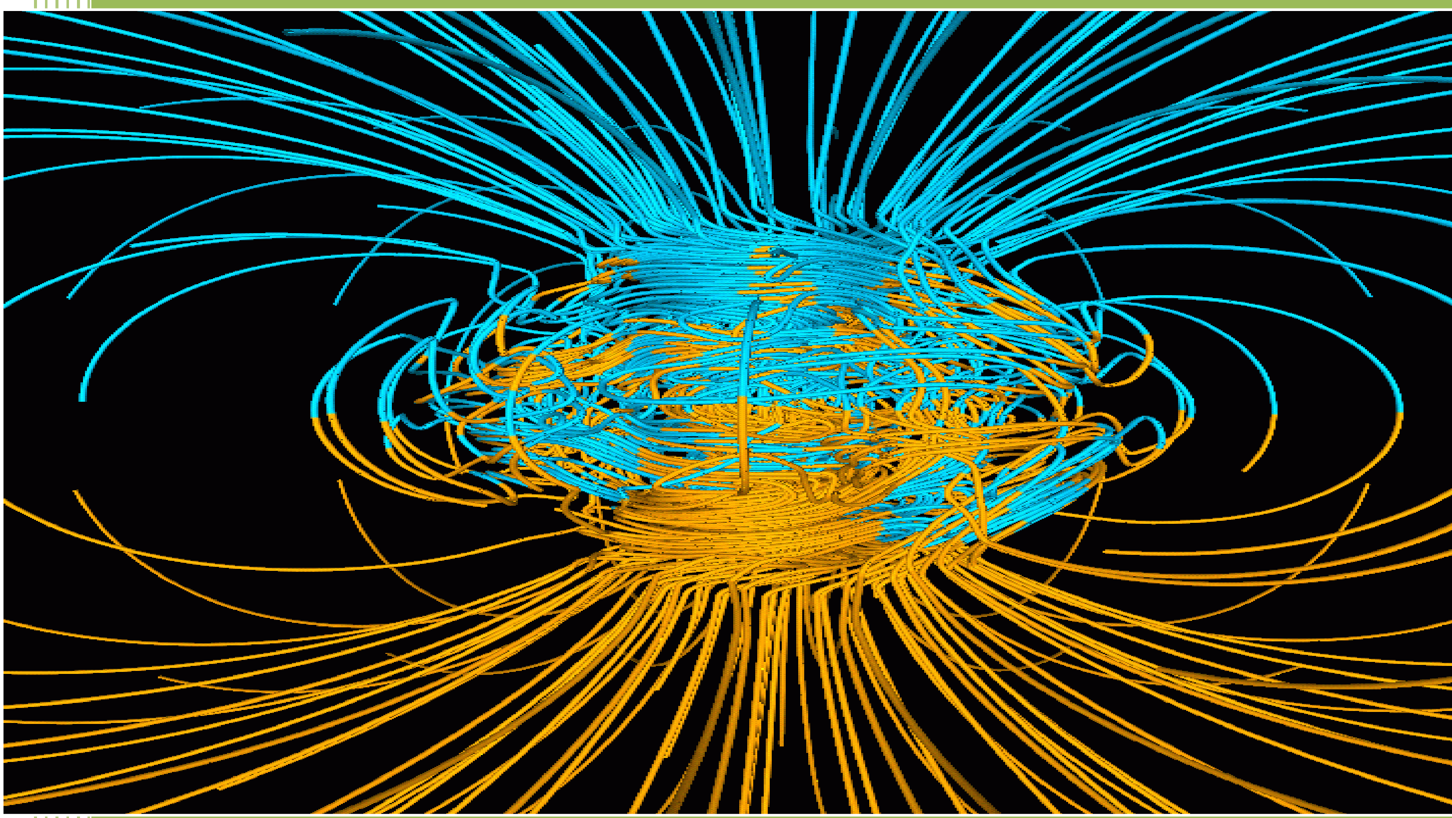
باشگاه مهندسان سمنان

جزوه الکترومغناطیس-دانشگاه سمنان



استاد مربوطه: دکتر رضایی

تهیه و تنظیم: ایمان شریعت پناهی

اسکن جزوه: محمدرضا خالصی

فصل پنجم و ششم: جریان های الکتریکی و میدان های مغناطیسی

Subject:
Year. Month. Date. ( ) 89/2/11

* فصل 5 :

"جریان های الکتریکی" DC (میدان الکتریکی ساکن)

($V=RI$)

جریان هدایتی در هادی ها، نیمه هادی ها ناشی از حرکت ذرات الکترونها یا حفره هاست. جریان هدایتی از قانون اهم و رابطه آن پیروی می کند. "اعمال میدان الکتریکی" نیروی الکترونهای لایه ظرفیت بطور منظم جریان ایجاد می کند. سرعت حرکت الکترونها در هادی های بسیار خوب بسیار کم و در حدود $10^{-3} - 10^{-4}\ m/s$ است. زیرا در مسیر حرکت خود مرتباً با هسته برخورد کرده و مقداری از انرژی خود را از دست می دهد.

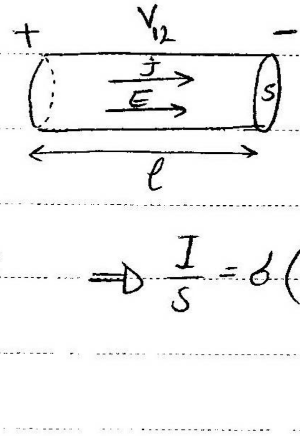
جریان : $\Delta I = \dfrac{\Delta Q}{\Delta t}$

"چگالی جریان" : $J = \dfrac{\Delta I}{\Delta S}$ $\left(\dfrac{A}{m^2}\right)$ واحد

$I = \int_S J\, ds \Rightarrow J = \underbrace{N}_{\text{تعداد}} q \underbrace{u}_{\text{سرعت حامل بار}} \Rightarrow J = \overset{Nq}{\rho}\cdot u \quad , \quad u = -\mu_e E$

$\Rightarrow J = -\rho_e \mu_e E \quad , \quad \sigma = -\rho_e \mu_e$ رسانندگی : $\Rightarrow J = \sigma E$

با بررسی رابطه در سیمی به طول l و سطح مقطع S :



$V_{12} = E \cdot l \quad , \quad J = \sigma E$

$I = \int_S J\, ds = JS \Rightarrow \dfrac{I}{S} = \sigma\left(\dfrac{V_{12}}{l}\right) \Rightarrow V_{12} = \dfrac{l}{\sigma S} I$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

* مثال) مقاومت DC سیم بطول $l=100^m$ به شعاع $a=0/2^{mm}$ از مس (آهن) را بدست آورید.

$\sigma_{cu}=(5,8\times10^{7})$

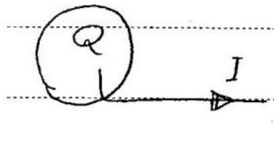
$\sigma_{Fe}=(10^{7})$

$$R_{cu}=\frac{l}{\sigma_{cu}\cdot S}=\frac{100}{5/8\times10^{7}\times(4\times10^{-8}\pi)}\cong 21,96\ \Omega$$

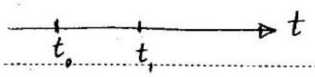
$$R_{Fe}=\frac{l}{\sigma_{Fe}\cdot S}\cong 127,63\ \Omega$$

* معادله پیوستگی:

یعنی ما جریان خالص به سمت خارج است.



$$I=\oint_S J\cdot ds=-\frac{dQ}{dt}=-\frac{d}{dt}\int_v \rho\, dv$$



$$\int_v \nabla\cdot J\, dv=-\int_v \frac{\partial\rho}{\partial t}\, dv$$

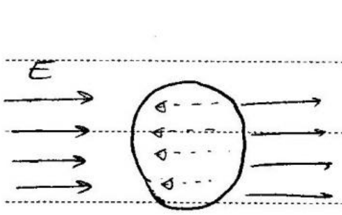
$Q(t_0)>Q(t_1)>\dots$

$$\nabla\cdot J=-\frac{\partial\rho}{\partial t}$$ معادله پیوستگی (نقطه‌ای):

حالت خاص DC: $\nabla\cdot J=0$

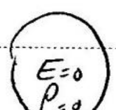
در جریانهای دائمی (DC) چگالی بار با زمان تغییری نمی‌کند و $\frac{\partial\rho}{\partial t}$ در این صورت ∇J هم صفر می‌شود به عبارت

جریان الکتریکی DC، بدون دیورژانس است.



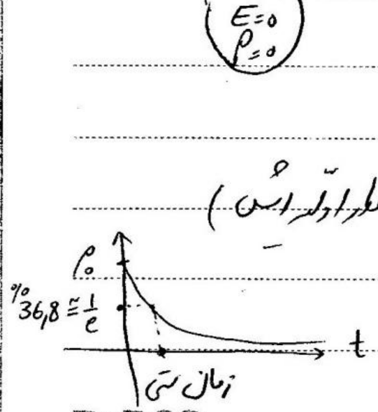
$$\nabla\cdot J=\nabla\cdot\sigma E=\sigma\nabla\cdot E=-\frac{\partial\rho}{\partial t}\qquad \nabla\cdot E=\frac{\rho}{\epsilon}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\sigma}{\epsilon}\rho=0\Rightarrow \boxed{\rho=\rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\epsilon}t}}$$



$$\tau=\frac{\epsilon}{\sigma}=1,52\times10^{-19}$$

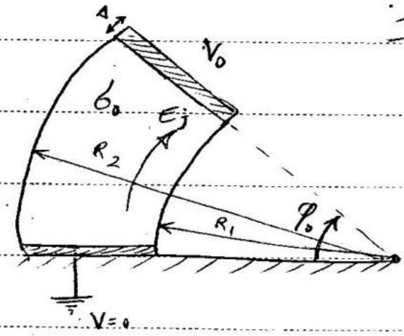
زمان ثابت، زمانی است که چگالی بار اولیه به $\frac{1}{e}$ خود کاهش یابد (37% مقدار اولیه‌اش)



PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

* مثال) صفحه‌ای از جنس هادی با رسانایی σ_0 و ضخامت کم ریخته شده و اختلاف پتانسیل V_0 به دو طرف آن اعمال می‌گردد، تابع پتانسیل را در این صفحه نازک بدست آورده و مقاومت آن را تعیین کنید:



$\nabla^2 V = 0 \qquad : V(r,\varphi,z) \qquad$ (مختصات استوانه‌ای)

$V = A\varphi + B \Rightarrow \begin{cases} V(0)=0 \to & A = \dfrac{V_0}{\varphi_0} \\ V(\varphi_0)=V_0 \to & B=0 \end{cases}$

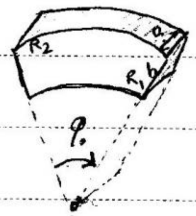
$$\Rightarrow \boxed{V = \frac{V_0}{\varphi_0}\cdot\varphi}$$

$E = -\nabla V = \dfrac{-1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial \varphi}\hat{a}_\varphi = \dfrac{-V_0}{\varphi_0}\dfrac{1}{r}\cdot\hat{a}_\varphi \quad , \quad J = \sigma_0 E \Rightarrow \boxed{J = \dfrac{V_0\sigma_0}{\varphi_0}\cdot\dfrac{1}{r}\cdot\hat{a}_\varphi}$

$R = \dfrac{V}{I} \Rightarrow I = \int_s J\,ds = -\dfrac{V_0\sigma_0}{\varphi_0}\int_{R_1}^{R_2}\int_0^{\Delta}\dfrac{\hat{a}_\varphi}{r}\left(-dr\,dz\,\hat{a}_\varphi\right)$

$\Rightarrow I = \dfrac{V_0\sigma_0\Delta}{\varphi_0}\cdot\ln\dfrac{R_2}{R_1} \Rightarrow R = \dfrac{V_0}{I} = \dfrac{\varphi_0}{\sigma\Delta\ln\left(\dfrac{R_2}{R_1}\right)}$

* مثال) مقاومت میله خمیده شکل زیر را بدست آورید:

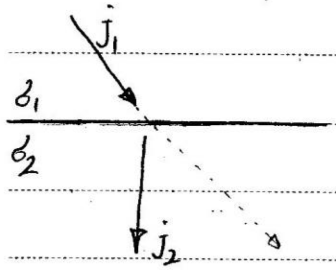


Subject :

Year . Month . Date . ( )

* شرایط مرزی چگالی جریان : وقتی جریان بطور مایل از فصل مشترک بین دو محیط با رسانایی های متفاوت عبور می‌کند، تمام میدان الکتریکی و چگالی آن و در نتیجه چگالی جریان هم در جهت و اندازه تغییر می‌کند.

(می‌خواهیم J_1 و J_2 را با هم مقایسه کنیم)



«انعکاس نور»

$$J = \sigma E$$

$$\begin{cases} \nabla \cdot E = \dfrac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \times E = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \nabla \cdot J = ? = 0 \\ \nabla \times J = ? = 0 \end{cases}$$

تعمیم :

(جریان DC)

انتگرالی :

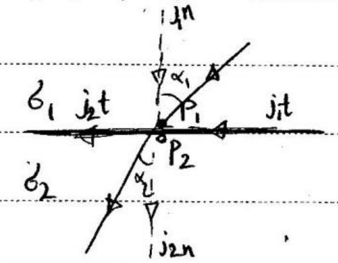
$$\begin{cases} \oint_S J \cdot ds = 0 \\ \oint_C \dfrac{J}{\sigma} dl = 0 \end{cases}$$

$$\nabla \cdot J = 0 \longrightarrow J_{1n} = J_{2n}$$

$$\nabla \times J = 0 \longrightarrow \frac{J_{1t}}{J_{2t}} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$$

89,2,12

* مثال) دو محیط هادی با رسانایی σ_1 و σ_2 توسط فصل مشترکی از هم جدا شده‌اند. چگالی جریان دائم در نقطه P_1 از محیط یک اندازه برابر J_1 و زاویه‌ای به اندازه α_1 می‌سازد. اندازه و جهت چگالی جریان در نقطه P_2 محیط دوم را بیابید.

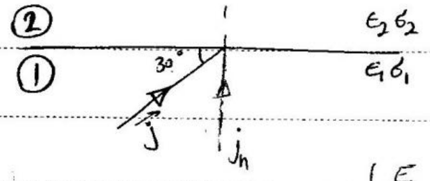


$$\left.\begin{aligned} n: &\ J_1 \cos\alpha_1 = J_2 \cos\alpha_2 \\ t: &\ \sigma_2 J_1 \sin\alpha_1 = \sigma_1 J_2 \sin\alpha_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\tan\alpha_2}{\tan\alpha_1} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$$

$$\vec{J_2} = \vec{J_{2n}} + \vec{J_{2t}} \qquad |\vec{J_2}| = \sqrt{J_{2n}^2 + J_{2t}^2} = \sqrt{(J_2 \sin\alpha_2)^2 + (J_2 \cos\alpha_2)^2}$$

$$J_2 = J_1 \sqrt{\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \sin\alpha_1\right)^2 + \cos^2\alpha_1}$$

* مثال) چگالی جریان J با زاویه 30° نسبت به مرز بین دو محیط ① و ② از محیط یک به محیط دو وارد می‌شود. چگالی بار سطحی در مرز بین دو محیط را بدست آورید.



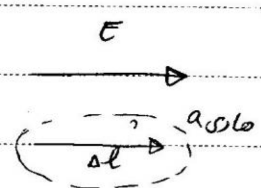
$$\rho_S = D_{n2} - D_{n1} \qquad J_n = \sigma E_n$$

$$\begin{cases} E_{1n} = \dfrac{j_{1n}}{\sigma_1} = \dfrac{j}{2\sigma_1} \Rightarrow D_{1n} = \dfrac{\epsilon_1}{2\sigma_1} j \\[2ex] E_{2n} = \dfrac{j_{2n}}{\sigma_2} = \dfrac{j}{2\sigma_2} \Rightarrow D_{2n} = \dfrac{\epsilon_2}{2\sigma_2} j \end{cases}$$

داده‌های مسئله:
$$\begin{cases} j_{1n} = j \sin 30 = j/2 \\ j_{1n} = j_{2n} = j/2 \end{cases} \Rightarrow \text{بار } \rho_S = D_{2n} - D_{n_1} = \left(\frac{\epsilon_2}{2\sigma_2} - \frac{\epsilon_1}{2\sigma_1}\right)(j)$$

* اتلاف توان:

حرکت الکترون‌های هدایتی درون یک هادی در اثر اعمال یک میدان الکتریکی موجب برخورد الکترون‌ها با اتم‌های موجود در شبکه کریستالی شده که موجب اتلاف توان در شبکه کریستالی می‌شود.



کار انجام شده توسط میدان: $\boxed{\Delta W = qE\Delta l}$

توان: $\boxed{P = \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta W}{\Delta t} = qE \cdot u}$ سرعت

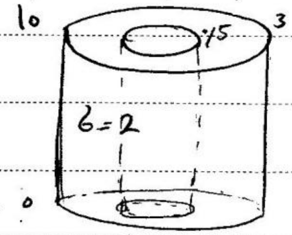
کل توان کلیه الکترون‌های موجود در حجم dv:
$$dp = \sum p_i = E(N_i q_i u_i)\, dv \Rightarrow dp = Ej\, dv \Rightarrow \boxed{\frac{dP}{dv} = E \cdot J}$$

$$P = \int_V E \cdot j \cdot dv = \int_l E \cdot dl \iint_s j\, ds = \boxed{VI = RI^2 = \frac{V^2}{R}}$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

* مثال) در مختصات استوانه‌ای ناحیه $0/5<r<3^m$ و $0<z<10^m$ ، $0<\varphi<2\pi$ از ماده‌ای با رسانایی $\sigma = 2\ S/m$ پر شده است. اگر بخواهیم توان 10^{kW} در ماده به صورت حرارت تلف شود، مقدار V را حساب کنید.



$P=\frac{V^2}{R}$ $\quad R=?$

راه اول: $R=\frac{V}{I}=\frac{\int E\cdot dl}{\underbrace{\iint J\cdot ds}_{\sigma E}} \overset{*}{\Rightarrow} dR=\frac{dl}{\iint \sigma ds} \Rightarrow R=\int_l dR$

راه دوم: $RC=\frac{\epsilon}{\sigma} \Rightarrow C_{\text{واحد طول}}=\frac{2\pi\epsilon}{\ln(b/a)}$ ، $R=\frac{\ln(b/a)}{2\pi\sigma}$

$R_{(10\text{ متر})} = \frac{\ln(3/0/5)}{4\pi} = 0/14258\ \Omega$ ، $V^2=PR=10^4\times 0/01426=142/6$

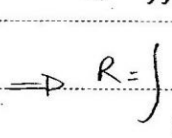
$\Rightarrow \boxed{V=11/94}$

روش اول: فاصله بین دو هادی را به قطعات کوچک دیفرانسیلی به طول dl تقسیم می‌کنیم. سپس مقاومت دیفرانسیلی dR را در رابطه دیفرانسیلی بدست می‌آوریم. ⊛ در نهایت نیز از روی طول قطعه روی dR انتگرال می‌گیریم و به مقدار مقاومت می‌رسیم.

$R=\int\frac{dl}{\iint\sigma ds}$ از طرفی: $\iint \sigma ds=\int_0^{10}\int_0^{2\pi}\sigma r\,d\varphi\,dz=\sigma r(20\pi)=20\pi\sigma r$

$\Rightarrow R=\int\frac{dr}{20\pi\sigma r}=\frac{1}{40\pi}(\ln r)_{0/5}^{3}=0/01426$

مثال) مقاومت بین دو کره هم مرکز به شعاع R_1 و R_2 را بدست آورید که با ماده‌ای با ضریب رسانایی $\sigma=\sigma_0(1+\frac{k}{r})$ پر شده را بدست آورید. اگر σ ساده نشود (مثلاً خطی و وابسته به r بود) هم از روش دوم مثال قبل استفاده می‌کنیم)



$\sigma=\sigma_0(1+\frac{k}{r})$

$R=\int\frac{dl}{\iint\sigma ds} \Rightarrow \iint \sigma ds=\sigma_0(1+\frac{k}{r})r^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$

$=4\pi\sigma_0(r^2+kr)$

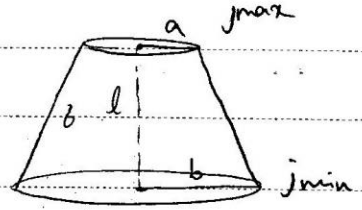
$\Rightarrow R=\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{4\pi\sigma_0(r^2+kr)}=\frac{1}{(4\pi\sigma_0)k}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r^2+kr}=\frac{1}{4\pi\sigma_0 k}\int\left(\frac{dr}{r}-\frac{dr}{r+k}\right)$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$$\Rightarrow R = \frac{1}{4\pi k \sigma_0}\left[\ln\left(\frac{2}{r+k}\right)\right]_{R_1}^{R_2} \Rightarrow R = \frac{1}{4\pi \sigma_0 k}\ln\left[\frac{R_2(R_1+k)}{R_1(R_2+k)}\right]$$

* مثال) طول مخروط ناقص به ارتفاع l و قاعده‌های دارای شعاع های a , b است. ضریب رسانندگی ویژه σ است.
رسانندگی
مقاومت آن را بدست آورید.



$$j = \frac{I}{\pi r^2}, \quad E = j/\sigma = \frac{I}{\pi r^2 \sigma}$$

$$\overset{\triangle}{ABC}: \quad \frac{r-a}{b-a} = \frac{l-z}{l} \Rightarrow z = l\left(1 - \frac{r-a}{b-a}\right)$$

$$dz = \frac{-l}{r-a}\,dr \qquad V = -\int_l^0 E\cdot dl = -\int_l^0 \left(\frac{I\,\hat{a}_z}{\pi r^2 \sigma}\right)(dz\,\hat{a}_z)$$

$$\Rightarrow -\int_l^0 \frac{I\,dz}{\pi r^2 \sigma} = -\int_a^b \frac{I}{\pi \sigma r^2}\left(\frac{-l}{b-a}\right)dr = \frac{Il}{\sigma \pi ab}$$

$$R = \frac{V}{I} = \boxed{\frac{l}{\sigma \pi ab}}$$

حالت خاص $\quad a \simeq \epsilon \sim 0 \qquad R \rightarrow \infty \quad$ خیلی بزرگ

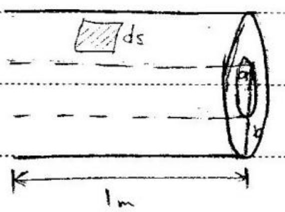
32

89 , 2 , 18

Subject:
Year. Month. Date. ( )

* سوال از فصل ~~3~~ 4

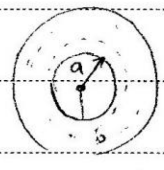
1) بین دو استوانه هادی هم محور به شعاع های a و b از عایقی با ثابت دی الکتریک $\epsilon = \frac{\epsilon_0}{r}$ پر شده است. ظرفیت خازن واحد طول را محاسبه کنید.



$\downarrow Q \quad \downarrow \rho \quad \downarrow E \qquad V = \int E$

$C = \frac{Q}{V}$

$C = \dfrac{1}{\displaystyle\int \frac{dl}{\iint_S \epsilon\, ds}}$ ① $\qquad \frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots$



$R = \displaystyle\int \frac{dl}{\iint_S \sigma ds}$

$\displaystyle\iint_S \epsilon\, ds = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{z=0}^{1} \frac{\epsilon_0}{r}\, r\, d\varphi\, dz = \boxed{2\pi\epsilon_0}$ (واحد طول)

جایگذاری در ①

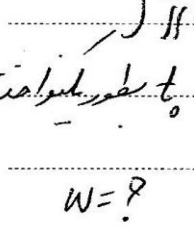
$C = \dfrac{1}{\displaystyle\int \frac{dl}{\iint ds\cdot\epsilon}} = \dfrac{1}{\displaystyle\int \frac{dr}{2\pi\epsilon_0}} \Longrightarrow C = \frac{2\pi\epsilon}{b-a}$

2) کره فلزی بزرگی با رسانایی که ضریب عایقی ϵ_0 به شعاع R مفروض است. بار Q را در لحظه ی t_0 به طور یکنواخت داخل کره ی هم مرکز کوچکی به شعاع a قرار می دهیم. تلفات حرارتی ناشی از این بار را بدست آورید.

$W = ?$

ابتدا C را حساب می کنیم:

$W_{\text{خازن}} = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} Q\cdot V = \frac{1}{2}\cdot\frac{Q^2}{C} \qquad dl = dr$



① $C = \dfrac{1}{\displaystyle\int \frac{dl}{\iint_S \epsilon\, ds}}$ $\quad \displaystyle\iint_S \epsilon\, ds = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi} \epsilon_0 r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \boxed{4\pi\epsilon_0 r^2} \longrightarrow$ در ①

ds المان سطح کره است

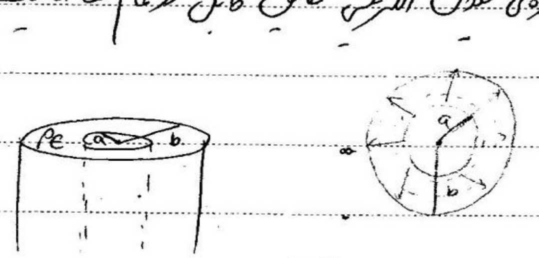
$\Longrightarrow \dfrac{1}{C} = \displaystyle\int_{r=a}^{R} \frac{dr}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_a^R = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{R}\right) \Longrightarrow \boxed{C = 4\pi\epsilon_0\left(\dfrac{1}{\frac{1}{a} - \frac{1}{R}}\right)}$

$\frac{1}{a} > \frac{1}{R}$

تلفات حرارتی کره در لحظه ی t_0 شبیه به حالتی است که خازن اولیه دارای Q باشد و بین از بین تخلیه شود:

انرژی اولیه (Q وجود دارد): $W_1 = \dfrac{Q^2}{2C} = \dfrac{Q^2}{8\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{R}\right) \qquad W_2 = 0 \qquad \Delta W = W_1 - W_2 = \boxed{W_1}$

(3) در حالی هم محور ضریب عایقی ماده‌ی بین دو رسانا چگونه باید تا اندازه‌ی میدان الکتریکی عایق داخل در تمام نقاط یکسان باشد؟



برای میدان یکسان $\longleftarrow$ $\nabla E = 0$

برای آنکه E مستقل از فاصله باشد

باید حاصلضرب $r.\epsilon$ عددی ثابت

باشد یعنی

$\nabla\cdot D = 0$

$$\nabla D = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rD_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial D_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \rightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rD_r) = 0 \qquad \epsilon \propto \frac{1}{r}$$

عدد ثابت

$$rD_r = A \longrightarrow D_r = \frac{A}{r} \rightarrow \vec{D_r} = \frac{A}{r}\cdot\hat{a}_r \qquad E = \frac{D}{\epsilon} = \frac{A}{r\epsilon}\cdot\hat{a}_r = \text{عدد}$$

$$\epsilon \propto \frac{1}{r} \rightarrow \epsilon = \frac{k\epsilon_0}{r}$$

(4) در یک کره عایق چگالی حجمی بارهای پلاریزه یکنواخت و برابر ρ_b است. بردار قطبش سطحی داخل کره را بدست آورید.

$\vec{P}$: بردار قطبش سطحی

$$\rho_b = -\nabla P \xrightarrow{\text{انتگرال}} \iiint_V \rho_b dv = -\iiint_V \nabla P\, dv$$

$$\Rightarrow Q = -\oint_S \vec{P}\cdot ds \Rightarrow \rho_b\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = -\vec{P}(4\pi r^2) \Rightarrow \vec{P_r} = \frac{\rho_b}{3} r$$

فقط در راستای r

چون تقارن کروی است

$$\Rightarrow \vec{P} = -\frac{\rho_b}{3} r\hat{a}_r$$

(5) ثابت دی‌الکتریک نسبی ماده‌ای را که چگالی شار الکتریکی آن 5 برابر پلاریزاسیون است را بدست آورید.

$$\text{①}\ \vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0\vec{E} \ , \quad \vec{D} = \epsilon_0\epsilon_r\vec{E} \qquad \text{فرض: } \vec{D} = 5\vec{P} \qquad \epsilon_r = ?$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon_0\epsilon_r} \ , \quad \vec{D} = 5\vec{P} \Rightarrow E = \frac{5\vec{P}}{\epsilon_0\epsilon_r} \qquad \text{①}: \vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0\vec{E} = 5\vec{P} - \epsilon_0\frac{5\vec{P}}{\epsilon_0\epsilon_r} \Rightarrow$$

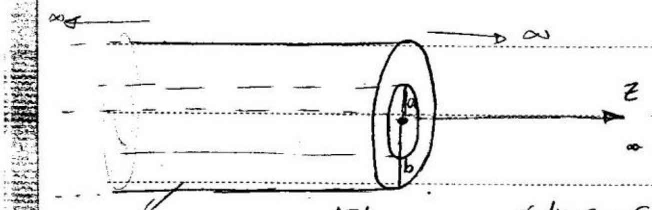
$$\Rightarrow 5\vec{P}\underbrace{\left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right)}_{1/5} = \vec{P} \Rightarrow \qquad 1 - \frac{1}{\epsilon_r} = \frac{1}{5} = 0/2 \Rightarrow \epsilon_r = \frac{10}{8} = \frac{5}{4} = 1/25$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

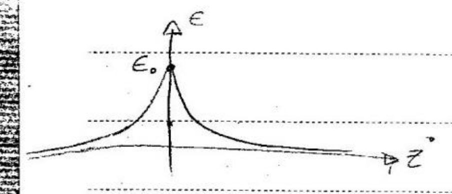
6) کابل هم محوری منطبق بر محور z است. شعاع هادی داخلی و بیرونی به ترتیب a و b است. فضای بین دو رسانا از ماده‌ی عایقی با ضریب عایقی $\epsilon = \epsilon_0 e^{-|z|}$ پر شده است.

ظرفیت خازنی چنین کابلی را با طول ∞ حساب کنید.



با فرض $\epsilon = \epsilon_0 e^{-|z|}$ داریم: $C = \epsilon \frac{A}{d}$

$$① \quad \frac{1}{C} = \int \frac{dl}{\iint_s \epsilon ds} \qquad \iint_s \epsilon ds = \int_{z=-\infty}^{+\infty}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \epsilon\, r d\varphi dz$$



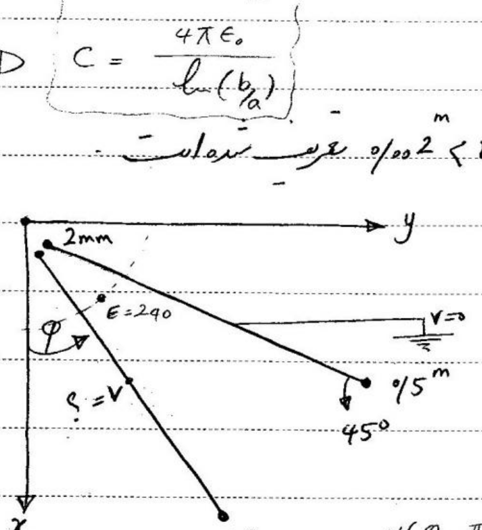
$$\Rightarrow 2\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} \epsilon_0 e^{-|z|} r d\varphi dz = 4\pi\epsilon_0 r = \iint_s \epsilon ds \quad ②$$

$$① , ② \Rightarrow \frac{1}{C} = \int_a^b \frac{dr}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\ln r\right]_a^b = \frac{\ln(b/a)}{4\pi\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{C = \frac{4\pi\epsilon_0}{\ln(b/a)}}$$

7) صفحات هادی کاملی در زوایای $30°$ و $45°$ در بازه‌ی $0/5^m > r > 0/002^m$ تعریف شده است.

اگر صفحه $\varphi = 45°$ زمین باشد پتانسیل صفحه V را بدست آورید.



$$E_\varphi(r = 0/2^m, \varphi = 36°) = 240 \ V/m$$

$$V_\varphi \qquad \nabla^2 V = 0 \longrightarrow V = A\varphi + B$$

$$V(\varphi = \tfrac{\pi}{4}) = A(\tfrac{\pi}{4}) + B \qquad E_\varphi = -\nabla V \xrightarrow{\text{در راستای}} -\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial v}{\partial \varphi}\hat{a}_\varphi = \frac{-A}{r}\hat{a}_\varphi$$

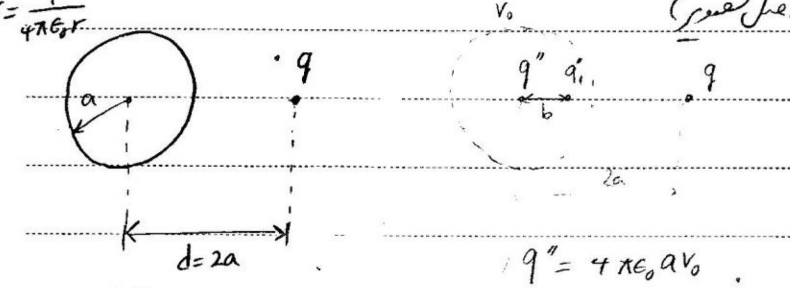
$$\Rightarrow \frac{-A}{0/2} = 240 \Rightarrow A = -48 \qquad V = -48\varphi + B \longrightarrow -48(\tfrac{\pi}{4}) + B = 0 \rightarrow B = +12\pi$$

$$\Rightarrow V = -48\varphi + 12\pi \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6}: \quad V = -48(\tfrac{\pi}{6}) + 12\pi = \boxed{4\pi}\ v$$

8) کره‌ای هادی به شعاع a به پتانسیل $V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$ متصل است. بار نقطه‌ای q به فاصله 2a از مرکز کره قرار گرفته است.

نیروی وارده از کره بر بار نقطه‌ای را حساب کنید. (اصل تصویر)

$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$

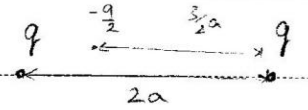


$$q' = -\frac{a}{d}q = -\frac{q}{2}$$

$$b = \frac{a^2}{d} = \frac{a}{2}$$

$$q'' = 4\pi\epsilon_0 a V_0$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

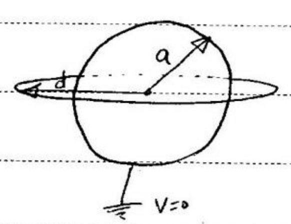


$$F_1 = k\frac{qq}{(2a)^2} = \frac{kq^2}{4a^2}$$

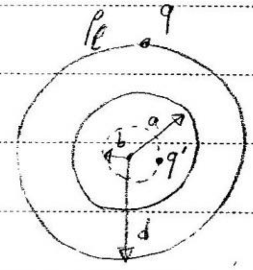
$$F_2 = \frac{kq(-q/2)}{(\frac{3}{2}a)^2} = \frac{-2kq^2}{36a^2} \implies F = \sum F = \frac{kq^2}{36a^2}$$

89, 2, 19

9) حلقه‌ای با چگالی بار خطی یکنواخت ρ_ℓ ، به شعاع d هم مرکز با کره هادی به شعاع a قرار دارد. بار تصویر را بدست آورید.



نمای بالا $\longrightarrow$



$$\begin{cases} q' = -\frac{a}{d}\, q \\ b = \frac{a^2}{d} \end{cases}$$

$q = \rho_\ell \cdot \ell = \rho_\ell (2\pi d)$

$q' = \rho_\ell' \cdot 2\pi b$

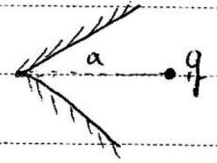
$$\rho_\ell' = \frac{q'}{2\pi b} = \frac{-q \cdot a/d}{2\pi \frac{a^2}{d}} = \frac{-q}{2\pi a} = -\frac{\rho_\ell \cdot 2\pi d}{2\pi a}$$

$$\implies \rho_\ell' = \rho_\ell \underbrace{\left(\frac{d}{a}\right)}_{>1} \implies \rho_\ell' > \rho_\ell$$

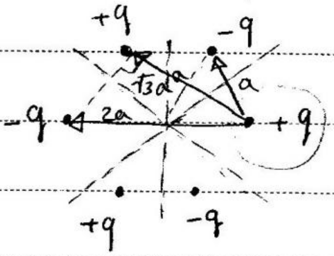
است

10) دو صفحه رسانا با یکدیگر زاویه 60° تشکیل می‌دهند. بار $+q$ را از ∞ تا فاصله a از محل برخورد دو صفحه روی نیمساز آن قرار می‌دهیم. انرژی لازم را بدست آورید.

$\frac{360}{\alpha} - 1 \longrightarrow$ تعداد تصاویر: $\frac{360}{60} - 1 = 5$



اصل تصویر



فرض می‌کنیم این 5 بار وجود داشتند و $+q$ را در محل قرار دادیم

$w = \frac{1}{2} qV \implies$ اگر پتانسیل را حساب کنیم، انرژی را بدست می‌آوریم

$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a}$ پس فاصله بار $+q$ تا سه بار بالایی بدست می‌آوریم

$$\implies V = 2\left(\frac{-q}{4\pi\epsilon_0 a}\right) + 2\left(\frac{+q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{3}a}\right) + \left(\frac{-q}{4\pi\epsilon_0 2a}\right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a}\underbrace{\left(-2 + \frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2}\right)}_{-1,345}$$

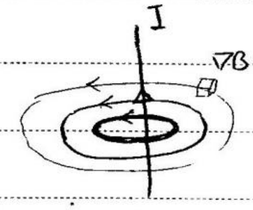
$$\implies w = \frac{1}{2} qV = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 a_0}(-1,345)$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

«فصل ششم»

* میدان‌های مغناطیسی ساکن : $\frac{\partial}{\partial t}=0$



در هر راستای B ، عمود است

روی هر حلقه ، مقدار B ثابت است.

نیروی الکتریکی وارد بر بار آزمون q در میدان الکتریکی تابعی از مکان بار است. داریم : $F_e = q.E$ (N)

وقتی این بار آزمون در یک میدان مغناطیسی در حال حرکت باشد، نیروی دیگری بر آن اعمال می‌شود که اندازه آن با مقدار بار q ، مولفه سرعت در جهت عمود بر آن متناسب است. جهت آن در هر نقطه بر بردار سرعت بار آزمون و نیز بر جهتی ثابت در آن نقطه عمود است.

$F_m \propto q$

نیروی F_m ، یک نیروی مغناطیسی است و با تعریف کمیت جدید ، میدان برداری به نام «چگالی شار مغناطیسی» توصیف می‌شود که هم اندازه ثابت و هم جهت ثابت را مشخص می‌کند.

(نیوتن N) $\boxed{F_m = qV\times\vec{B}} \rightarrow (T \text{ یا } \frac{wb}{m^2})$ تسلا

اگر : $V \parallel B \Rightarrow F_m = 0$

معادله نیروی لورنتس : کل $F_T = F_e + F_m \Rightarrow qE + qV\times\vec{B} \Rightarrow \boxed{F_T = q(E + V\times\vec{B})}$

شار : $\varphi = \int B.ds$ شار مغناطیسی گذرنده از سطح

چون خطوط میدان مغناطیسی بسته هستند، اگر سطح بسته‌ای را در نظر بگیریم هر خط شار وارد شده به آن ، از آن خارج هم می‌شود. به عبارتی کل شار خارج شده از یک سطح بسته برابر صفر است :

$\Rightarrow \oint B.ds = 0$

دی‌الکتریک $\epsilon \simeq \mu$ در مغناطیس

Subject:
Year. Month. Date. ( )

* اصول موضوع مغناطیس ساکن :

$$\begin{cases} \nabla \cdot B = 0 \\ \nabla \times B = \mu_0 J \end{cases}$$

چگالی جریان

نفوذپذیری فضای آزاد : $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \ (\frac{H}{m})$

$$\nabla \cdot \nabla \times B = 0 \Rightarrow \boxed{\nabla \cdot J = 0}$$

برای چگالی بار الکتریکی ρ هیچ مشابه مغناطیسی وجود ندارد.

به عبارتی $\oint B ds = 0$ بیانی از پایستگی شار مغناطیسی است.

با تقسیم اجسام به اجزای کوچک تا ابعاد اتمی نیز هر کدام دارای یک قطب شمال (N) و جنوب (S) می‌باشند. به عبارت دیگر قطب‌های مغناطیسی تنها نداریم.

$$\nabla \cdot B = 0 \longrightarrow \oint_s B \cdot ds = 0$$

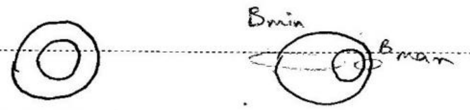
$$\nabla \times B = \mu_0 J \xrightarrow{\text{انتگرال}} \int_s \nabla \times B \cdot ds = \int_s \mu_0 J ds \xrightarrow{\text{قضیه استوکس}} \boxed{\oint_c B \cdot dl = \mu_0 I}$$

قانون آمپر :

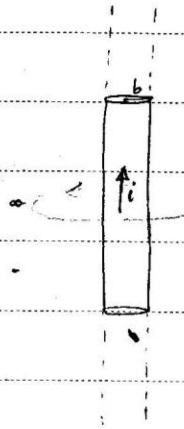
H : شدت میدان مغناطیسی $\Longleftarrow$ $\oint_c H \cdot dl = I$

* گردش شار مغناطیسی در فضای آزاد به دور هر مسیر بسته، برابر جریان کل گذرنده از سطح محصور شده توسط این مسیر است.

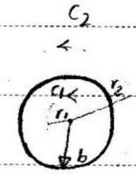
$\longleftarrow$ کاربرد قانون آمپر: تعیین چگالی شار مغناطیسی B ناشی از جریان I است هنگامی که در مسیر بسته‌ی c، اندازه B ثابت باشد.



* مثال) یک هادی مستقیم بی‌نهایت طویل با مقطع مدور به شعاع b جریان i را حمل می‌کند. چگالی شار مغناطیسی را در درون و بیرون هادی تعیین کنید.



$r_1 < b < r_2$



مسئله دارای تقارن استوانه‌ای است. و لذا استفاده از قانون آمپر مزیت دارد. اگر هادی را در امتداد محور z قرار دهیم چگالی شار مغناطیسی B در جهت φ بوده و در امتداد هر مسیر دایره‌ای به دور محور z ثابت خواهد بود.

$$B_1 = \hat{a}_\varphi B_{\varphi_1} \qquad dl = \hat{a}_\varphi r_1 d\varphi$$

$$\Rightarrow \oint_{c_1} B \cdot dl = \int_{\varphi=0}^{2\pi} B_{\varphi_1} \cdot r_1 d\varphi = \boxed{2\pi r_1 B_{\varphi_1}} \Rightarrow 2\pi r_1 B_{\varphi_1} = \mu_0 i_1$$

جریان گذرنده از حلقه داخلی

$$\Rightarrow \boxed{B_{\varphi_1} = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi r_1}} \qquad \vec{B}_{\varphi_1} = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi r_1} \hat{a}_\varphi$$

تناسب : $\boxed{i_1 = \frac{\pi r_1^2}{\pi b^2} \cdot i}$

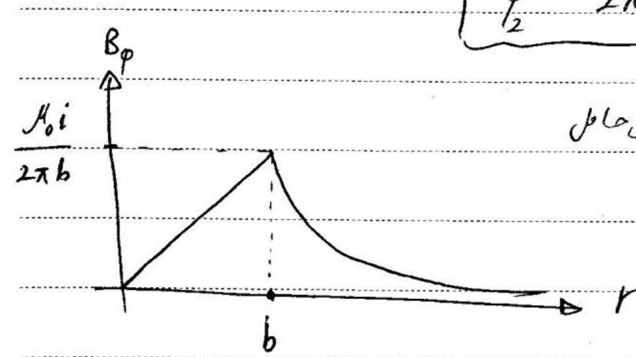
$$\Rightarrow \boxed{i_1 = \left(\frac{r_1}{b}\right)^2 i} \ ⊛$$

جایگذاری ⊛ : $\boxed{B_1 = \frac{\mu_0 r_1 i}{2\pi b^2} \hat{a}_\varphi \quad : r_1 < b}$

$$\begin{cases} B_2 = \hat{a}_\varphi \cdot B_{\varphi_2} \\ dl = \hat{a}_\varphi \cdot r_2 d\varphi \end{cases} \Rightarrow 2\pi r_2 B_{\varphi_2} = \mu_0 i$$

هر چه از سیم فاصله بگیریم، میدان ضعیفتر می‌شود

$$\Rightarrow \boxed{B_{\varphi_2} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r_2} \quad : r_2 \geq b}$$



* تذکر : اگر مسئله از هادی استوانه‌ای توپر حامل جریان به لوله مدور نازک حامل جریان سطحی تبدیل شود

توپر

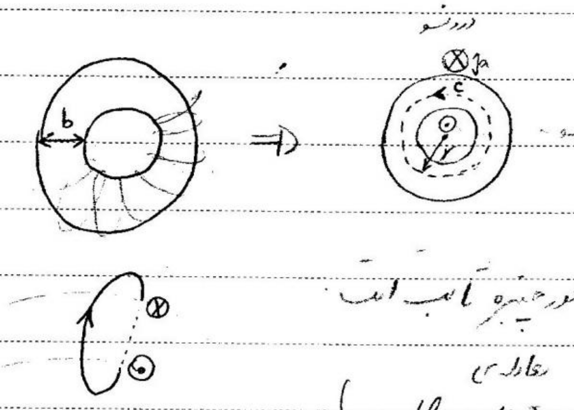
توخالی

$$(\text{توخالی}) \ B = \begin{cases} 0 : r < b \\ \hat{a}_\varphi \frac{\mu_0 b}{r} i_s : r > b \end{cases}$$

جریان سطحی

Subject :
Year . Month . Date . ( )

* مثال) میدان مغناطیسی درون یک سلونوئید چنبره‌ای با هسته هوایی دارای N دور سیم پیچ هم فشرده حامل جریان I را حساب کنید. (شعاع هر دور سیم پیچ a است)



از تقارن استوانه استفاده می‌کنیم

$B = \hat{a}_\varphi B_\varphi$, $B_\varphi = ?$

B فقط دارای مولفه φ است و B در امتداد هر مسیر دایره‌ای حول محور چنبره ثابت است

مسیر دایره‌ای به شعاع r انتخاب می‌کنیم در $b-a < r < b+a$ داریم:

$\oint B\cdot dl = \mu_0 I$

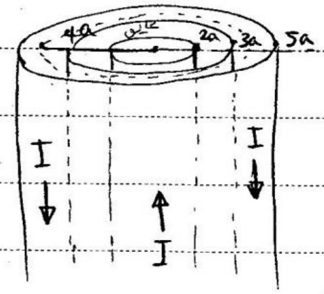
داخل هر سیم، هر چه تعداد دور سیم پیچ بیشتر باشد شار بیشتر می‌شود

$$\oint B\cdot dl = 2\pi r B_\varphi = \mu_0 I N \Rightarrow \boxed{B = \hat{a}_\varphi \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}}$$

برای $r<b-a$ و $r>b+a$ ، $B=0$ است زیرا کل جریان خالص دور زده شده توسط مسیر در این دو ناحیه صفر است.

89/2/25

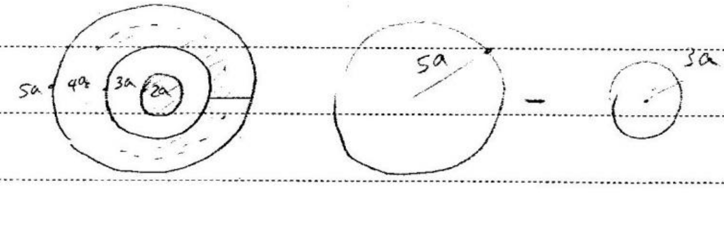
* مثال) جریانی به شدت I از هادی داخلی کابل هم محوری به شعاع 2a می‌گذرد. جریان دیگری در جهت مخالف به همان شدت از پوسته خارجی کابل به شعاع داخلی 3a و شعاع خارجی 5a است می‌گذرد. شدت میدان را در فاصله 4a بدست آورید.



$H(r=4a) = ?$

$\oint H\cdot dl = I'$ → جریان گذرنده از شعاع 4a

$J = \frac{I}{\pi(2a)^2}$



Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$J=\frac{I}{S}=\frac{I}{\pi(5a)^2-\pi(3a)^2}=\frac{I}{16\pi a^2} \qquad I_1=J\left[\pi(4a)^2-\pi(3a)^2\right]=J\,7\pi a^2$$

$$I'=\overset{\oplus}{I}-\overset{\ominus}{I_1}=I-\frac{I}{16\pi a^2}(7\pi a^2)=I-\frac{7}{16}I=\frac{9}{16}I$$

$$\oint_{4a} H\cdot dl=I' \Rightarrow 2\pi 4a\, H=\frac{9}{16}I \Rightarrow \text{اسکالر } \boxed{H=\frac{9I}{128\pi a}}\ ,\ \boxed{\vec{H}=\frac{9I}{128\pi a}\cdot\hat{a}_\varphi}$$

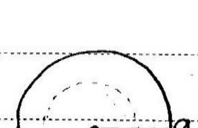
* مثال) اگر در داخل ماده‌ای مغناطیسی با $\mu_r=3$ چگالی شار مغناطیسی $A_0 x\,\hat{a}_z$ (ثابت) باشد. چگالی جریان مغناطیسی را بدست آورید.

$$\oint B\cdot dl=\mu_0 I \qquad \nabla\times B=\mu J \quad , \quad \mu=\mu_0\mu_r$$

$$\nabla\times B=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 0 & 0 & A_0 x \end{vmatrix}=a_x(0)-\hat{a}_y\left(\frac{\partial}{\partial x}A_0 x\right)+\hat{a}_z(0)=\boxed{-A_0\hat{a}_y}=\mu J$$

$$\Rightarrow \boxed{J=\frac{-A_0\hat{a}_y}{3\mu_0}}$$

* مثال) توزیع جریانی با چگالی J مفروض است، $J=\begin{cases}\frac{k}{r}\cdot\hat{a}_z & : 0<r<a \\ 0 & : r>a\end{cases}$ (سیم به شعاع a) شدت میدان مغناطیسی ناشی از آن را در ناحیه $r<a$ بدست آورید.



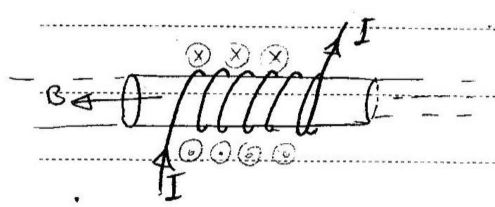
$$\oint_{C} H\,dl=I_{\text{داخل مرز}} \qquad I=\int J\,ds=\int_{r=0}^{r}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\frac{k}{r}\hat{a}_z\, r\,dr\,d\varphi\,\hat{a}_z=\boxed{2\pi kr}$$

C به شعاع r

$$\Rightarrow \oint H\,dl=2\pi kr \Rightarrow (H_\varphi\cdot\hat{a}_\varphi)\cdot(r\,d\varphi\,\hat{a}_\varphi)=2\pi r H_\varphi=2\pi r k \Rightarrow \boxed{H_\varphi=k}$$

$$\boxed{\vec{H}=k\hat{a}_\varphi}$$

* مثال) چگالی شار مغناطیسی درون سیم پیچ طویل با هسته هوایی دارای n دور سیم پیچ فشرده در واحد طول حامل جریان I را تعیین کنید. بدیهی است میدان مغناطیسی در بیرون سلونوئید یا سیم پیچ وجود ندارد.



برای تعیین مقدار B در داخل مسیر مستطیلی به طول l را چنان تشکیل می‌دهیم که بخشی از آن در داخل و بخش دیگر در خارج قرار گیرد.