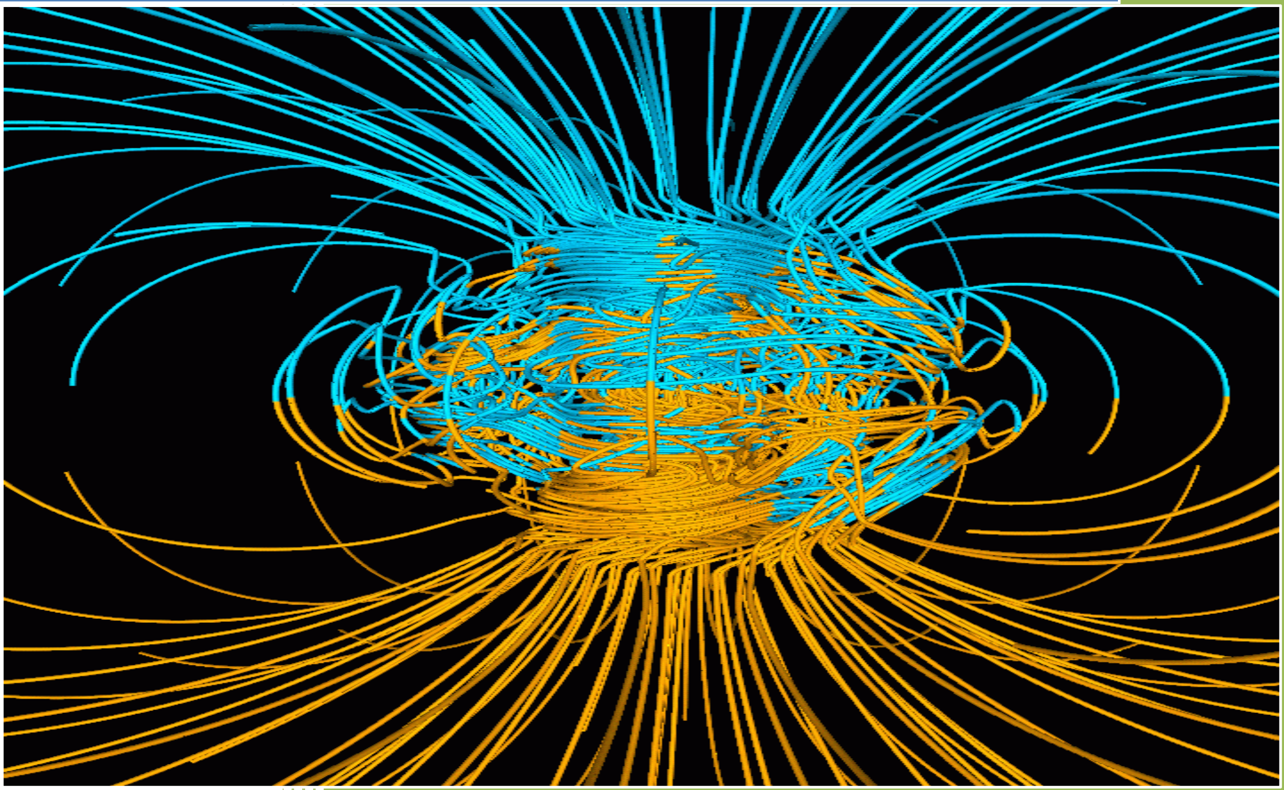
باشگاه مهندسان سمنان

جزوه الکترومغناطیس-دانشگاه سمنان



استاد مربوطه: دکتر رضایی

تهیه و تنظیم: ایمان شریعت پناهی

اسکن جزوه: محمدرضا خالصی

فصل چهارم: پتانسیل مغناطیسی

Www.sem-eng.com

فصل چهارم

. معادلات پواسن و لاپلاس .

$$\begin{cases} \nabla \cdot D = \rho \\ \nabla \times E = 0 \longrightarrow E = -\nabla V \end{cases}$$

$$D = \epsilon E$$

$$\nabla \cdot (\epsilon E) = \rho \Rightarrow \nabla(\epsilon \nabla V) = -\rho \Rightarrow \underline{\nabla^2 V = \frac{-\rho}{\epsilon}} \Big\}$$ پواسون

$$D_{n_1} - D_{n_2} = \rho_s \xrightarrow{\text{اگر } \rho_s = 0} D_{n_1} = D_{n_2} \Rightarrow \rho = 0 \Rightarrow \underline{\nabla^2 V = 0} \Big\}$$ لاپلاس

چون هر دو معادلات دیورژانس و گرادیان شامل مشتقات فضایی مرتبه اول است معادله پواسن یک معادله دیفرانسیل جزئی مرتبه دوم است و در هر نقطه از فضا که مشتقات مرتبه دوم وجود دارد برقرار است.

8 کارتزین:

$$\rho = 0 \qquad \nabla^2 V = \nabla \cdot \nabla V = (\hat{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{a}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{a}_z \frac{\partial}{\partial z}) \cdot (\hat{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{a}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{a}_z \frac{\partial}{\partial z})$$

$$\Rightarrow \nabla^2 V = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right) \longrightarrow -\cancel{\frac{\rho}{\epsilon}}$$ - چون اینجا بار صفر است

استوانه‌ای 8 $$\nabla^2 V = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial V^2}{\partial z^2}$$

کروی 8 $$\nabla^2 V = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R}\left(R^2 \frac{\partial V}{\partial R}\right) + \frac{1}{R^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{R^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}$$

Www.som-eng.com

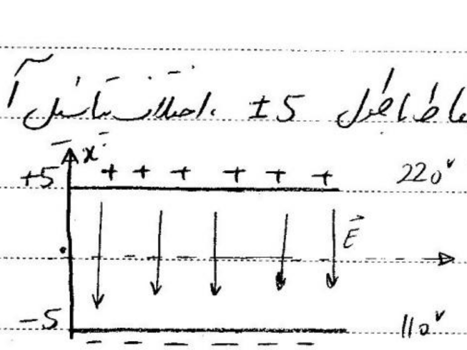
Subject:

Year. Month. Date. ( )

** نیروهای جاذبه و دافعه بین اجسام که از قانون نیوتن پیروی می‌کنند دارای تابع پتانسیل است. بطور مشابه نیروهای جاذبه و دافعه بین بارهای الکتریکی که از قوانین کولمب پیروی می‌کنند دارای تابع پتانسیل هستند که تابع پتانسیل جواب معادله لاپلاس است. چنانچه برای هر تابع برداری $\vec{F}$ تابع اسکالر f پیدا شود که: $\nabla f = \vec{F}$ باشد گوییم تابع اسکالر f را تابع پتانسیل تابع برداری $\vec{F}$ است.

با حل معادله لاپلاس یک میدان یک پتانسیل موجود در آن می‌رسیم و با گرادیان گیری از آن میدان نیروی موجود در میدان را بدست می‌آوریم.

*مثال) پتانسیل میدان بین دو صفحه موازی عمود بر محور x را بیابید که در نقاط $x = \pm 5$ اختلاف پتانسیل آنها به ترتیب 110^v و 220^v باشد.



$\rho_v = \rho = 0$ ← نقطه بار نقطه‌ای نداریم

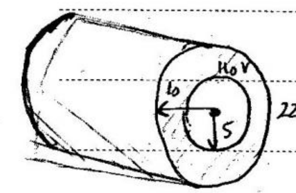
$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y} = 0$

(لاپلاس) $\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \Rightarrow \nabla^2 V = V_{xx} = 0$

$V_{(x)} = ax + b \Rightarrow \begin{cases} V(+5) = 220 \\ V(-5) = 110 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 11 \\ b = 165 \end{cases}$ ⇐ وقتی مشتق دوم برابر صفر باشد، معادله خطی بوده است

$\Rightarrow$ تابع پتانسیل: $\boxed{V_x = 11x + 165}$

* تکرار مثال‌های فوق در مختصات استوانه‌ای:



$u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} + u_{zz}$ ← در راستای z و φ ثابت است

$\Rightarrow u_{rr} + \frac{1}{r} u_r = 0 \Rightarrow \int \frac{u_{rr}}{u_r} = \int -\frac{1}{r} dr \Rightarrow \ln \frac{u_r}{a} = \ln \frac{1}{r} \Rightarrow u = a \ln r + b$

$* \ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) = u'v + uv'$

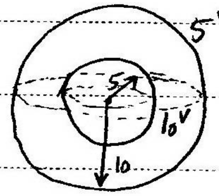
$\Rightarrow \int u_r = \int \frac{a}{r} dr$

$\begin{cases} u(5) = 110 \\ u(10) = 220 \end{cases} \Rightarrow u = \frac{110}{\ln 2} \ln r + 110 \left(1 - \frac{\ln 5}{\ln 2} \right)$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

Www.sem-eng.COM

مثال خازن دو سطح کروی:



$$5 < R < 10 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) = 0$$

$$r^2 \frac{\partial u}{\partial r} = a \Rightarrow \int \frac{\partial u}{\partial r} = \int \frac{a}{r^2} \Rightarrow u = -\frac{a}{r} + b$$

$$\begin{cases} u(5) = 10^V \\ u(10) = 5^V \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -50 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{u = \frac{50}{r} + 0}$$

* معادلات لاپلاس تمام با شرایط مرزی مشابه حل می‌شود. شرایط مرزی به طور معمول پتانسیل های معینی روی سطوح هادی و نیز پتانسیل صفر در بی‌نهایت است.

* قضیه یکتایی جواب:

اگر جوابی یافت شود که در معادله لاپلاس صدق کند و شرایط مرزی را نیز برآورده کند، آن تنها جواب ممکن مسئله است.

* حل لاپلاس در کارتزین:

$$\frac{\partial^2 u}{} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

تفکیک متغیرها: $V(x,y,z) = X(x)\,Y(y)\,Z(z) \longrightarrow \underbrace{\frac{X''}{X}}_{k_1} + \underbrace{\frac{Y''}{Y}}_{k_2} + \underbrace{\frac{Z''}{Z}}_{k_3}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{X} \cdot \frac{d^2 X}{dx^2} = k_1 \\ \frac{1}{Y} \cdot \frac{d^2 Y}{dy^2} = k_2 \\ \frac{1}{Z} \cdot \frac{d^2 Z}{dz^2} = k_3 \end{cases} \qquad k_1 + k_2 + k_3 = 0$$

$$\boxed{X(x)} = \begin{cases} Ax + B & : \quad k_1 = 0 \\ A_1 \sin kx + B_1 \cos kx & : \quad k_1 = -k^2 < 0 \\ A \sinh kx + B \cosh kx & : \quad k_1 = k^2 > 0 \end{cases}$$

$$= Ae^{kx} + Be^{-kx}$$

WWW.sem-eng.COM

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\boxed{Y(y)} = \begin{cases} Cy+D \\ C\sin ky + D\cos ky \\ C\sinh ky + D\cosh ky = Ce^{ky} + De^{-ky} \end{cases}$$

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$$

$$\boxed{k_1 + k_2 = 0}$$

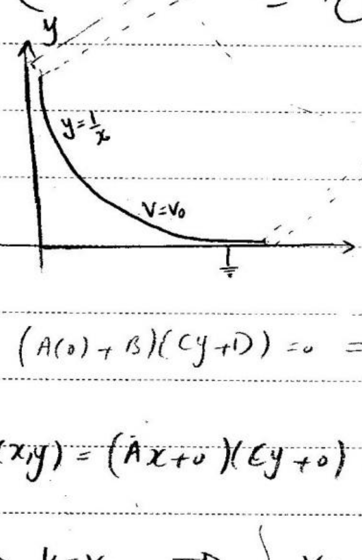
$k_1 = 0 \longrightarrow k_2 = 0$

$k_1 > 0 \longrightarrow k_2 < 0$

$k_1 < 0 \longrightarrow k_2 > 0$

$$\boxed{V(x,y)} = \begin{cases} (Ax+B)(Cy+D) & : k_1 = -k_2 = 0 \\ (A\sin kx + B\cos kx)(C\sinh ky + D\cosh ky) & : k_1 = -k_2 < 0 \\ (A\sinh kx + B\cosh kx)(C\sin ky + D\cos ky) & : k_1 = -k_2 > 0 \end{cases}$$

* مثال) سطح مقطع قطعه‌ای شامل دو سطح هادی مطابق شکل تعریف شده است. تابع پتانسیل در فضای محصور بین هادی‌ها را مشخص کنید.



$$\boxed{V_{xx} + V_{yy} = 0}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = 0$$

$$V(x,y) = (Ax+B)(Cy+D)$$

① $V(0,y) = 0$, $0<y<\infty$, ② $V(x,0) = 0$, $0<x<\infty$, ③ $V(x,y) = V_0$, $y=\frac{1}{x}$

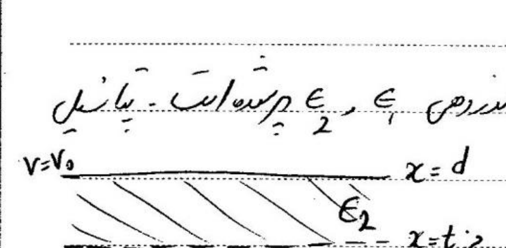
$$① \rightsquigarrow (A(0)+B)(Cy+D) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{B=0} \\ Cy+D=0 \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

$$② \rightsquigarrow (Ax+B)(C(0)+D) = 0 \Rightarrow \boxed{D=0}$$

$$\Rightarrow V(x,y) = (Ax+0)(Cy+0) = \underbrace{AC}_{k}xy = V(x,y) = kxy \Rightarrow V = V_0 = kxy \Big|_{x=1/y} = k$$

$$\Rightarrow k = V_0 \Rightarrow \boxed{V(x,y) = V_0(xy)}$$

* مثال) ناحیه محصور بین دو صفحه هادی $x=d$ و $x=0$ از دو ماده عایق با ثابت‌های دی‌الکتریک ϵ_1 و ϵ_2 پر شده است. پتانسیل را در نواحی عایقی بین دو صفحه بدست آورید.



$$\epsilon : \begin{cases} \epsilon_2 & : t<x<d \\ \epsilon_1 & : 0<x<t \end{cases}$$

www.sem-eng.com

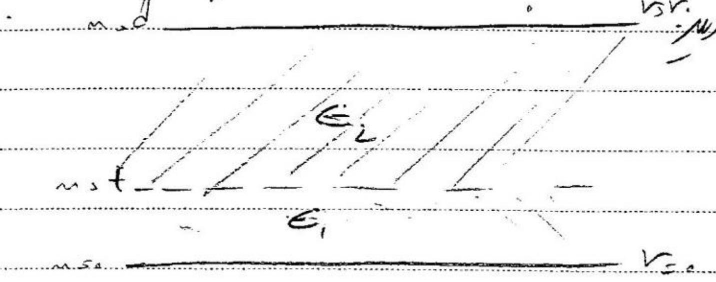
$$V = \begin{cases} A_1 x + B_1 & : \quad 0 < x < t \\ A_2 x + B_2 & : \quad t < x < d \end{cases}$$

www.som-eng.com

Subject:
Year. Month. Date. ( )

ناحیه محصور بین صفحات هادی $x=0$ و $x=d$ از دو ماده عایق با نفوذپذیری ε_1 و ε_2 پر شده

است. پتانسیل را در هر یک از دو ماده عایق بین دو صفحه بدست آورید.



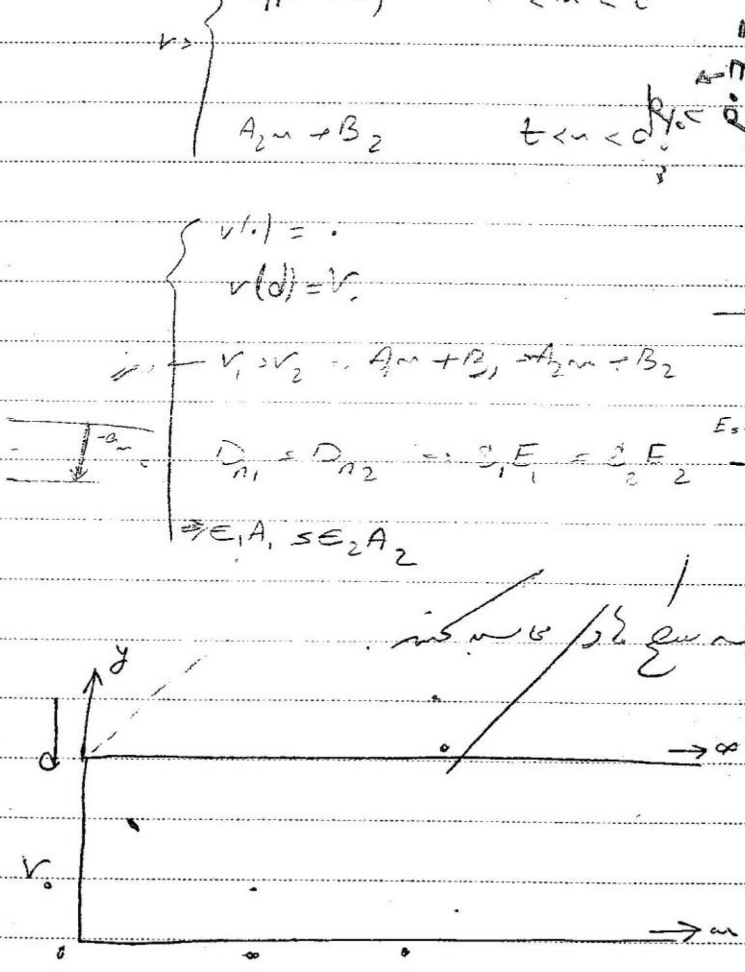
$$\varepsilon \begin{cases} 0<x<t \longrightarrow \varepsilon_1 \\ t<x<d \longrightarrow \varepsilon_2 \end{cases}$$

$$V=\begin{cases} A_1 x + B_1 & 0<x<t \\ A_2 x + B_2 & t<x<d \end{cases}$$

$$\begin{cases} V(0)=0 \\ V(d)=V_0 \\ x=t \quad V_1=V_2 \Rightarrow A_1 x + B_1 = A_2 x + B_2 \\ D_{n1}=D_{n2} \Rightarrow \varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_2 E_2 \xrightarrow{E=-\nabla V} \varepsilon_1\left(\frac{\partial V_1}{\partial x}\right) = \varepsilon_2\left(\frac{\partial V_2}{\partial x}\right) \\ \Rightarrow \varepsilon_1 A_1 = \varepsilon_2 A_2 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} V_1 = \dfrac{\varepsilon_1 x}{\varepsilon_2 t + \varepsilon_1 (d-t)} & 0<x<t \\ V_2 = \dfrac{\varepsilon_2 t + \varepsilon_1 (x-t)}{\varepsilon_2 t + \varepsilon_1 (d-t)} \end{cases}$$

تابع پتانسیل را در ناحیه محصور بین سه سطح هادی محاسبه کنید.



$d>y>0 \quad V(0,y)=V_0$ شرایط مرزی

$V(x,0)=0 \quad x>0$

$V(x,d)=0 \quad x>0$

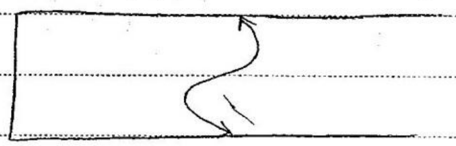
$$\begin{cases} (A_1 x + B_1)(C_1 y + D_1) \\ (A_1 \sin kx + B_1 \cos kx)(C_1 e^{ky} + D_1 e^{-ky}) \\ (A_1 e^{kx} + B_1 e^{-kx})(C_1 \sin ky + D_1 \cos ky) \end{cases}$$

بی‌نهایت صفرهای در جهت y

صفرهای در یک تابع باید کراندار باشد ... $y=0$ و $y=d$ ... صفرها

www.sem-eng.com

[illegible]



2. $(A_1 \sin 0 + B_1 \cos 0)(C_1 e^{k_x} + D_1 e^{-k_x}) = 0 \longrightarrow B_1 = 0$

[illegible]

3. $(A_1 \sin k_y d + B_1 \cos k_y d)(C_1 e^{k_x} + D_1 e^{-k_x}) = 0$

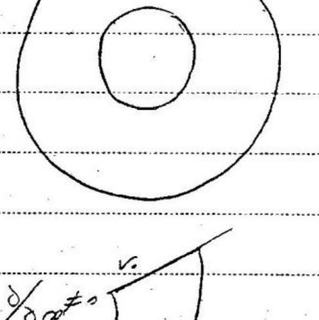
$$\begin{cases} A_1 = 0 \longrightarrow \text{[illegible]} \\ \sin k_y d = 0 \quad k_y d = n\pi \longrightarrow \boxed{k_y = \frac{n\pi}{d}} \end{cases}$$

$V = A_1 \sin \frac{n\pi}{d} y \left(C_1 e^{k_x} + D_1 e^{-k_x}\right) = A \sin \frac{n\pi}{d} y \left(D_1 e^{-k_x}\right)$

4. $V(\infty, y) = 0 \qquad A_1 \sin \frac{\pi n}{d} y \left(C_1 e^{\infty} + D_1 e^{-\infty}\right) \longrightarrow C_1 = 0$

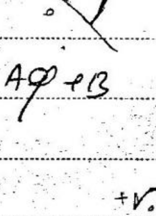
1. $V(0, y) = A \sin \frac{n\pi}{d} y = V_0$

$$\sum_{i=1}^{n} C_i V_i$$



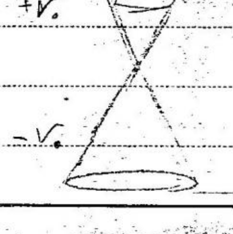
$V = A \ln r + B$

$$\begin{cases} (A \ln r + B)(C\varphi + D) & \lambda = 0 \\ (A r^{\lambda} + D r^{-\lambda})(C \sin \lambda\varphi + D \cos \lambda\varphi) & \lambda \neq 0 \end{cases}$$



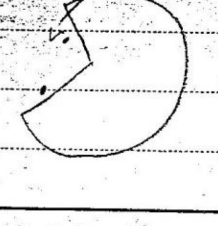
$V = A\varphi + B$

[illegible]



$V(r, \theta, \varphi)$

$\partial/\partial r \quad \partial/\partial\varphi$



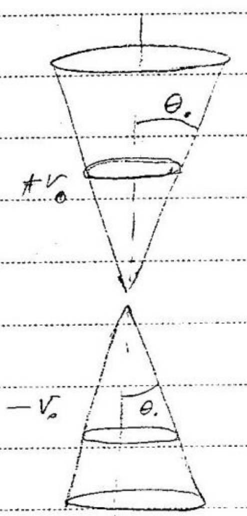
$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial v}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}\right) = 0$$

www.sem-eng.com

$$\begin{cases} v(r) = A + B/r \\ v(\theta) = C + D\ln\tan\theta/2 \\ v(\varphi) = E + F\varphi \end{cases}$$

مثال: دو سطح مخروطی شکل هادی با محدوده دارای پتانسیل $\pm V_0$ هستند:

پتانسیل بین دو اطراف را بدست آورید.

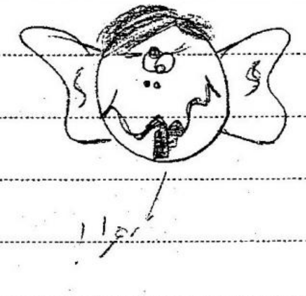


$\partial/\partial\varphi = 0$

$\partial/\partial r = 0$

$v(\theta) = C + D\ln\tan\theta/2$

$$\begin{cases} v(\theta_0) = V_0 \\ v(\pi-\theta_0) = -V_0 \end{cases}$$



اوا!

$$\begin{cases} C + D\ln\tan\theta_0/2 = V_0 \\ C + D\ln\tan\left(\frac{\pi-\theta_0}{2}\right) = -V_0 \end{cases}$$

$C = 0 \quad D = \frac{V_0}{\ln\tan(\theta_0/2)}$

$$\Longrightarrow V(\theta) = V_0\,\frac{\ln\tan\theta/2}{\ln\tan(\theta_0/2)}$$

روش تصاویر:

فرض کنید مسئله الکترواستاتیکی با شرایط مرزی حل مستقیم معادله لاپلاس همراه شرایط مرزی داده شده

اما شرایط سطوح مرزی در این مسئله را می‌توان با بارهای مناسب به عنوان بارهای تصویر جایگزین

مشکل است. روش تصاویر سطوح مرزی را با بارهای مناسب جایگزین می‌کند. حل معادله لاپلاس را از آن بدست

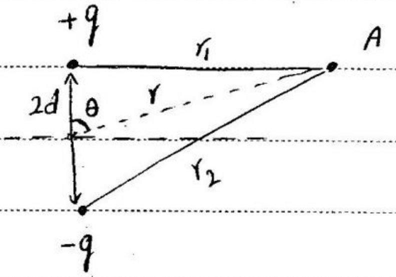
آورد

Www.sem-eng.COM

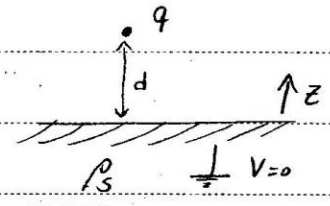
اصل تصویر

*بار الکتریکی روی صفحه زمین ؟ اگر صفحه‌ی خالی از بار q- به فاصله‌ی d از پایین آن قرار دهیم هم فاصله از صفحه به فاصله

از بارهای q , q- بوده و پتانسیل آن برابر صفر است.



$\equiv$



ϵ
V
$z \geq 0$

$$V_A = \frac{q}{4\pi\epsilon r_1} + \frac{(-q)}{4\pi\epsilon r_2}$$

$$\begin{cases} r_1 = \sqrt{r^2 + d^2 - 2rd\cos\theta} \\ r_2 = \sqrt{r^2 + d^2 + 2rd\cos\theta} \end{cases}$$

$$E = -\nabla V$$

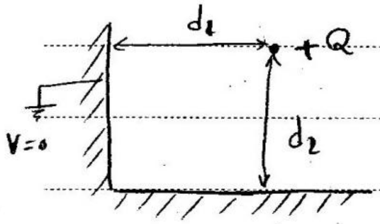
$$= -\frac{\partial V}{\partial r}\hat{a}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\hat{a}_\theta$$ مستقل از φ ...

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon}\left(\left[\frac{r-d\cos\theta}{r_1^3} - \frac{r+d\cos\theta}{r_2^3}\right]\hat{a}_r + d\sin\theta\left(\frac{1}{r_1^3} + \frac{1}{r_2^3}\right)\hat{a}_\theta\right)$$

$$E_n\Big|_{\theta=\pi/2} = \frac{-qd}{2\pi\epsilon\left(r^2+d^2\right)^{3/2}}$$

$$\rho_s = \epsilon E_n = \frac{-qd}{2\epsilon\left(r^2+d^2\right)^{3/2}}$$

مثال) محاسبه نیروی وارد بر Q+ به کمک اصل تصویر.

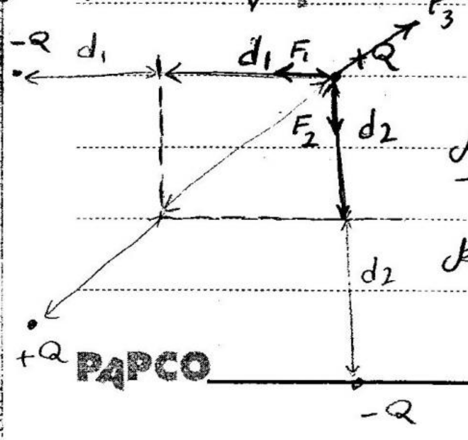


حل:

$$F = F_1 + F_2 + F_3 \qquad F_1 = -\hat{a}_y \frac{Q^2}{4\pi\epsilon(2d_2)^2}$$

$$F_2 = -\hat{a}_x \frac{Q^2}{4\pi\epsilon(2d_1)^2} \qquad F_3 = \frac{Q^2\left(2d_1\hat{a}_x + 2d_2\hat{a}_y\right)}{4\pi\epsilon\left[(2d_1)^2 + (2d_2)^2\right]^{3/2}}$$

معادل است!



بار تصویر Q- در ربع دوم پتانسیل هم صفحه‌ی عمودی را صفر می‌کند و بار تصویر در ربع چهارم پتانسیل هم صفحه افقی را صفر می‌کند حال اگر بار تصویر سوم (Q+) در ربع سوم اضافه شود بر اساس تقارن شکل شرایط مرز پتانسیل صفر را روی هر دو هم صفحه برقرار کند.

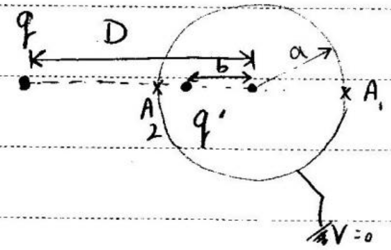
Www.sem-eng.com

* با نقطه‌ای در مقابل کره‌های q کره‌های رسانا نقطه‌ای q' (به عنوان تصویر q) جایگزین نموده و مکان را طوری

q' را طوری بیابیم که سطح هم پتانسیل با پتانسیل صفر در کل سطح کره‌ی رسانا پدید آید. در اساس تعاریف مسئله چنین

مجهولات $\left\{ q', b = ? \right.$

تصویری در صورت وجود روی خطی که q را به مرکز کره وصل می‌کند قرار دارد.



$$V_{A_1} = V_{A_2} = 0$$

$$V_{A_1} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 (D+a)} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 (b+a)} = 0$$

$$V_{A_2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 (D-a)} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 (a-b)} = 0$$

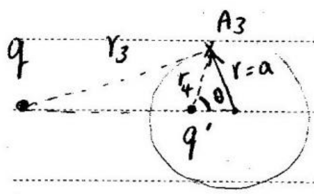
$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} q' = -\dfrac{a}{b} q \\ b = \dfrac{a^2}{D} \end{array} \right.$$

هرچه بار به کره نزدیکتر باشد، q' هم به سطح کره نزدیکتر می‌شود.

اگر $D \to \infty$

آنگاه $b \to 0$ (مرکز کره)

⊛ حال بررسی می‌کنیم که آیا پتانسیل ناشی از q و تصویر q' در نقطه‌ی دلخواه A_3 روی سطح کره صفر می‌شود یا خیر؟



$$V_{A_3} = ?$$

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon r_3} - \frac{\left(\frac{a}{d}\ \cdot\ \right)}{4\pi\epsilon r_4} \overset{?}{=} 0$$

نمی‌توان حل کرد

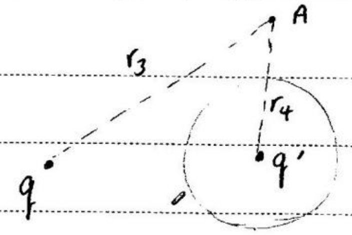
$$\left\{ \begin{array}{l} r_3 = \sqrt{D^2 + a^2 + 2aD\cos\theta} \\ r_4 = \sqrt{D^2 + a^2 - 2aD\cos\theta} \end{array} \right.$$

تقریب $D \gg a$

مسئله مثال قبل می‌توان میدان را با ابزار دیگری از پتانسیل در هر مقطعی بارهای القایی روی سطح کره را بدست آورد.

$$D \to \infty \left\{ \begin{array}{l} q' \to 0 \\ b \to 0 \end{array} \right. \qquad D \to a \left\{ \begin{array}{l} q' \to q \\ b \to a \end{array} \right.$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )



اگر کره از ابتدا زمین نشده باشد برای تامین تابع پتانسیل کره ابتدا بار تصویر q' به روش فوق حاصل می‌نماییم آنگاه تصویر دومی

که بار آن برابر q'' در مرکز کره قرار می‌دهیم تا پتانسیل سطح کره تا حد V_0 افزایش یابد.