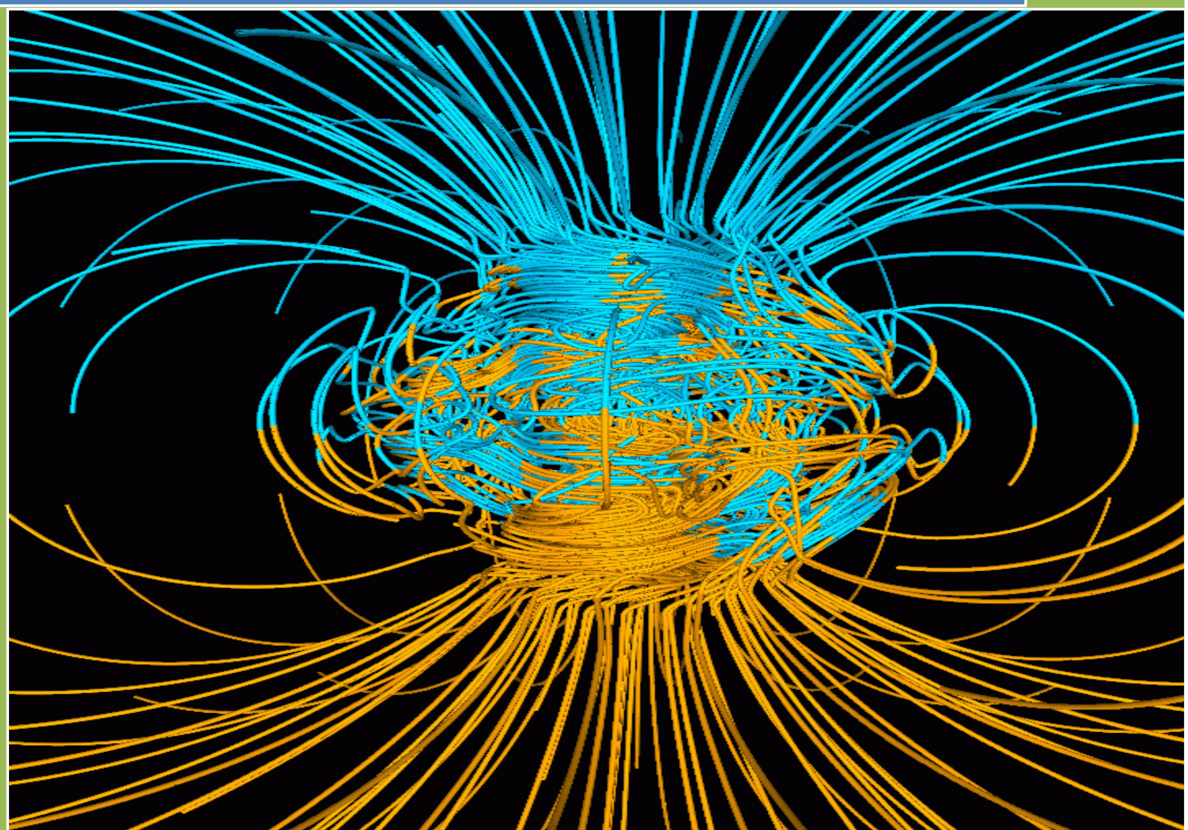
باشگاه مهندسان سمنان

جزوه الکترومغناطیس-دانشگاه سمنان



استاد مربوطه: دکتر رضایی

تهیه و تنظیم: ایمان شریعت پناهی

اسکن جزوه: محمدرضا خالصی

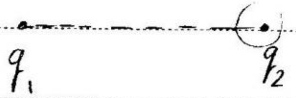
فصل دوم و سوم: شدت میدان الکتریکی و مسائل مقدار مرزی

Subject:

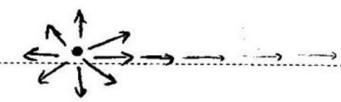
Year. Month. Date. ( )

* شدت میدان الکتریکی

مطابق قانون کولن وقتی بار q_2 در مجاورت بار q_1 قرار می‌گیرد نیرویی به آن اعمال می‌شود به عبارتی بار q_1 در اطراف خود میدانی ایجاد می‌کند که به هر باری که در آن میدان قرار گیرد نیرویی اعمال می‌شود. نیرویی که بار q_1 بر واحد بار مثبت در نقطه‌ای از فضا وارد می‌کند شدت میدان الکتریکی حاصل از بار q_1 در آن نقطه گویند $E = F/q$



$$E = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 \cdot R^2} \cdot \hat{a}_R \qquad (N/C) \text{ یا } (V/m)$$



* مثال) بار نقطه‌ای $q = 0.5\ \mu C$ در مبدا مختصات قرار دارد میدان ناشی از آن را در نقطه $(0,3,4)$ را بدست آورید.

$$\vec{R} = (0,3,4) - (0,0,0) = 0i + 3j + 4z \qquad |\vec{R}| = \sqrt{25} = 5 \Rightarrow a_R = \frac{3a_y + 4a_z}{5}$$

$$E = \frac{0.5 \times 10^{-6}}{4\pi\epsilon_0 \times 25} \left(\frac{3a_y + 4a_z}{5} \right) = 180(0.6a_y + 0.8a_z)$$

* تمرین 3) شدت میدان الکتریکی ناشی از $5\ nC$ واقع در محل $(0.2, 0.1, -2.5)$ را در خلا در نقطه $P(-0.2, 0, -2.3)$ را بدست آورید.

Subject:

Year. Month. Date. ( )

* نکته: ما شدت میدان الکتریکی را به صورت نیرو بر واحد بار تعریف می‌کنیم $(E = \frac{F}{q})$

$E = \lim_{q \to 0} \frac{F}{q}$, $q = 1e = 1.6\times10^{-19}$ بار آزمایش

* بار آزمایش باید آنقدر کوچک باشد که توزیع بار منبع را تغییر ندهد که البته حداقل آن $1e$ می‌باشد

* فرض‌های الکترواستاتیک ساکن در فضای آزاد:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = \dfrac{\rho}{\epsilon_0} & \text{غیر سلونوئیدی} \\ \nabla \times \vec{E} = 0 & \text{غیر چرخشی} \end{cases}$$

معادلات فوق روابط نقطه‌ای یا دیفرانسیلی هستند که در هر نقطه فضا برقرارند. در کاربردهای عملی برای محاسبه میدان کل ناشی از یک توده یا توزیع بار از فرم انتگرالی استفاده می‌کنیم

$$\iiint_V \nabla \cdot E \, dv = \frac{1}{\epsilon_0}\int_V \rho \, dv$$

معادله فوق شکلی از قانون گوس است که بیان می‌کند شار کل خروجی میدان الکتریکی از هر سطح بسته در فضای آزاد برابر کل بار داخل سطح تقسیم بر ϵ_0 است.

$$\oiint_S E \cdot ds = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$Q = \int \rho_s \, ds$

$Q = \int \rho_l \, dl$

* انتگرال خطی از $\oint_C E \cdot dl$ بر روی هر مسیر بسته با توجه به پایستار بودن آن صفر است.

4 فرض داریم $\Rightarrow$

$$\begin{cases} ① \ \nabla \cdot E = \dfrac{\rho}{\epsilon_0} , \quad \nabla \cdot D = \rho \\ ② \ \nabla \times E = 0 \\ ③ \ \oint_S D \cdot ds = Q \\ ④ \ \oint_C E \cdot dl = 0 \end{cases}$$

* میدان ناشی از یک بار نقطه‌ای:

اگر باری به اندازه Q در مبدأ مختصات باشد شدت میدان الکتریکی در مختصات کروی (r, θ, φ) عبارت است

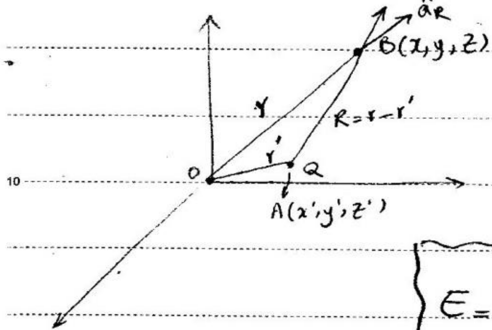
که فقط مؤلفه $\hat{a}_r$ خواهد داشت.

$$\boxed{E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \hat{a}_r}$$

اگر بار Q در نقطه‌ای غیر از مبدأ مختصات باشد باید بردار مکانی را در نظر خواهیم داشت در این حالت شدت میدان ناشی

از بار Q در نقطه A در نقطه B عبارت است از

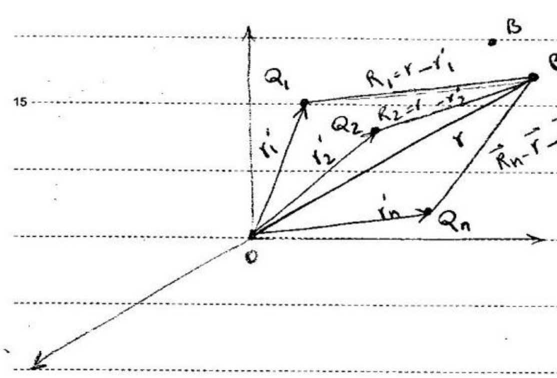
$$\boxed{\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'}$$



$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{a}_R \quad , \quad \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$$

$$\hat{a}_R = \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|} = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

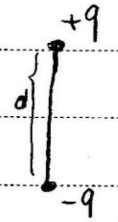
$$\boxed{E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}}$$



* میدان ناشی از چند بار نقطه‌ای گسسته:

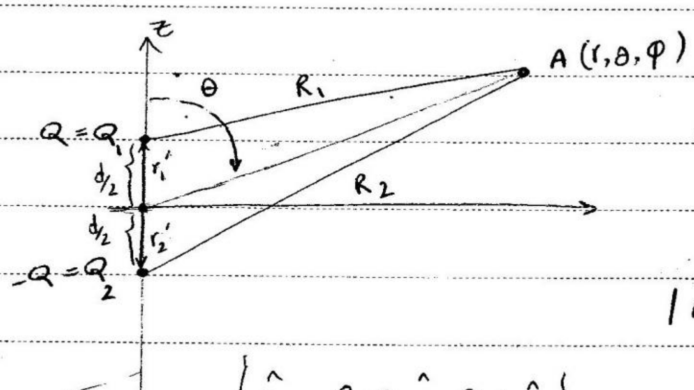
$$E = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1^2} \hat{a}_{R_1} +$$

* دوقطبی الکتریکی : دو بار نقطه‌ای مساوی مختلف العلامه با فاصله d



$$Q_1 = Q \qquad Q_2 = -Q \qquad \vec{r} = r\hat{a}_r$$

$$\vec{r}\,'_1 = \frac{d}{2}\hat{a}_z \qquad \vec{r}\,'_2 = -\frac{d}{2}\hat{a}_z$$



$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{Q(r\hat{a}_r - \frac{d}{2}\hat{a}_z)}{|r\hat{a}_r - \frac{d}{2}\hat{a}_z|^3} + \frac{-Q[r\hat{a}_r + \frac{d}{2}\hat{a}_z]}{|r\hat{a}_r + \frac{d}{2}\hat{a}_z|^3}\right]$$

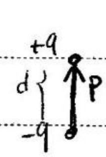
$$|r\hat{a}_r \pm \tfrac{d}{2}\hat{a}_z|^{-3} = \left[(r\hat{a}_r \pm \tfrac{d}{2}\hat{a}_z)\cdot(r\hat{a}_r \pm \tfrac{d}{2}\hat{a}_z)\right]^{-\frac{3}{2}}$$

$$\boxed{\hat{a}_z = \cos\theta\,\hat{a}_r - \sin\theta\,\hat{a}_\theta} \qquad = \left[r^2 + \frac{d^2}{4} \pm r d\cos\theta\right]^{-3/2}$$

اگر $d \ll r$

$$\longrightarrow \left[r^2 + r d\cos\theta\right]^{-3/2} = r^{-3}\left[1 \pm \frac{d\cos\theta}{r}\right]^{-3/2} \simeq r^{-3}\left[1 \pm \frac{3}{2}\cdot\frac{d}{r}\cdot\cos\theta\right]$$

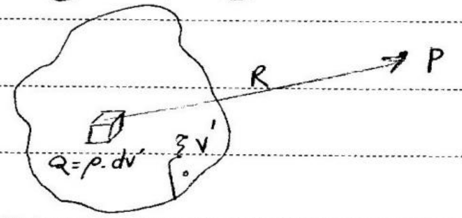
$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left(3d\cos\theta\,\hat{a}_r - d\hat{a}_z\right) \Longrightarrow \boxed{E = \frac{\overset{p}{Qd}}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left(2\cos\theta\,\hat{a}_r + \sin\theta\,\hat{a}_\theta\right)}$$



بین بارهای +q و -q با فاصله d ← بردار دوقطبی ⇐ $\boxed{p = Q\cdot d}$

* میدان ناشی از توزیع پیوسته بار :

این میدان با انتگرال گیری تمام میدان یک جزء حجم یا المان سطحی بار روی توزیع بار به شیوه جمع آثار بدست می آید



$\sum^{n}$, $\int$

گسسته پیوسته

Subject:

Year. Month. Date. ( )

در یک توزیع بار حجمی چون یک جزء کوچک دیفرانسیلی بار مانند یک بار نقطه‌ای رفتار می‌کند که بار $\rho . dv'$ محصور در جزء کوچک

حجم دیفرانسیلی dv' (کوچک رسم شده) در شدت میدان الکتریکی نقطه P عبارت است از: توزیع بار حجمی $= \rho_v$

$$dE = \frac{\rho_v \cdot dv'}{4\pi\epsilon_0 \cdot R^2} \cdot \hat{a}_R \quad , E = \int dE \Rightarrow E = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{a}_R \cdot \rho_v}{R^2} \cdot dv'$$

$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \rho_v \frac{\vec{R}}{|R^3|} \cdot dv'} \quad \text{حجمی}$$

توزیع بار سطحی $= \rho_s$

S' سطح : بار سطحی

$$\Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S'} \hat{a}_R \frac{\rho_s}{R^2} \cdot ds' \Rightarrow \text{سطحی}$$

توزیع بار خطی $= \rho_\ell$

ℓ' : بار خطی

$$\Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\ell'} \hat{a}_R \cdot \frac{\rho_\ell}{R^2} \cdot dl' \Rightarrow \text{خطی}$$

*میدان الکتریکی توزیع بار خطی:

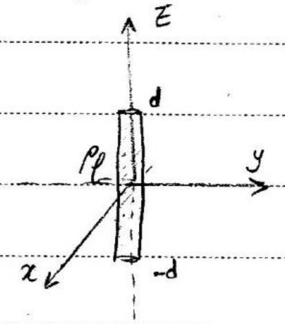
$$\Rightarrow E = \cdots \int \cdots dl$$

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r'} \qquad a_R = \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|}$$

$$E = \int_{C'} \frac{\rho_\ell(r) \cdot (r - r')}{4\pi\epsilon_0 |r - r'|^3} \cdot dl'$$

* مثال) شدت میدان ناشی از بار خطی در امتداد محور z از $z=-d$ تا $z=+d$ را محاسبه کنید. ρ_l

را در تمام نقاط محاسبه کنید آورید. پس مختصات استوانه‌ای



(منبع را پریم‌دار می‌نویسیم)

$dl' = dz'$

$\vec{r}' = z'\hat{a}_z \qquad \vec{r} = r\hat{a}_r + z\hat{a}_z$

$\vec{r}-\vec{r}' = r\hat{a}_r + (z-z')\hat{a}_z$

a_r = ترکیبی از a_x ، a_y

$$E = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0}\int_{-d}^{+d} \frac{r\,\hat{a}_r + (z-z')\,a_z}{\left[r^2+(z-z')^2\right]^{3/2}}\,dz'$$

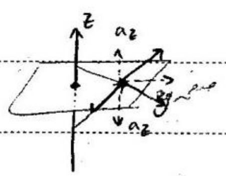
حل انتگرال !

$$\Rightarrow \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0}\left\{\left[\frac{-(z-z')}{r\sqrt{r^2+(z-z')^2}}\right]_{-d}^{+d} + \left[\frac{\hat{a}_z}{\sqrt{r^2+(z-z')^2}}\right]_{-d}^{+d}\right\}$$

$$\Rightarrow E = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0}\left\{\left[\frac{-(z-d)}{r\sqrt{r^2+(z-d)^2}} - \frac{(z+d)}{r\sqrt{r^2+(z+d)^2}}\right]\underline{\hat{a}_r} + \underline{\hat{a}_z}\left[\frac{1}{\sqrt{r^2+(z-d)^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2+(z+d)^2}}\right]\right\}$$

* نکته 1: فقط $\hat{a}_r$ و $\hat{a}_z$ داریم یعنی چون از محور z به عنوان محور استفاده کردیم از φ مستقل است یعنی میدان به ازای φ های مختلف یکسان است.

مولفه $\hat{a}_\varphi = 0$



* نکته 2: اگر روی صفحه xy میدان را بخواهیم در راستای مولفه a_z نیز صفر خواهد شد.

نکته 3: بار خطی نامحدود $\quad E = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0 r}\,\hat{a}_r \quad , \quad d \gg r$

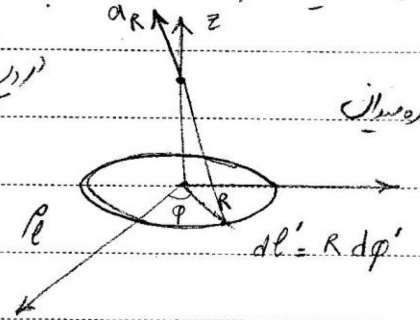
$\int_{-\infty}^{+\infty}$

(*) برای پایداری در بین منابع، آنها را به صورت خطی با پیش‌ فرض قرار می‌دهیم.

Month. Date. ( )

مثال) بار الکتریکی یکنواختی روی حلقه‌ای به شعاع R قرار گرفته است. شدت میدان الکتریکی روی محور حلقه را بدست آورید.

در راستای استوانه‌ای



$\vec{r}$ بردار مشاهده میدان $= z\hat{a}_z$

$dl' = R\,d\varphi'$

$\vec{r}\,'$ نقطه منبع $= R\hat{a}_r = R(\cos\varphi' a_x + \sin\varphi' a_y)$

$\vec{r} - \vec{r}\,' = -R\cos\varphi'\,\hat{a}_x - R\sin\varphi'\,\hat{a}_y + z\,\hat{a}_z$

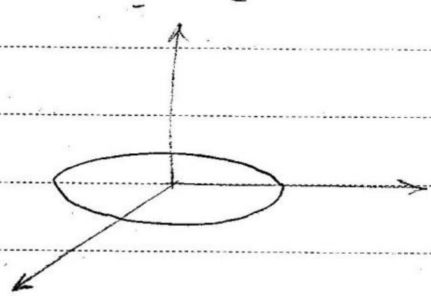
$|r - r'|^3 = (z^2 + R^2)^{3/2}$

$$E = \frac{\rho_\ell R}{4\pi\epsilon_0 (z^2+R^2)^{3/2}} \underbrace{\int_0^{2\pi} \left(-R\cos\varphi'\,\hat{a}_x - R\sin\varphi'\,\hat{a}_y + z\,\hat{a}_z\right) d\varphi'}_{*}$$

$$* \Rightarrow \int_0^{2\pi} (r - r')\,d\varphi' = -R\hat{a}_x \int_0^{2\pi} \cos\varphi'\,d\varphi' - R\hat{a}_y \int_0^{2\pi} \sin\varphi'\,d\varphi' + z a_z \int_0^{2\pi} d\varphi' = 2\pi z\,\hat{a}_z$$

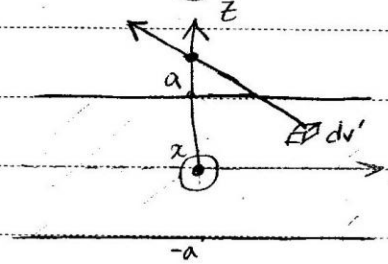
$$\Rightarrow E = \frac{\rho_\ell R z}{2\epsilon_0 (z^2+R^2)^{3/2}}\,\hat{a}_z$$

بار یکنواختی با چگالی سطحی ρ_s روی دیسک به شعاع R توزیع شده است. شدت میدان الکتریکی در نقطه‌ای روی محور را بدست آورید (تمرین تحویلی)



$$E = \begin{cases} \dfrac{\rho_s}{2\epsilon_0}\left[1 - \dfrac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right] a_z & : z > 0 \\[2ex] \dfrac{\rho_s}{2\epsilon_0}\left[-1 + \dfrac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right] a_z & : z < 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{اگر } R \gg z} E = \begin{cases} \dfrac{\rho_s}{2\epsilon_0}\left[1 - \cancel{\dfrac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}}\right] \hat{a}_z & : z > 0 \\[2ex] \dfrac{\rho_s}{2\epsilon_0}\left[-1 + \cancel{\dfrac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}}\right] a_z & : z < 0 \end{cases}$$

* مثال: میدان الکتریکی ناشی از توزیع حجمی به چگالی $\rho_v = \rho_0$ (C/m^3) در کلیه فضای بین صفحات $z = \pm a$ توزیع شده است.



میدان الکتریکی روی محور z را بدست آورید. $z = \pm a$

$$\vec{r} = z\,\hat{a}_z$$

$$\vec{r}' = x'\hat{a}_x + y'\hat{a}_y + z'\hat{a}_z$$

$r - r'$

$$E(0,0,z) = \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0}\iiint_{x'y'z'=-\infty}^{+\infty} \frac{-x'\hat{a}_x - y'\hat{a}_y + (z-z')a_z}{\left[x'^2 + y'^2 + (z-z')^2\right]^{3/2}}\,dx'dy'dz'$$

$$\Rightarrow \iiint \frac{-x'}{[\quad]^{3/2}}\,a_x + \iiint \cdots\, a_y + \iiint \frac{(z-z')a_z}{\left[x'^2+y'^2+(z-z')^2\right]^{3/2}}\,dx'dy'dz'$$

a_x و a_y به دلیل تقارن حذف می‌شوند.

$$\Rightarrow \iint \frac{dx'\,dy'}{[\quad]} = 2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dy'}{y'^2 + (z-z'^2)} = \frac{2\pi}{|z-z'|}$$

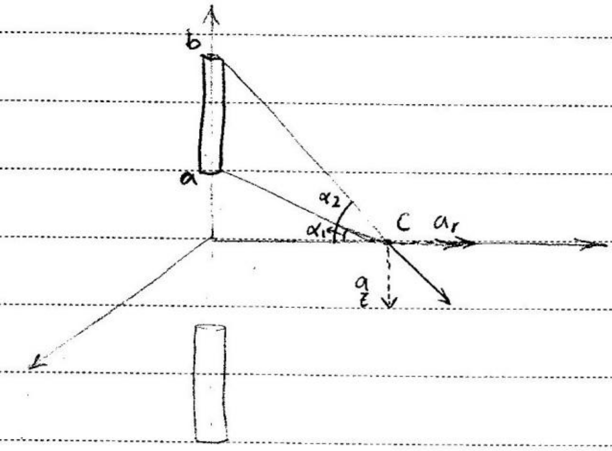
$$\Rightarrow E(0,0,z) = \begin{cases} a\,\dfrac{\rho_0}{\epsilon_0}\,\hat{a}_z & : z > a \\[2ex] z\,\dfrac{\rho_0}{\epsilon_0}\,\hat{a}_z & : -a < z < a \\[2ex] -a\,\dfrac{\rho_0}{\epsilon_0}\,\hat{a}_z & : z < -a \end{cases}$$

میدان روی صفحه xoy صفر است زیرا a_z نیز تقارن داشته و حذف می‌شود.

← میدان الکتریکی مستقل از x و y است اگر توزیع بار در جهت x و y تا ∞ ادامه داشته باشد.

Subject:

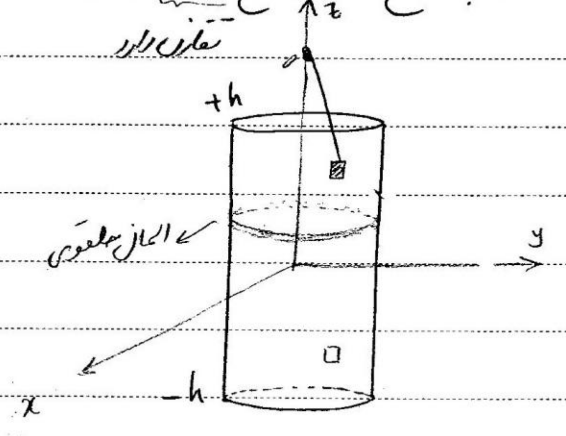
Year. Month. Date. ( )



$$E = E_r a_r + \cancel{E_\phi a_\phi} + E_z a_z$$

مستقل از ϕ

* مثال) شدت میدان ناشی از بار سطحی توزیع شده بر روی سطح جانبی استوانه‌ای به شعاع R و ارتفاع 2h را در نقطه‌ی (0,0,l) بدست آورید



$$E_z = \int_{-h}^{+h} dE_z$$

$$dE_z = \frac{\rho_\ell R}{2\epsilon_0 (z^2+R^2)^{3/2}} \, dz$$

* قانون گاوس:

$$\iiint \nabla\cdot E \, dv$$

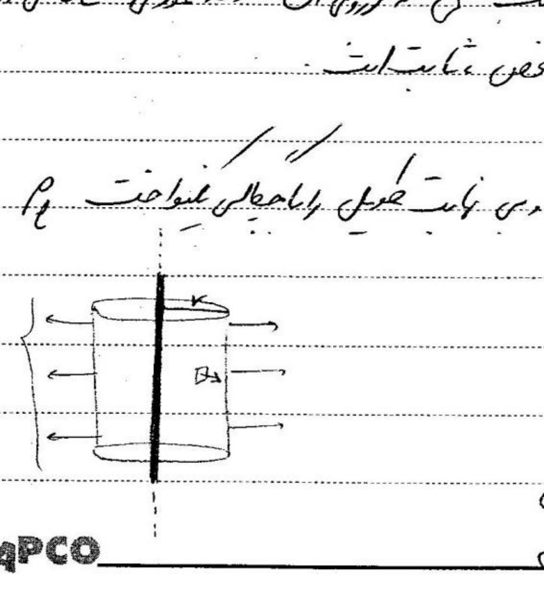
$$\oint_S E\cdot ds = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

قانون گاوس برای هر سطح بسته (فرضی) اختیاری برقرار است.

قانون گاوس کار محاسبات میدان الکتریکی را برای توزیع بارهای متقارن بر روی سطوحی که مؤلفه شدت میدان الکتریکی ثابت باشد تسهیل می‌کند. عبارتی اساسی بهره‌گیری از این قانون عبارت است از:

(1) تشخیص شرایط تقارنی (2) انتخاب مناسب سطحی که بر روی آن مؤلفه عمودی E ناشی از یک توزیع بار مشخص ثابت است.

* مثال 2) با استفاده از قانون گاوس شدت میدان یک بار خطی مستقیم و بی‌نهایت طویل را با چگالی یکنواخت ρ_ℓ در هوا تعیین کنید.



چون بار خطی ناکرو است میدان برآیند $\vec{E}$ شعاعی و عمود بر بار خطی است و مؤلفه‌ای در امتداد بار خطی نداریم. با توجه به تقارن استوانه‌ای سطح گاوسی استوانه‌ای به شعاع r و طول دلخواه l را در نظر

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$Q = \rho_\ell \cdot \ell$

بالایی پایینی

$ds = a_r \cdot r\, d\varphi \cdot dz$

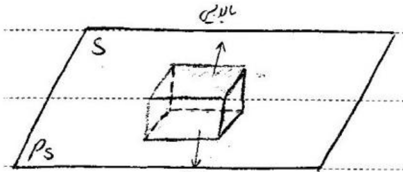
$E = a_r E_r$

$E_z = 0$ ← چون طول بار خطی بی‌نهایت است

$$\Longrightarrow \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{z=0}^{\ell} a_r E_r \cdot a_r\, r\, d\varphi\, dz = 2\pi r \ell E_r$$

$$2\pi r \ell E_r = \frac{\rho_\ell \ell}{\epsilon_0} \Longrightarrow E_r = \frac{\rho_\ell}{2\pi r \epsilon_0} \Longrightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\rho_\ell}{2\pi \epsilon_0 r}\, a_r} \Longleftarrow$$ میدان ناشی از خط بار

* مثال)



$$E\,ds = \begin{cases} \int (a_z \cdot E_z)(a_z\, ds) & : \text{بالایی} \\ (-a_z \cdot E_z)(-a_z\, ds) & : \text{پایینی} \end{cases}$$

$$\oint_S E\, ds = \underbrace{2E_z \int_A ds}_{\text{سطح جعبه}} = 2E_z A \qquad Q = \int \rho_s\, ds = \rho_s A$$

$$\oint_S E\, ds = \frac{Q}{\epsilon_0} \Longrightarrow 2E_z A = \frac{\rho_s \cdot A}{\epsilon_0} \Longrightarrow \boxed{E_z = \frac{\rho_s \cdot A}{2\epsilon_0}} \Longleftarrow$$ میدان ناشی از بار سطحی

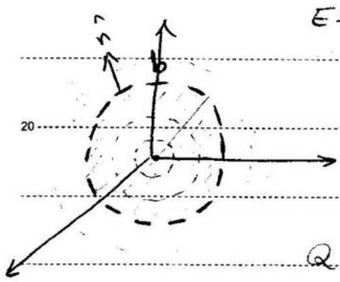
A سطح دلخواه؟

* مثال) مثال 7-3 - صفحه 110

میدان ناشی از ابر الکترونی با چگالی $\rho = -\rho_0$ در ناحیه R بین $R \leq b$ که تعریف شده است را تعیین کنید.

$E = a_R E_R \,,\; ds = a_R\, ds$

شرایط مسئله مورد نظر دارای تقارن کروی است پس سطح گوسی مناسب سطوح کروی هم مرکز می‌باشد.



$$\oint_{S_i} E \cdot ds = E_R \int_{S_i} ds = E_R\, 4\pi R^2$$

$\boxed{R<b}$

$$Q = \int_V \rho\, dv = -\rho_0 \int dv = -\rho_0 \left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)$$

$$\Longrightarrow \oint_{S_i} E\, ds = \frac{Q}{\epsilon_0} \Longrightarrow E = -a_R \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} R \quad : R<b$$

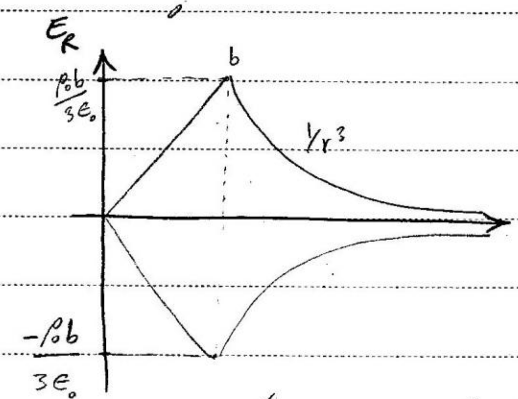
یعنی بار منفی است و مانند چاه، جهت میدان به سمت داخل است.

* اثبات قانون گاوس با نقطه‌ای از کتاب خوانده شود *

Subject:

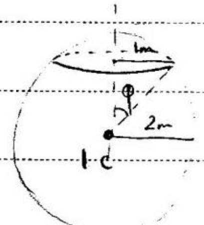
Year. Month. Date. ( )

$\boxed{R \geq b}$ $\quad Q = -\rho_0 \frac{4}{3}\pi b^3 \Longrightarrow \left\{ E = -a_R \frac{\rho_0 b^3}{3\epsilon_0 R^2} \quad : R \geq b \right.$



میدان درون ابر الکترونی از قانون عکس فاصله کولن پیروی نمی‌کند.
ـ عبارت میدان E بیرون ابر باردار مشابه حالتی است که کل بار ابر بار نقطه‌ای در مرکز متمرکز باشد.

* تمرین: حلقه‌ای به شعاع 1m را روی کره‌ای به شعاع 2m قرار می‌دهیم. اگر بار یک کولن در مرکز کره قرار گیرد شار خارج شونده از حلقه را حساب کنید.



عبوری از حلقه

$$\varphi = \frac{S_{\text{بالا}}}{S_{\text{کل}}} \times \varphi_{\text{کل}}$$

سطح

$\sin\theta = \frac{1}{2}$

$$\varphi_{\text{کل کره}} = \oint E\, ds = E \cdot \pi R^2 \qquad ds = \int_0^{2\pi}\int_0^{\theta=\pi/6} R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$\Longrightarrow \iint ds = \int_0^{2\pi} -R^2 \cos\theta \Big]_0^{\pi/6} = \int_0^{2\pi} -R^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right) d\varphi = 2\pi R^2\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \pi R^2 (2-\sqrt{3})$$

$$\iint_{\text{کل}} ds = \pi R^2$$

$$\frac{S_{\text{بالا}}}{S_{\text{کل}}} = \frac{\pi R^2 (2-\sqrt{3})}{\pi R^2} = 2-\sqrt{3} = 0/3$$

$$\varphi_{\text{حلقه}} = 0/3\, \varphi_{\text{کل}} = \boxed{0/3 \times E \pi R^2} = \varphi_{\text{بالا (حلقه)}}$$

خطوط میدان : در نمایش ترسیمی میدان الکتریکی از یک دسته منحنی استفاده می شود که در هر نقطه از فضا بر بردار میدان مماس هستند. از آنجا که بردار المان طول در هر نقطه بر بردار میدان مماس است بردار میدان و المان طول موازی هستند.

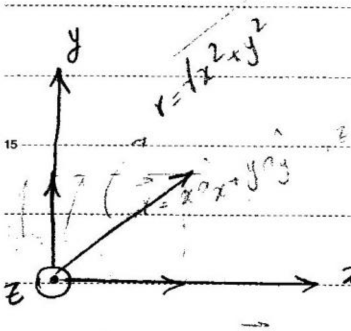
* شرط موازی بودن دو بردار متناسب بودن مولفه های آنها است.

$$E(\vec{r}) = E_x\hat{a}_x + E_y\hat{a}_y + E_z\, a_z \qquad dl(\vec{r}) = dx\,\hat{a}_x + dy\,\hat{a}_y + dz\,\hat{a}_z$$

$$E(\vec{r}) \parallel dl(\vec{r})$$

معادلات خطوط میدان

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{E_x} = \dfrac{dy}{E_y} = \dfrac{dz}{E_z} \\[2mm] \dfrac{dr}{E_r} = \dfrac{r\,d\varphi}{E_\varphi} = \dfrac{dz}{E_z} \\[2mm] \dfrac{dr}{E_r} = \dfrac{r\,d\theta}{E_\theta} = \dfrac{r\sin\theta\, d\varphi}{E_\varphi} \end{cases}$$



* مثال) خطوط میدان بار در صفحه $z=0$ برای یک بار نقطه ای در مبداء مختصات بدست آورید.

$$\vec{r} = x\hat{a}_x + y\hat{a}_y + z\hat{a}_z$$

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \Rightarrow \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} = \underbrace{\frac{x a_x}{(x^2+y^2)^{3/2}}}_{E_x a_x} + \underbrace{\frac{y\hat{a}_y}{(x^2+y^2)}}_{E_y a_y}$$

$$\vec{E}_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (r^2)}\hat{a}_r$$

$$E_x = \frac{Qx}{4\pi\epsilon_0 (x^2+y^2)^{3/2}} \qquad E_y = \frac{Qy}{4\pi\epsilon_0 (x^2+y^2)^{3/2}}$$

طبق معادلات خطوط میدان :

$$\frac{dx}{\frac{Qx}{4\pi\epsilon_0 (x^2+y^2)^{3/2}}} = \frac{dy}{\frac{Qy}{4\pi\epsilon_0 (x^2+y^2)^{3/2}}} \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \int \frac{dy}{y} \Rightarrow \ln x = \ln y + k'$$

$$\Rightarrow \boxed{x = ky}$$ معادله خطوط میدان در صفحه $z=0$

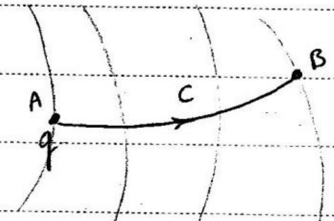
$$E_x = E\cdot a_x = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{a}_r\cdot\hat{a}_x = \frac{Qx}{4\pi\epsilon_0 (x^2+y^2)^{3/2}}$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

* پتانسیل الکتریکی : بار q را در میدان E در نقطه‌ای قرار می‌دهیم نیرویی که میدان E به بار q وارد می‌کند در جهت خطوط میدان و اندازه‌ی آن برابر qE است. مقدار کاری که میدان E به بار q وارد می‌کند تا آن را از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B در

$$E = -\nabla V$$



مسیر C جابجا کند برابر است با :

$$\boxed{W = q\int_A^B E\cdot dl = -q\int_B^A E\cdot dl}$$

« چون میدان پایستار است این مستقل از مسیر است ».

* در انتقال بار درون میدان الکتریکی کار یا به وسیله میدان انجام شود یا بر خلاف آن :

W مثبت : کار توسط میدان

W منفی : کار توسط عامل خارجی

* مقدار کاری که میدان الکتریکی برای جابجایی واحد بار مثبت از نقطه A به B انجام می‌دهد « اختلاف پتانسیل » بین دو نقطه A , B نامیده می‌شود و به صورت

$$\boxed{V_{AB} = \frac{W}{q} = \int_A^B E\,dl}$$

* اگر مسیر C عمود بر خطوط میدان باشد ($\vec{E} \perp \vec{dl}$) آنگاه $E\cdot dl = 0$ و دو نقطه A , B را « هم پتانسیل » می‌نامند. مجموعه نقاطی که هم پتانسیل هستند تشکیل سطحی به نام « سطح هم پتانسیل » می‌دهند بنابراین سطح هم پتانسیل بر خطوط میدان عمودند.

* مرجع صفر :

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon r}$$

بسته ↓ مطلق ; $\to \infty$ (در بینهایت)

در روابط ذکر شده درباره اختلاف پتانسیل بین دو نقطه بحث شده است. برای بدست آوردن پتانسیل مطلق یک نقطه ابتدا باید نقطه مرجع یا پتانسیل صفر تعریف کنیم. بطور معمول نقطه پتانسیل صفر در ∞ فرض می‌شود.

Subject:

Year. Month. Date. 89/1/14,15

(مثال 3-8)

* پتانسیل بار نقطه‌ای:

$$V_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A^B \left(\frac{Q \hat{a}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right) \cdot \left(\hat{a}_r dr + r \hat{a}_\theta d\theta + r\sin\theta \, \hat{a}_\varphi d\varphi \right)$$

$$= \int_{r_A}^{r_B} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 r} \Big]_{r_A}^{r_B} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_A} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_B} = V_A - V_B$$

- پتانسیل در میدان یک بار نقطه‌ای: اختلاف پتانسیل دو نقطه تابع فواصل آنها از محل بار است نه مسیر آنها.

$$V = -\int_\infty^R \left(a_R \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right) \cdot (a_r dr)$$ پتانسیل مرجع $V=0$

پتانسیل نقطه‌ای در میدان E برابر مقدار کاری است که میدان E برای حرکت دادن واحد بار مثبت از آن نقطه به ∞ انجام می‌دهد.

$$\Rightarrow \boxed{V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}}$$

* پتانسیل چند بار نقطه‌ای:

$$\vec{E} = \sum_{j=1}^{n} \vec{E}_j$$ میدان ناشی از بار q_j

$q_1, q_2, \dots, q_n$

$$V_A = \int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_r^\infty \left(\sum E_1 + E_2 + \cdots + E_n \right) dl = \int E_1 dl + \int E_2 dl + \cdots + \int E_n dl$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \int_r^\infty \vec{E}_j \cdot d\vec{l} \qquad \int E_j \cdot dl = \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 R_j}$$

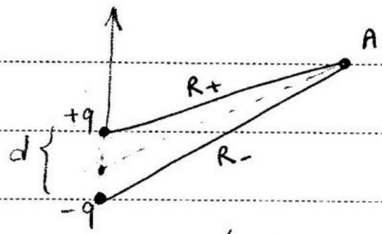
$$V(r') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^{n} \frac{q_j}{|r - r'_j|}$$

ص 92 کتاب چنگ

Subject:

Year. Month. Date. ( )

* مثال) دو قطبی الکتریکی:



$$V=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R_+}+\frac{-1}{R_-}\right) \quad ①$$

$$② \begin{cases} \dfrac{1}{R_+} \simeq \left(R-\dfrac{d}{2}\cos\theta\right)^{-1} = R^{-1}\left(1+\dfrac{d}{2R}\cos\theta\right) \\ \\ \dfrac{1}{R_-} \simeq (\qquad\qquad) = R^{-1}\left(1-\dfrac{d}{2R}\cos\theta\right) \end{cases}$$

مشابه

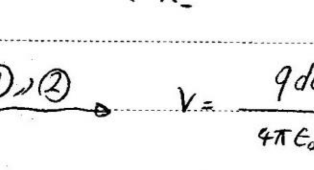
$$\xrightarrow{①\text{ در }②} \quad V=\frac{q\,d\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 R^2}=\frac{P\cdot a_R}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

$$E=-\nabla V=-a_R\frac{\partial V}{\partial R}-a_\theta\frac{\partial V}{R\,\partial\theta}$$

$$\Longrightarrow \frac{P}{4\pi\epsilon_0 R^3}\left(a_R\,2\cos\theta+a_\theta\sin\theta\right)$$

* پتانسیل الکتریکی توزیع پیوسته بار:

برای محاسبه پتانسیل ناشی از توزیع بارهای خطی، سطحی و حجمی ابتدا بار را به عناصر باری از عناصر کوچک تقسیم نموده و هر عنصر را به صورت بار نقطه‌ای در نظر می‌گیریم. پتانسیل در نقطه دلخواه A که به فاصله R_j از عنصر بار Δq_j قرار دارد و مقدار همین عنصر ناشی می‌شود برابر است با: ΔV_j



$$\Delta V_j=\frac{\Delta q_j}{4\pi\epsilon_0 R_j}$$

$$V=\sum_{j=1}^{n}\frac{\Delta q_j}{4\pi\epsilon_0 R_j}$$

در حالت حدی: $\Delta q_j \to 0$

$$\sum \longrightarrow \int$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

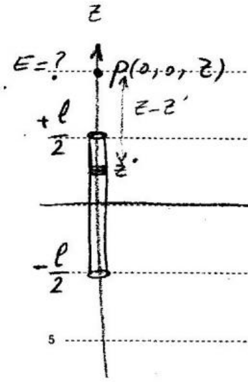
$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

* مثال) شدت میدان بار خطی با چگالی ρ_ℓ بطول ℓ در امتداد محور آن را بدست آورید.
(10-3 چنگ)



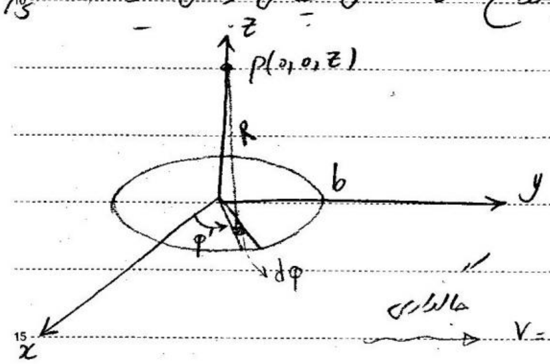
$$d\ell = dz' \qquad R = z - z' \qquad z > \ell/2$$

شدت ← پتانسیل ∇

$$V = \frac{\rho_\ell}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\ell/2}^{\ell/2}\frac{dz'}{z-z'} = \frac{\rho_\ell}{4\pi\epsilon_0}\ln\left(\frac{z+\ell/2}{z-\ell/2}\right)$$

$$E = -a_z\frac{dV}{dz} = a_z\frac{\rho_\ell \cdot \ell}{4\pi\epsilon_0\left(z^2 - \frac{\ell^2}{4}\right)}$$

* مثال 3-9) شدت میدان الکتریکی روی محور یک دیسک بشعاع b حامل چگالی بار سطحی یکنواخت ρ_s را بدست آورید.



$$0 < r' < b$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{s'}\frac{\rho_s}{R}\,ds' \quad , \quad ds' = r'dr'd\varphi' \quad , \quad R = \sqrt{z^2 + r'^2}$$

$$\xrightarrow{\text{حالا داریم}} V = \frac{\rho_s}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{b}\frac{r'}{\sqrt{z^2+r'^2}}\,dr'd\varphi'$$

$$\Rightarrow V = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0}\left[\sqrt{z^2+b^2} - |z|\right] \Rightarrow E = -\nabla V = -a_z\frac{\partial V}{\partial z} = \begin{cases} a_z\dfrac{\rho_s}{2\epsilon_0}\left(1 - \dfrac{z}{\sqrt{z^2+b^2}}\right) & : z > 0 \\ -a_z\dfrac{\rho_s}{2\epsilon_0}\left(1 + \dfrac{z}{\sqrt{z^2+b^2}}\right) & : z < 0 \end{cases}$$

تاکنون میدان الکتریکی توزیع بارهای ساکن را در فضای آزاد یا هوا بررسی کردیم در ادامه رفتار میدان را در محیط‌های مادی بررسی می‌کنیم.

ماکروسکوپی — پیوسته

میکروسکوپی — گسسته

محیط مادی
- هادی (الکترون آزاد بالا) ← (رسانندگی)
- نیمه هادی
- عایق

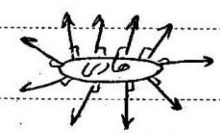
* خواص ماکروسکوپی الکتریکی محیط مادی در فصل 5 با پارامتر σ رسانایی تعریف می‌شود. در این بخش میدان الکتریکی و توزیع بار آزاد داخل توده هادی و روی سطح آن را بررسی می‌کنیم.

* در شرایط ساکن باری درون هادی وجود ندارد و بر اساس قانون گاوس میدان $\vec{E}$ نیز درون هادی صفر است.

درون هادی $\begin{cases} \vec{E}=0 \\ \rho=0 \end{cases}$

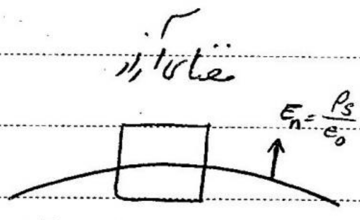
* در شرایط ساکن میدان $\vec{E}$ روی سطح هادی، همه جا عمود بر سطح است.

روی سطح هادی:

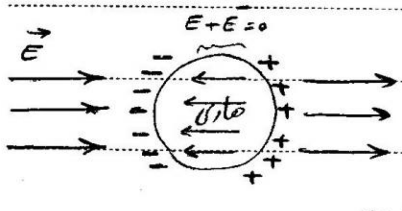


* به عبارتی سطح هادی یک سطح هم پتانسیل است.

* با نوشتن شرایط مرزی روی سطح گوسی بلعی در مرز مشترک هادی و فضای آزاد داریم:



$$\begin{cases} E_t=0 \\ E_n=\frac{\rho_s}{\epsilon_0} \end{cases}$$



کره هادی را در معرض میدان قرار داده، بار روی سطح آن القا می‌شود و میدانی خلاف جهت E ($\vec{E}'$) در داخل هادی برقرار می‌شود.

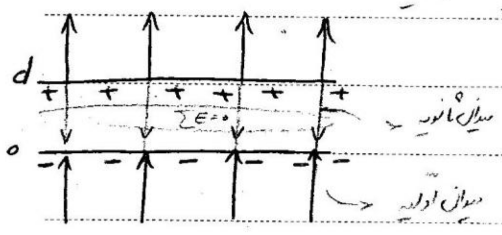
الکترون‌های آزاد یک جسم هادی تحت تأثیر میدان الکتریکی جابجا می‌شوند. با قرار گرفتن هادی در میدان، الکترون‌های آزاد خلاف جهت میدان حرکت کرده و در سطح جسم متوقف می‌شوند. بنابراین بار سطحی منفی روی آن بخش از جسم که خطوط میدان اولیه به آن وارد می‌شوند توزیع می‌شود. از آنجا که جسم در مجموع از نظر بار خنثی است

Subject:

Year. Month. Date. ( )

باری مثبت که میزان آن دقیقاً برابر بار سطحی منفی است بایستی در جایی از جسم بوجود آید. بار مثبت ایجاد شده جز در سطح هادی در جای دیگری نمی تواند ظاهر شود. بار مثبت در بخشی از سطح جسم که خطوط میدان از آن خارج می شود، بوجود می آید. بار سطحی که بدین گونه ایجاد شده به نوبه خود تولید یک میدان الکتریکی ثانویه در خلاف جهت میدان اعمال شده اولیه می کند. میدان ثانویه بایستی میدان اولیه در درون جسم هادی را تضعیف کند تا حدی که میدان درون هادی صفر شود. در غیر اینصورت حرکت الکترونها به سمت سطح تا صفر شدن میدان داخلی ادامه می یابد.

* مثال) یک تیغه هادی در فضای ناحیه بین $0<z<d$ قرار گرفته و میدان یکنواخت $E = E_0 a_z$ به جسم اعمال می شود. چگالی بار سطحی القایی روی سطح جسم هادی را روی $z=0$, $z=d$ بدست آورید.



چون میدان کل درون هادی باید صفر باشد میدان ثانویه حاصل از توزیع بارهای القایی بایستی مساوی و خلاف جهت میدان اولیه باشد.

* مثال) بار نقطه ای $+Q$ در مرکز یک پوسته هادی کروی با شعاع داخلی R_i و شعاع خارجی R_0 قرار دارد. میدان $\vec{E}$ و پتانسیل V را بصورت تابعی از فاصله شعاعی R تعیین کنید. سه سطح گوسی در نظر بگیرید S_1 و S_2 و S_3

$R_3 \quad R_2 \quad R_1$

$$\left.\begin{matrix} V(r) \\ E(r) \end{matrix}\right\} = ?$$

① $S_1 > R_0 \Rightarrow \oiint_S E\,ds = \frac{Q}{\epsilon_0}$

$$E = E_R \hat{a}_R \quad , \quad \begin{cases} E_\theta = 0 \\ E_\varphi = 0 \end{cases} \Rightarrow \int E\,ds = E_{R_1} 4\pi R^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E_{R_1} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \quad \text{سطح } S_1$$

$$\Rightarrow V_1 = \int_{\infty}^{R} E_{R_1} \cdot dR = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \quad \text{برای سطح } S_1$$

که می بینیم وجود پوسته تأثیری در مقدار میدان، پتانسیل در فاصله R_1 ندارد

② $S_2 : R_i < R_2 < R_0 \Rightarrow E_{R_2} = 0$ (درداخل رسانا)

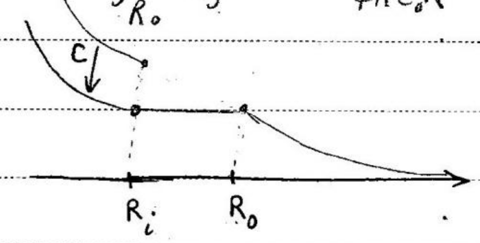
$$V_2 = V_1 = \left.\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}\right|_{R=R_0} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_0} \neq 0 \quad \text{برای } S_2$$

از کتاب ⑧

③ : S_3 : $R < R_i \Rightarrow E_{R_3} = \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$

$$V_3 = -\int_{R_0}^{R} E_{R_3}\, dR + C = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} + C$$

ثابت انتگرال‌گیری C را از لزوم برابری V_3 در $R = R_i$ با V_2 تعیین می‌شود.



$$V_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_0} = V_3\Big|_{R=R_i} \Rightarrow \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_i} + C = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_0}$$

$$C = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_i}\right) \Rightarrow V_3 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_i}\right)$$

* دی‌الکتریک‌ها در میدان الکتریکی ساکن :

تأثیر متقابل ماده بر میدان، بر اساس نوع مواد حالتی نظیر هدایت و قطبی شدن را در پی دارند. در عایق‌ها الکترون‌های لایه آخر همیشه در مجاورت اتم باقی مانده و آنها را الکترون‌های مقید می‌نامیم. به همین دلیل هدایت الکتریکی آنها ناچیز است. در عایق‌ها به علت دشواری دور شدن الکترون‌های لایه آخر از هسته، اعمال میدان خارجی تنها مرکز ثقل ابر الکترونی را نسبت به هسته اندکی جابجا می‌کند. جابجایی بارهای مثبت و منفی در جهت‌های مخالف ماده‌ی عایق را قطبی کرده و دوقطبی‌هایی را ایجاد می‌کند.

با ایجاد چگالی بار حجمی ρ_p درون دی‌الکتریک قطبی شده داریم :

$$\rho_p = -\nabla\cdot P$$

$$\nabla E = \frac{\rho}{\epsilon_0} + \frac{\rho_p}{\epsilon_0} \rightarrow \nabla E = \frac{1}{\epsilon_0}(\rho - \nabla\cdot P)$$

$$P \propto E \Rightarrow P = \chi_e E$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \nabla\cdot(\epsilon_0 E + P) = \rho \\ \nabla\cdot D = \rho \end{cases}, \quad D : \text{چگالی میدان الکتریکی}$$

χ_e : سازپذیری
(پذیرفتاری الکتریکی susceptibility)

$$\boxed{P = \epsilon_0 \chi_e E} \; ① \quad \Leftarrow \quad 0 < \chi_e < \infty$$

از 1 و 2
$$\Rightarrow D = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \chi_e \vec{E} \Rightarrow D = \epsilon_0 \underbrace{(1+\chi_e)}_{\epsilon_r} \vec{E} \Rightarrow D = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{D} = \epsilon \vec{E}}$$

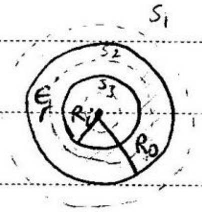
(همگن و خطی باشد) محیط ساده است

ϵ_0 : گذردهی خلاء $= \frac{10^{-9}}{36\pi} \left(\frac{F}{m}\right)$ — هوا $\epsilon_r = 1.00059$

ϵ_r : " نسبی

ϵ : " مطلق ماده

* مثال) یک بار نقطه‌ای $+Q$ در مرکز یک پوسته‌ی دی‌الکتریک کروی با شعاع درونی R_i و شعاع بیرونی R_0 قرار گرفته است. ضریب دی‌الکتریک پوسته ϵ_R است. مقادیر E ، V ، D ، P را به دست آورید به صورت تابعی از فاصله R .



$S_1 : R > R_0$

$$E_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

$$V_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon R}, \quad \epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r$$

$$D_{R_1} = \epsilon_0 E_{R_1} = \frac{Q}{4\pi R^2}$$

$$P_{R_1} = 0$$

$S_2 : R_i < R < R_0 \Rightarrow$
$$\vec{E}_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon R^2}$$

$$D_2 = \epsilon E_{R_2} = \frac{Q}{4\pi R^2}$$

$$P_2 = \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right)\frac{Q}{4\pi R^2} = D - \epsilon_0 E$$

$$\Rightarrow V_2 = -\int_{\infty}^{R} E_{R_1} dR - \int_{R_0}^{R} E_{R_2} dR = \underbrace{V_1\Big]_{R=R_0}}_{\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_0}} - \frac{Q}{4\pi\epsilon}\int_{R_0}^{R}\frac{1}{R^2}dR = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\left(1-\frac{1}{\epsilon_r}\right)\frac{1}{R_0} + \frac{1}{\epsilon_r R}\right]$$

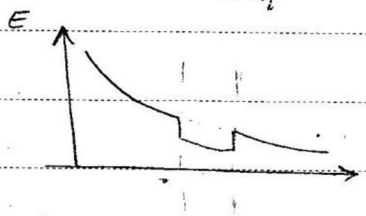
$$\Rightarrow \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r R} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r R_0} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R}\left(1-\frac{1}{\epsilon_r}\right)\frac{1}{R_0 \cdot \epsilon_r}\right)$$

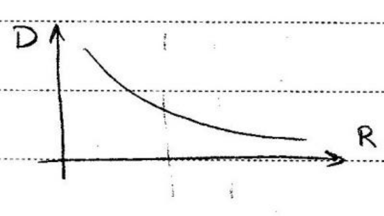
Subject:
Year. Month. Date. ( )

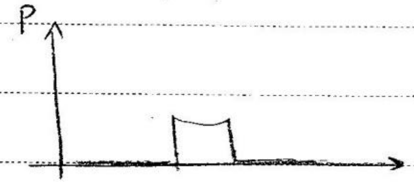
$S_3: \; R < R_i$

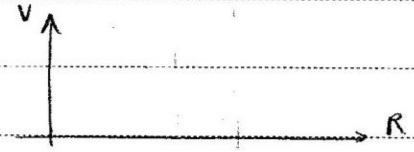
$E_{R_3} = \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$ $\qquad D_{R_3} = \dfrac{Q}{4\pi R^2}$ $\qquad P_{R_3} = 0$

$V_3 = V_2\Big|_{R=R_i} - \int_{R_i}^{R} E_{R_3}\, dR = \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\left(1-\dfrac{1}{\epsilon_r}\right)\dfrac{1}{R_0} - \right.$

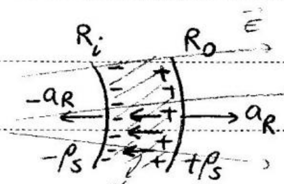








$\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P}$



بار حجمی قطبی شده خالص در داخل پوسته‌ی الکتریک نداریم به عبارتی:

$\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P} = -\dfrac{1}{R^2}\dfrac{\partial}{\partial R}\left(R^2 P_{R_2}\right) = 0$

$\rho_{P_s}\Big|_{R=R_i} = P\cdot(-a_R) = -P_{R_2} = -\left(1-\dfrac{1}{\epsilon_r}\right)\dfrac{Q}{4\pi R_i^2}$

$\rho_{P_s}\Big|_{R=R_0} = P\cdot(a_R) = P_{R_2}\Big|_{R=R_0} = \left(1-\dfrac{1}{\epsilon_r}\right)\dfrac{Q}{4\pi R_0^2}$

اما بارهای سطحی قطبی شده منفی روی سطح داخلی و بارهای سطحی قطبی شده مثبت روی سطح خارجی وجود دارد. شدت میدان بصورت شعاعی در جهت داخل ایجاد می‌کنند لذا میدان ناشی از بار نقطه‌ای را در ناحیه 2 کاهش می‌دهد.

Subject:

Year. Month. Date. ( ) 89/1/22

* مقاومت دی‌الکتریک :

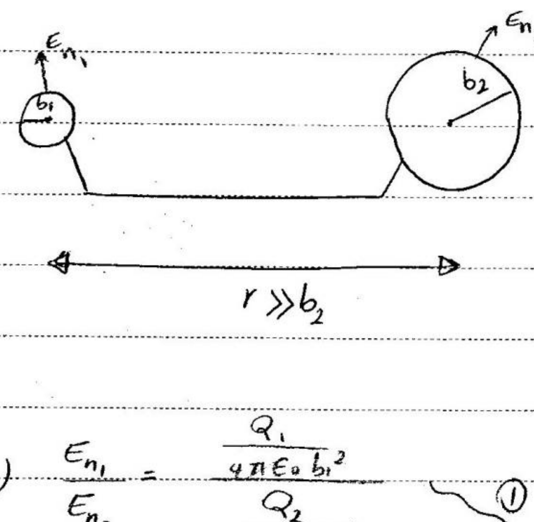
اعمال میدان الکتریکی خارجی قطبی شدن مواد را در پی دارد. اگر میدان خیلی قوی باشد الکترونها از مولکول خارج شده و الکترون را کسب از میدان شتاب داده و با برخورد با مولکولها تصادم کرده و موجب تخریب و تغییر وضعیت دائمی آن می‌شود ... از همین قطبی شدن به این ترتیب ممکن است ماده هادی شود و جابجایی فیزیکی را ایجاد کند. این پدیده را «شکست دی‌الکتریک» نامند.

حداکثر شدت میدان الکتریکی که یک ماده دی‌الکتریک می‌تواند بدون شکست تحمل کند «مقاومت دی‌الکتریک» نامند.

برای هوا : $3\ kV/mm$

* مثال) دو هادی کروی با شعاع‌های b_1 و b_2 توسط یک سیم به هم متصل شده‌اند. فاصله بین دو هادی در مقایسه با b_2 خیلی بزرگ فرض شده و بار کل Q روی کل کره‌ها قرار دارد. مطلوب است الف) بار روی هر کره ب) شدت میدان روی سطح کره‌ها

الف)



$$Q = Q_1 + Q_2$$

$$V_1 = V_2 \Rightarrow \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 b_1} = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 b_2} \Rightarrow \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{b_1}{b_2}$$

$$\begin{cases} Q_1 = \dfrac{b_1}{b_1+b_2} Q \\ Q_2 = \dfrac{b_2}{b_1+b_2} Q \end{cases} \overset{(1)}{\Leftarrow}$$

ب)

$$\frac{E_{n_1}}{E_{n_2}} = \frac{\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 b_1^2}}{\frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 b_2^2}} \xrightarrow{(1)} \frac{Q_1}{Q_2}\left(\frac{Q_2}{Q_1}\right)^2 \Rightarrow \frac{E_{n_1}}{E_{n_2}} = \frac{Q_2}{Q_1}$$

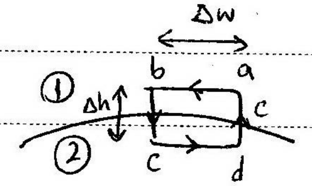
چون $\rho_s = \frac{Q}{r^2}$ در الف نسبت Q ها به صورت $\frac{r}{r}$ است و $\frac{b_1}{b_2}$ است بنابراین چگالی سطحی b_1 بیشتر از b_2 خواهد شد پس میدان b_1 از میدان b_2 قوی‌تر خواهد شد (از آنجا که بار در b_1 بیشتر است)

* شرایط مرزی میدانهای الکتریکی :

مسائل الکترومغناطیس شامل محیطهایی با خواص فیزیکی متفاوت است. هدف ما تعیین روابط کمیتهای میدان در فصل مشترک دو محیط

حالتی میدان الکتریکی

به عبارتی بررسی تغییرات بردارهای E و D در عبور از فصل مشترک است

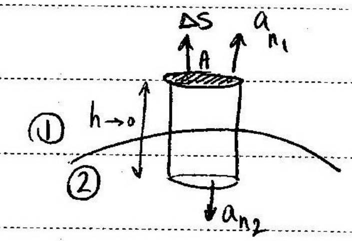

$C:\ abcda$

$$\oint_C E\cdot dl = 0 \qquad \text{(مسیر بسته)} \qquad bc = da = 0$$

$$E\cdot\Delta W + E_2(-\Delta W) = 0 \longrightarrow E_{1t}\,\Delta W + E_{2t}(-\Delta W) = 0$$

E_t : میدان مماسی

$$\Longrightarrow \boxed{E_{1t} = E_{2t}} \quad (*)$$



$$\oint_S D\cdot ds = Q \Longrightarrow \underbrace{\int}_{\text{بالایی}} + \underbrace{\int}_{\text{پایینی}} + \cancel{\underbrace{\int}_{\text{جانبی}}}^{\,0}$$

$$= (D_1\, a_{n_2} + D_2\, a_{n_1})\,\Delta S \Longrightarrow a_{n_2}(D_1 - D_2)\,\Delta S \quad ① \qquad Q = \Delta S\,\rho_s \quad ②$$

$$① = ② \Longrightarrow \Delta S\,(D_{n_1} - D_{n_2}) = \rho_s\,\Delta S \Longrightarrow \boxed{D_{n_1} - D_{n_2} = \rho_s} \quad (**)$$

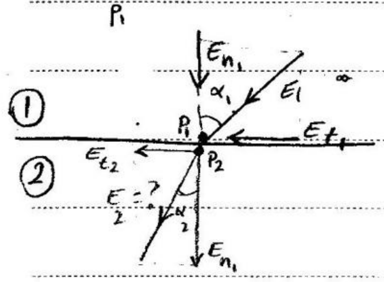
D_n : حالت نرمال

فرض:

$\left\{\begin{array}{l} ① \text{ عایق} \\ ② \text{ هادی} : E_2 = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow D_{n_1} = \rho_s \Longrightarrow E_{n_1} = \dfrac{\rho_s}{\epsilon}$

$\left\{\begin{array}{l} ① \text{ عایق} \\ ② \text{ عایق} \end{array}\right. \Longrightarrow D_{n_1} = D_{n_2}\ ,\ \rho_s = 0$ بار سطحی نداریم $\Longrightarrow \epsilon_1 E_{n_1} = \epsilon_2 E_{n_2} \Longrightarrow \dfrac{E_{n_1}}{E_{n_2}} = \dfrac{\epsilon_2}{\epsilon_1}$

* مثال) در محیط عایقی با ضریب دی‌الکتریک‌های ϵ_1 و ϵ_2 توسط مرز مسطح بدون بار از هم جدا شده‌اند. اندازه‌ی شدت میدان الکتریکی در نقطه‌ی P_1 واقع در محیط ① برابر E_1 است و با امتداد قائم زاویه‌ی α_1 می‌سازد. اندازه و راستای میدان الکتریکی را در نقطه‌ی P_2 در محیط ② تعیین کنید.



معلوم: E_{1t}, E_{1n}, E_1, α_1

مجهول: E_{2t}, E_{2n}, α_2, E_2

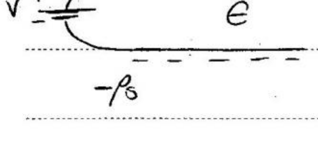
$$\begin{cases} E_{t_1} = E_{t_2} \longrightarrow E_1 \sin\alpha_1 = E_2 \sin\alpha_2 \\ D_{n_1} = D_{n_2} \longrightarrow \epsilon_1 E_1 \cos\alpha_1 = \epsilon_2 E_2 \cos\alpha_2 \end{cases} \longrightarrow \frac{\tan\alpha_1}{\tan\alpha_2} = \epsilon_1/\epsilon_2 \Rightarrow$$

ϵ_1 بزرگتر در محیط ① غلیظ‌تر است

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{t_1} + \vec{E}_{n_1} \qquad |E_1| = \sqrt{E_{1t}^2 + E_{1n}^2} \qquad ?\ E_2 = \sqrt{E_{2t}^2 + E_{2n}^2} \Rightarrow$$

$$E_2 = \sqrt{(E_2 \sin\alpha_2)^2 + (E_2 \cos\alpha_2)^2} \Rightarrow \sqrt{(E_1 \sin\alpha_1)^2 + \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} E_1 \cos\alpha_1\right)^2} = E_1 \sqrt{(\sin\alpha_1)^2 + \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \cos\alpha_1\right)^2}$$

* ظرفیت خازن 8



هادی در میدان الکتریکی ساکن جسمی هم‌پتانسیل است و بارهای آن بر روی سطح به گونه‌ای توزیع شده که میدان داخلی صفر شود. با افزایش بار، چگالی بار سطحی ρ_s در همه جا به همان نسبت افزایش می‌یابد. از رابطه‌ی ... نتیجه می‌شود که پتانسیل هادی متناسب است با بار. با افزایش V، E را با همان نسبت افزایش می‌دهد همچنین ρ_s و در نتیجه بار Q نیز با همین ضریب افزایش می‌یابد بنابراین نسبت Q به V ثابت می‌ماند که ثابت تناسب C را ظرفیت خازن گوییم.

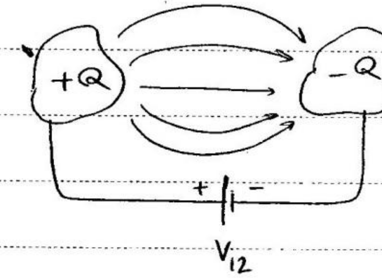
ظرفیت یک خازن خاصیتی است فیزیکی و به شکل هندسی دو هادی و محیط بین آنها بستگی دارد، نه به بار Q و اختلاف پتانسیل بین آنها.

Subject:

Year. Month. Date. ( )

محاسبه ظرفیت خازن	Q (دقیق) معلوم	$\longleftarrow$	V_{12} مجهول	$\Leftarrow$	$C = Q/V$
	V_{12} (دقیق)	$\longleftarrow$	Q	$\Leftarrow$	$C = Q/V$

مراحل



① دستگاه مناسب

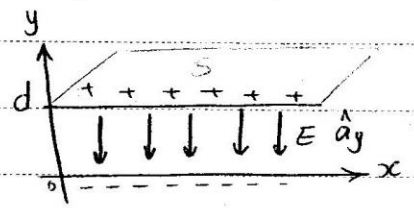
② $\begin{matrix} +Q \\ -Q \end{matrix}$

③ E ? بیاب

④ $V = \int E\,dl$

⑤ $C = \dfrac{Q}{V}$

*مثال) خازن صفحه‌ای موازی از دو صفحه هادی موازی به سطح S و به فاصله یکنواخت d تشکیل می‌شود. فضای بین صفحه‌ها باید عایق با الدرهی (دی‌الکتریک) ϵ پر شده است. ظرفیت خازن را بدست آورید.



① $\rho_S = \dfrac{Q}{S}$ ② $-Q : y = 0 \quad , \quad +Q : y = d$

③ $E = \dfrac{\rho_S}{\epsilon}(-\hat{a}_y) = -a_y \dfrac{Q}{\epsilon S}$ ④ $V = -\int_{y=0}^{d} E \cdot dl = -\int_0^d \left(-a_y \dfrac{Q}{\epsilon S}\right)(a_y\,dy) = \dfrac{Q}{\epsilon S} \cdot d$

⑤ $C = \dfrac{Q}{V} = \underline{\epsilon\, S/d}$

$E = -\hat{a}_y \dfrac{V_{12}}{d}$ $\quad \begin{cases} y = d \\ y = 0 \end{cases} \begin{cases} +\rho_S \\ -\rho_S \end{cases}$ $\quad \rho_S = \epsilon E_y = \epsilon \dfrac{V_{12}}{d}$ $\quad Q = ?$ $\quad$ معلوم: V_{12}

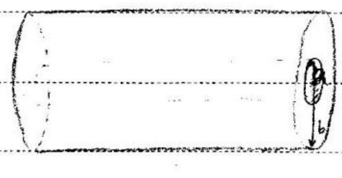
$\Rightarrow Q = \rho_S \cdot S = (\epsilon\, S/d)\, V_{12} \Rightarrow C = \dfrac{Q}{V} = \dfrac{\epsilon \frac{S}{d} \cdot V_{12}}{V_{12}} = \epsilon\, S/d$

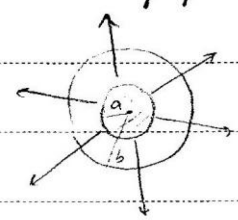
*مثال) یک خازن استوانه‌ای از یک هادی داخلی به شعاع R و هادی بیرونی با شعاع b تشکیل شده است. فضای بین هادی‌ها از دی‌الکتریک با الدرهی ϵ ... و طول خازن برابر l است. ظرفیت خازن را محاسبه کنید.

Subject:
Year.   Month.   Date.   ( )

28/آذر/89

حل از قانون گاوس:





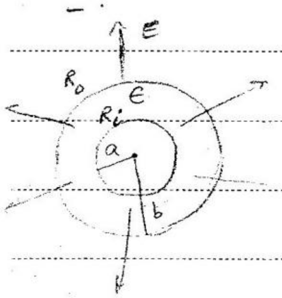
$$E = E_r \hat{a}_r = \hat{a}_r \frac{Q}{2\pi\epsilon l r}$$

$$V_{ab} = -\int_{r=b}^{r=a} E\,dl = -\int_b^a \left(\hat{a}_r \frac{Q}{2\pi\epsilon l r}\right)(\hat{a}_r\,dr)$$

$$\Rightarrow \frac{Q}{2\pi\epsilon l}\ln\left(\frac{b}{a}\right) \qquad C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{Q}{2\pi\epsilon l}\ln(b/a)} = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln(b/a)}$$

* ظرفیت: یعنی مقدار بار الکتریکی که باید به جسم افزوده شود تا پتانسیل الکتریکی آن به اندازه ۱V افزایش یابد.

یک خازن کروی از یک هادی به شعاع R_i و یک هادی بیرونی با دیواره‌ای به شعاع R_0 تشکیل شده است و فضای بین آنها از دی‌الکتریک با گذردهی ϵ پر شده است. ظرفیت خازن را بدست آورید.



$$E = \hat{a}_R E_R = \hat{a}_R \frac{Q}{4\pi\epsilon R^2} \qquad V_{ab} = -\int_{R_0}^{R_i} \frac{Q}{4\pi\epsilon R^2}\,dR = \frac{Q}{4\pi\epsilon}\left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_0}\right)$$

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{4\pi\epsilon}{\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_0}} \qquad \text{if: } R_0 \to \infty \Rightarrow C = 4\pi\epsilon R_i$$

* انرژی: پتانسیل الکتریکی یک نقطه در میدان الکتریکی را پیشتر به عنوان کار لازم برای آوردن واحد بار مثبت از بی‌نهایت به عنوان مرجع صفر به آن نقطه تعریف کردیم. بدین ترتیب برای آوردن بار q_1 از ∞ به محل استقرار کاری انجام نمی‌دهیم چرا که میدانی نداریم.

$\infty \qquad W_1 = 0$

(1) q_1

(*) تا میدان متقابلی وجود نداشته باشد تمام محیط هم پتانسیل است پس برای جابجایی بارها به هیچ انرژی احتیاج نداریم.

(2) $Q_1 \;\; R_{12} \;\; Q_2$

(3) $Q_1 \;\; R_{12} \;\; Q_2 \;\; R_{13} \;\; R_{23} \;\; Q_3$

$$\Delta W = Q_3 V_3 = Q_3\left(\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_{13}} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{23}}\right)$$

$$W_2 = Q_2 V_2 = Q_2 \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_{12}}$$

$$\Rightarrow W_3 = W_2 + \Delta W$$

توزیع تقارنی

$$\frac{Q_2 Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_{12}} = Q_1 V_1 \Rightarrow W_2 = \frac{1}{2}(Q_1 V_1 + Q_2 V_2)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{Q_1 Q_2}{R_{12}} + \frac{Q_2 Q_3}{R_{23}} + \frac{Q_1 Q_3}{R_{13}}\right]$$

$$W_3 = \frac{1}{2}\left[Q_1\left(\frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0} + \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0}\right) + \right.$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\Rightarrow W_3 = \frac{1}{2}\left[Q_1\left(\frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{12}} + \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0 R_{13}}\right) + Q_2\left(\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_{12}} + \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0 R_{23}}\right) + Q_3\left(\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_{13}} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{23}}\right)\right]$$

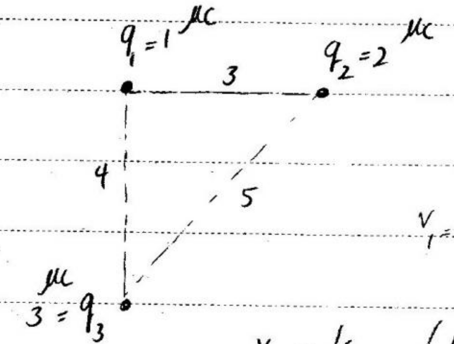
$$\Rightarrow W_3 = \frac{1}{2}\left(Q_1V_1 + Q_2V_2 + Q_3V_3\right)$$: انرژی کل برای قرار دادن بار سوم

انرژی N بار:
$$W_e = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} Q_k V_k$$

پتانسیل N بار:
$$V_k = \frac{1}{4\pi\epsilon}\sum_{k=1}^{N}\frac{Q_k}{R_{jk}} \quad , \quad j \neq k$$

* نتیجه: انرژی پتانسیل n بار نقطه‌ای گسسته مکانی از روابط فوق محاسبه می‌شود که در آن V_k پتانسیل الکتریکی در نقطه Q_k ناشی از سایر بارها است.

* مثال: مطلوبست $W_e = ?$



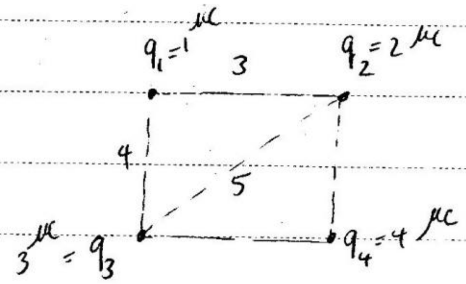
$$V_k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{j=1}\frac{Q_j}{R_{jk}} \quad , k \neq j$$

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{2\times10^{-6}}{3} + \frac{3\times10^{-6}}{4}\right)$$

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{10^{-6}}{3} + \frac{3\times10^{-6}}{5}\right) \quad \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9\times10^{9}\right)$$

$$V_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{10^{-6}}{4} + \frac{2\times10^{-6}}{5}\right)$$

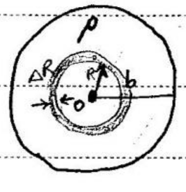
$$W_e = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3} Q_k V_k = +23{,}46\times10^{-3}\ J$$



تمرین:

* انرژی بارهای پیوسته : انرژی لازم برای تشکیل یک کره ی باردار یکنواخت به شعاع b و چگالی بار حجمی ρ را بدست آورید.

روش ①



حل : فرض می کنیم کره ی باردار از کنار هم قرار دادن لایه های متوالی کروی به ضخامت dR (یا ΔR) تشکیل شده است. پتانسیل در شعاع R برابر است با V_R $\Leftarrow$ $V_R = \dfrac{Q_R}{4\pi\epsilon_0 R}$

(بار حجمی) $Q_R = \rho_v \cdot v = \rho(\frac{4}{3}\pi R^3)$, $dQ_R = \rho(4\pi R^2)\,dR$: (از جنس سطح)

$$\boxed{dW = V_R\, dQ_R = \frac{4\pi}{3\epsilon_0}\rho^2 R^4 dR} \Rightarrow W = \int_0^b dW = \int_0^b \frac{4\pi}{3\epsilon_0}\rho^2 R^4 dR$$

$$\Rightarrow \boxed{W_e = \frac{4\pi\rho^2 b^5}{15\epsilon_0}} \quad (J)$$

انرژی کل

$$Q_{کل} = \rho\,\frac{4}{3}\pi b^3 \Rightarrow W_e = \frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 b}$$

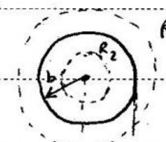
روش ② : حل مثال به روش فرمول ـــ اصلاح فرمول از گسسته به پیوسته :

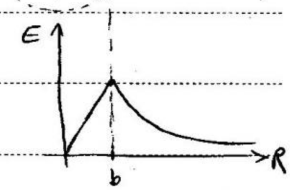
$Q_k \longrightarrow \rho dv$

$\Sigma \longrightarrow \int$

پتانسیل حجم

$$W_e = \frac{1}{2}\int_{v'} \rho V dv \Rightarrow W_e = \frac{\rho}{2}\int_{v'} V dv = \frac{\rho}{2}\int_0^b V(4\pi R^2)\,dR$$





$$V = -\int_\infty^R E\cdot dR = -\left[\int_\infty^b E_{R_1} dR + \int_b^R E_{R_2} dR\right] = -\left[\int_\infty^b \frac{\rho b^3}{3\epsilon_0 R^2} dR + \int_b^R \frac{\rho R}{3\epsilon_0} dR\right]$$

$$\begin{cases} E_{R_1} = \hat{a}_R \dfrac{Q}{4\pi\epsilon R^3} = \hat{a}_R \dfrac{\rho b^3}{3\epsilon_0 R^2} : R > b \\ E_{R_2} = \hat{a}_R \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \hat{a}_R \dfrac{\rho R}{3\epsilon_0} : R < b \end{cases}$$

$$\Rightarrow V = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\left(b^2 + \frac{b^2}{2} - \frac{R^2}{2}\right) = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\left(\frac{3}{2}b^2 - \frac{R^2}{2}\right)$$

$$\Rightarrow W_e = \frac{\rho}{2}\int_0^b \left[\frac{\rho}{3\epsilon_0}\left(\frac{3}{2}b^2 - \frac{R^2}{2}\right)\right] 4\pi R^2 dR = \frac{4\pi\rho^2 b^5}{15\epsilon_0}$$

ـــ روش ① ساده تر است