \int_3^4 \left[\left(-a_n \frac{w}{r} \omega \right) \times (a_y B_0 \sin \omega t) \right] \cdot (a_x dx)$$

$$= 2 \left(\frac{w}{r} \omega B_0 \sin \omega t \sin \alpha \right) h$$

توجه داشته باشید که اضلاع ۲۳ و ۴۱ اثری در V_0' نداشته و اضلاع ۱۲ و ۳۴ دارای اثراتی با اندازه‌های مساوی و هم جهت می‌باشند. اگر در $t = 0$ ، $\alpha = 0$ باشد، آنگاه $\alpha = \omega t$ و می‌توان نوشت:

$$V_0' = B_0 S \omega \sin \omega t \sin \omega t \quad (۷-۴۵)$$

کل emf القا شده یا تولید شده در حلقه چرخان، مجموع V_0 در معادله (۷-۴۴) و V_0' در معادله (۷-۴۵) است:

$$V_0'' = -B_0 S \omega (\cos^2 \omega t - \sin^2 \omega t) = -B_0 S \omega \cos 2\omega t \quad (۷-۴۶)$$

که دارای فرکانس زاویه‌ای 2ω است.

emf القاشده کل \mathcal{V}_t را می توان با استفاده از معادله (۷-۴۳) مستقیماً تعیین نمود. در هر لحظه t ، شار مغناطیسی دارای پیوند با حلقه برابر است با

$$\Phi(t) = \mathbf{B}(t) \cdot [\mathbf{a}_n(t)S] = B_0 S \sin \omega t \cos \alpha$$

$$= B_0 S \sin \omega t \cos \omega t = \frac{1}{2} B_0 S \sin 2\omega t$$

از این رو،

$$\mathcal{V}_t = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} B_0 S \sin 2\omega t \right)$$

$$= -B_0 S \omega \cos 2\omega t$$

که همان نتیجه قبلی است.

۳-۷ معادلات ماکسول

اصل موضوعی اساسی القای الکترومغناطیسی اطمینان می دهد که هر میدان مغناطیسی تغییرپذیر با زمان، یک میدان الکتریکی ایجاد می کند. این اطمینان توسط آزمایشهای متعددی به صورت گسترده اثبات شده است. بنابراین، معادله $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ در جدول ۷-۱ باید با معادله (۷-۱) در حالت تغییرپذیر با زمان جایگزین گردد. آنچه در زیر می آید، مجموعه تغییر یافته دو معادله کرل و دو معادله دیورژانس جدول ۷-۱ است:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (۷-۴۷ \text{ الف})$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (۷-۴۷ \text{ ب})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (۷-۴۷ \text{ پ})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (۷-۴۷ \text{ ت})$$

بعلاوه، می دانیم که اصل بقای بار باید در تمام زمانها برقرار باشد. عبارت ریاضی بقای بار، معادله پیوستگی، معادله (۵-۲۴) است که دوباره در زیر تکرار می شود:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (۷-۴۸)$$

سؤال جدی در اینجا این است که آیا مجموعه ۴ معادله (۷-۴۷ الف، ب، پ و ت) با شرط مشخص شده در معادله (۷-۴۸) در حالت تغییرپذیر با زمان سازگار هستند یا خیر. اینکه جواب منفی است صرفاً یا گرفتن دیورژانس از معادله (۷-۴۷ ب) فوراً روشن می شود.

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = 0 = \nabla \cdot \mathbf{J}$$

(۷-۴۹)

۳-۷ معادلات ماکسول

که از اتحاد صفر معادله (۲-۱۴۹) استفاده شده است. به یاد می آوریم که دیورژانس کرل هر میدان برداری خوشرفتار، صفر است. چون معادله (۷-۴۸) بیان می دارد که $\nabla \cdot \mathbf{J}$ در وضعیت تغییرپذیر با زمان صفر نیست، معادله (۷-۴۹) در حالت کلی صحیح نیست. معادلات (۷-۴۷ الف، ب، پ و ت) چگونه باید اصلاح شوند تا با معادله (۷-۴۸) سازگاری داشته باشند؟ نخست، جمله $\partial \rho / \partial t$ باید به طرف راست معادله (۷-۴۹) افزوده شود:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = 0 = \nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (۷-۵۰)$$

با استفاده از معادله (۷-۴۷ پ) در معادله (۷-۵۰) داریم

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \cdot \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \quad (۷-۵۱)$$

که ایجاب می کند

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (۷-۵۲)$$

معادله (۷-۵۲) روشن می کند که یک میدان الکتریکی تغییرپذیر با زمان، یک میدان مغناطیسی به وجود خواهد آورد حتی اگر جریانی نیز عبور نکند. جمله اضافی $\partial \mathbf{D} / \partial t$ ضروری است تا اینکه معادله (۷-۵۲) را با اصل بقای بار سازگار نماید.

بسادگی می توان تحقیق نمود که $\partial \mathbf{D} / \partial t$ دارای بعد چگالی جریان است (واحد SI آن: A/m^2). جمله $\partial \mathbf{D} / \partial t$ را چگالی جریان جابجایی می نامند و به کار بردن آن در معادله $\nabla \times \mathbf{H}$ یکی از مهمترین آثار جیمز کلارک ماکسول (۱۸۷۱-۱۸۴۱) است. برای سازگاری با معادله پیوستگی، در وضعیت تغییرپذیر با زمان، هر دو معادله کرل جدول ۷-۱ باید تعمیم یابد. مجموعه چهار معادله سازگار که جانشین معادلات ناسازگار (۷-۴۷ الف، ب، پ و ت) می شوند، عبارتند از:

۱- James Clerk Maxwell

† یک ثابت انتگرال گیری می تواند به معادله (۷-۵۲) اضافه شود بی آنکه معتبر بودن معادله (۷-۵۱) را برهم بزند. اما این ثابت باید صفر باشد تا معادله (۷-۵۲) به معادله (۷-۴۷ ب) در حالت ساکن ساده شود.

$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	(الف ۵۳-۷)
$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	(ب ۵۳-۷)
$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$	(پ ۵۳-۷)
$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	(ت ۵۳-۷)

اینها را معادلات ماکسول می‌نامند. توجه کنید که ρ در معادله (ب ۵۳-۷) چگالی حجمی بارهای آزاد و \mathbf{J} در معادله (ب ۵۳-۷) چگالی جریانهای آزاد است که ممکن است شامل جریان انتقالی (ρu) و جریان هدایتی $(\sigma \mathbf{E})$ باشد. این چهار معادله به همراه معادله پیوستگی، معادله (۷-۴۸) و معادله نیروی لورنتس، معادله (۵-۶)، اساس نظریه الکترومغناطیس را تشکیل می‌دهند. از این معادلات می‌توان برای توضیح و پیش‌بینی تمام پدیده‌های ماکروسکوپی الکترومغناطیسی استفاده کرد.

اگرچه چهار معادله ماکسول در معادلات (الف ۵۳-۷، ب، پ و ت) سازگار هستند لیکن همه آنها از یکدیگر مستقل نمی‌باشند. در واقع، دو معادله دیورژانس، معادلات (ب ۵۳-۷ و ت) از دو معادله کرل، معادلات (الف ۵۳-۷ و ب) با استفاده از معادله پیوستگی، معادله (۷-۴۸)، قابل استخراج هستند (مسئله ۷-۱۱ را ببینید). چهار بردار اساسی میدان $\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{B}, \mathbf{H}$ (هر کدام با سه مؤلفه) دوازده مجهول را نمایش می‌دهند. دوازده معادله عددی برای تعیین این دوازده مجهول مورد نیاز است. معادلات لازم توسط دو معادله برداری کرل و دو رابطه اساسی برداری $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ و $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu$ فراهم می‌شوند، هر معادله برداری، معادل سه معادله عددی است.

۳-۱-۷ شکل انتگرالی معادلات ماکسول

چهار معادله ماکسول در (الف ۵۳-۷، ب، پ و ت)، معادلات دیفرانسیلی هستند که در هر نقطه از فضا صادق می‌باشند. به‌هنگام توضیح پدیده‌های الکترومغناطیسی در محیط‌های فیزیکی، با اشیاء محدودی دارای شکل‌ها و مرزهای مشخص سروکار داریم. لذا مناسب‌تر است شکل‌های دیفرانسیلی را به شکل‌های انتگرالی معادل تبدیل نماییم. انتگرال سطحی دو طرف معادلات کرل در معادلات (الف ۵۳-۷) و (ب ۵۳-۷) را روی سطح باز S و مسیر C گرفته و قضیه استوکس را به‌کار می‌بریم، به‌دست می‌آید

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} \quad (\text{الف } ۵۴-۷)$$

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{s} \quad (\text{ب } ۵۴-۷)$$

با گرفتن انتگرال حجمی از دو طرف معادلات دیورژانس، معادلات (ب ۵۳-۷) و (ت ۵۳-۷)، روی حجم V با سطح بسته S و استفاده از قضیه دیورژانس داریم

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \int_V \rho \, dv \quad (\text{پ } ۵۴-۷)$$

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (\text{ت } ۵۴-۷)$$

مجموعه چهار معادله (الف ۵۴-۷، ب، پ و ت)، شکل انتگرالی معادلات ماکسول هستند. می‌بینیم که معادله (الف ۵۴-۷)، همان معادله (۷-۲)، یعنی عبارت قانون فاراده در القای الکترومغناطیسی است. معادله (ب ۵۴-۷)، تعمیم قانون مداری آمپر داده‌شده در معادله (۶-۷۸) است، که تنها در میدانهای مغناطیسی ساکن به‌کار می‌رود. توجه داشته باشید که چگالی جریان \mathbf{J} می‌تواند شامل چگالی جریان انتقالی ρu ، ناشی از حرکت توزیع بارهای آزاد، و همچنین چگالی جریان هدایتی $\sigma \mathbf{E}$ ناشی از حضور میدان الکتریکی در محیط هادی باشد. انتگرال سطحی \mathbf{J} ، جریان I است که از سطح باز S عبور می‌کند.

معادله (ب ۵۴-۷) را می‌توان به‌صورت قانون گوس شناسایی کرد؛ قانونی که به‌طور وسیعی در الکتریسیته ساکن مورد استفاده قرار می‌گیرد و در حالت تغییرپذیر با زمان نیز به‌همان صورت باقی می‌ماند. انتگرال حجمی ρ برابر بار کل Q محصور شده در سطح S است. در ارتباط با معادله (ت ۵۴-۷) هیچ قانون خاصی وجود ندارد؛ اما در مقایسه آن با معادله (ب ۵۴-۷) نتیجه می‌گیریم که هیچ بار مغناطیسی مجزائی وجود ندارد و کل شار مغناطیسی خارج‌شونده از هر سطح بسته صفر است. هر دو شکل دیفرانسیلی و انتگرالی معادلات ماکسول را به‌منظور مراجعه آسان، در جدول ۷-۲ جمع‌آوری نموده‌ایم. بدیهی است در موارد تغییرناپذیر با زمان این معادلات به روابط اساسی در جدول ۷-۱ در مورد مدل‌های الکتریسیته ساکن و مغناطیس ساکن تبدیل می‌شوند.

مقادیر	شکل انتگرالی	شکل دیفرانسیلی
قانون فاراد	$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt}$	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$
قانون مداری آمپر	$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}$	$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$
قانون گوس	$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = Q$	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$
عدم وجود بار مغناطیسی مجزا	$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0$	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

مثال ۵-۷ یک منبع ولتاژ v_C با دامنه V و فرکانس زاویه‌ای ω و $v_C = V \sin \omega t$ به دو سر یک خازن موازی صفحه‌ای C_1 مطابق شکل ۷-۷ متصل شده است. (الف) تحقیق کنید که جریان جابجایی در خازن همان جریان هدایتی در سیمهاست. (ب) شدت میدان مغناطیسی را در فاصله r از سیم تعیین کنید.

حل

(الف) جریان هدایتی در سیم هادی برابر است با

$$i_C = C_1 \frac{dv_C}{dt} = C_1 V \omega \cos \omega t \quad (A)$$

در یک خازن صفحه‌ای موازی با سطح A ، فاصله صفحات d و محیط دی‌الکتریک با گذردهی ϵ ظرفیت برابر می‌شود با

$$C_1 = \epsilon \frac{A}{d}$$

با ولتاژ v_C وصل شده بین صفحات، شدت میدان الکتریکی یکنواخت E موجود در دی‌الکتریک برابر است با $E = v_C/d$ (از اثرات لبه‌ای صرف‌نظر شده است) و از آنجا

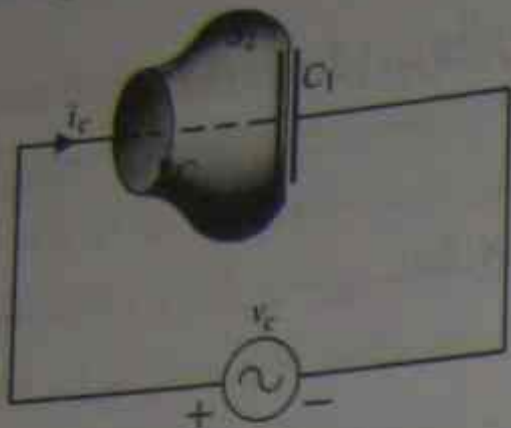
$$D = \epsilon E = \epsilon \frac{V}{d} \sin \omega t$$

پس، جریان جابجایی برابر است با

$$i_D = \int_A \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} = \left(\epsilon \frac{A}{d} \right) V \omega \cos \omega t$$

$$= C_1 V \omega \cos \omega t = i_C \quad \text{سادگی اثبات شد}$$

(ب) شدت میدان مغناطیسی در فاصله r از سیم هادی با بکارگیری قانون مداری آمپر تعمیم یافته، معادله (۷-۵۴) ب) در مورد مسیر C در شکل ۷-۷ پیدا می‌شود. در سطح باز



شکل ۷-۷ یک خازن صفحه‌ای موازی که به منبع ولتاژ v_C متصل شده است (مثال ۷-۵)

نمونه با لبه C می‌توان انتخاب نمود: (۱) یک سطح دیسکی مسطح S_1 ، (۲) سطح منحنی S_2 که از محیط دی‌الکتریک می‌گذرد. تقارن حول سیم ثابت بودن H_ϕ در طول مسیر C را تضمین می‌کند. انتگرال خطی سمت چپ معادله (۷-۵۴) برابر است با

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r H_\phi$$

در مورد سطح S_1 ، تنها جمله اول سمت راست معادله (۷-۵۴) غیر صفر است. زیرا هیچ باری در امتداد سیم ذخیره نمی‌شود و در نتیجه، $D = 0$.

$$\int_{S_1} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = i_C = C_1 V \omega \cos \omega t$$

چون سطح S_2 از محیط دی‌الکتریک می‌گذرد، هیچ جریان هدایتی از S_2 عبور نمی‌کند. اگر انتگرال سطحی دوم موجود نمی‌بود، سمت راست معادله (۷-۵۴) صفر می‌شد و این مطلب به تناقض منجر می‌گردید. شمول جمله جریان جابجایی توسط ماکسول، این تناقض را برطرف می‌نماید. به طوری که در بند (الف)، نشان دادیم، $i_D = i_C$. از این رو چه سطح S_1 یا سطح S_2 انتخاب شود، نتیجه یکسانی به دست می‌آید. با مساوی قرار دادن دو انتگرال پیشین در می‌یابیم

$$H_\phi = \frac{C_1 V \omega \cos \omega t}{2\pi r} \quad (A/m)$$

۴-۷ توابع پتانسیل

در بخش ۶-۳، به دلیل طبیعت سلونوئیدی B ($\nabla \cdot B = 0$)، مفهوم پتانسیل مغناطیسی برداری A معرفی گردید:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (T)$$

(۷-۵۵)

اگر معادله (۷-۵۵) در شکل دیفرانسیلی قانون فاراده، معادله (۷-۱)، جاگذاری شود، به دست می آوریم

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{A})$$

یا

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (۷-۵۶)$$

چون مجموع دو کمیت برداری داخل پرانتز معادله (۷-۵۶) بدون کرل است، می تواند به صورت گرادینان یک کمیت عددی بیان شود. به منظور سازگاری با تعریف پتانسیل الکتریکی عددی V در معادله (۲-۴۳) در الکتریسیته ساکن، می نویسیم

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla V$$

و از روی آن به دست می آوریم

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (\text{V/m}) \quad (۷-۵۷)$$

در حالت ساکن، $\partial \mathbf{A} / \partial t = 0$ ، و معادله (۷-۵۷) به $\mathbf{E} = -\nabla V$ ساده می شود. از این رو \mathbf{E} فقط از روی V و \mathbf{B} از روی \mathbf{A} ، با استفاده از معادله (۷-۵۵) قابل تعیین است. در میدانهای تغییرپذیر با زمان، \mathbf{E} به V و \mathbf{A} هر دو وابسته است؛ یعنی یک شدت میدان الکتریکی می تواند از تجمع بار از طریق جمله $-\nabla V$ و از میدانهای مغناطیسی تغییرپذیر با زمان از طریق جمله $-\partial \mathbf{A} / \partial t$ حاصل شود. از آنجائی که \mathbf{B} نیز به \mathbf{A} وابسته است، در نتیجه \mathbf{E} و \mathbf{B} به هم تزیوج شده اند.

می توان ملاحظه کرد که میدان الکتریکی معادله (۷-۵۷) از دو قسمت تشکیل یافته است: قسمت اول، $-\nabla V$ ، ناشی از توزیع بار ρ ؛ و قسمت دوم، $-\partial \mathbf{A} / \partial t$ ، ناشی از جریان تغییرپذیر با زمان \mathbf{J} . ترغیب می شویم با استفاده از (۲-۶۱)، V را از روی ρ بیابیم:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho}{R} dv' \quad (۷-۵۸)$$

و \mathbf{A} را با استفاده از معادله (۶-۲۳) پیدا کنیم:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}}{R} dv' \quad (۷-۵۹)$$

۷-۴ تابع پتانسیل

اما دو معادله اخیر تحت شرایط سکون به دست آمدند، و در واقع V و \mathbf{A} داده شده در آنجا، جوابهای معادلات پواسون به ترتیب، معادلات (۲-۶) و (۶-۲۱) بودند. این جوابها خود ممکن است وابسته به زمان باشند، زیرا ρ و \mathbf{J} می توانند توابعی از زمان باشند، اما در مورد آنها از اثرات تأخیر زمانی مربوط به سرعت محدود انتشار میدانهای الکترومغناطیسی تغییرپذیر با زمان، صرف نظر می شود. وقتی ρ و \mathbf{J} باهستگی با زمان تغییر می کنند (در فرکانسهای بسیار کم) و محدوده مورد نظر R در مقایسه با طول موج کوچک است، مجاز هستیم از معادلات (۷-۵۸) و (۷-۵۹) در معادلات (۷-۵۵) و (۷-۵۷) برای یافتن میدانهای شبه ساکن استفاده کنیم. این مطلب را دوباره در زیربخش ۷-۷-۲ مورد بحث قرار خواهیم داد.

میدانهای شبه ساکن، تقریبی هستند. ملاحظه آنها از نظریه میدان به نظریه مدار منتهی می گردد. اما وقتی فرکانس منبع بالاست و محدوده مورد نظر در مقایسه با طول موج دیگر کوچک نیست، حل شبه ساکن کافی نخواهد بود. اثرات تأخیرهای زمانی، مانند مورد تشعشع الکترومغناطیسی از آنتن ها باید به حساب آید. به هنگام مطالعه حل معادلات موج، این نکات به صورت کاملتر مورد بحث قرار خواهد گرفت.

گیریم معادلات (۷-۵۵) و (۷-۵۷) را در معادله (۷-۵۳) ب جایگزین نموده و از روابط اساسی $\mathbf{H} = \mathbf{B} / \mu$ و $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ استفاده کنیم. داریم

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \mu \mathbf{J} + \mu \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(-\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \quad (۷-۶۰)$$

که در آن، محیط همگن فرض شده است. با بخاطر آوردن اتحاد برداری مربوط به $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A}$ در معادله (۶-۱۷ الف)، معادله (۷-۶۰) را به صورت زیر می توان نوشت

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu \mathbf{J} - \nabla \left(\mu \epsilon \frac{\partial V}{\partial t} \right) - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}$$

یا

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J} + \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu \epsilon \frac{\partial V}{\partial t} \right) \quad (۷-۶۱)$$

حال، می دانیم تعریف یک بردار به مشخص کردن کرل و دیورژانس آن، هر دو، نیاز دارد. اگرچه کرل \mathbf{A} در معادله (۷-۵۵) با \mathbf{B} نشان داده می شود، اما هنوز در انتخاب دیورژانس \mathbf{A} آزاد هستیم. گیریم

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu \epsilon \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad (۷-۶۲)$$

که باعث می شود جمله دوم سمت راست معادله (۷-۶۱) صفر شود، بنابراین به دست می آید

