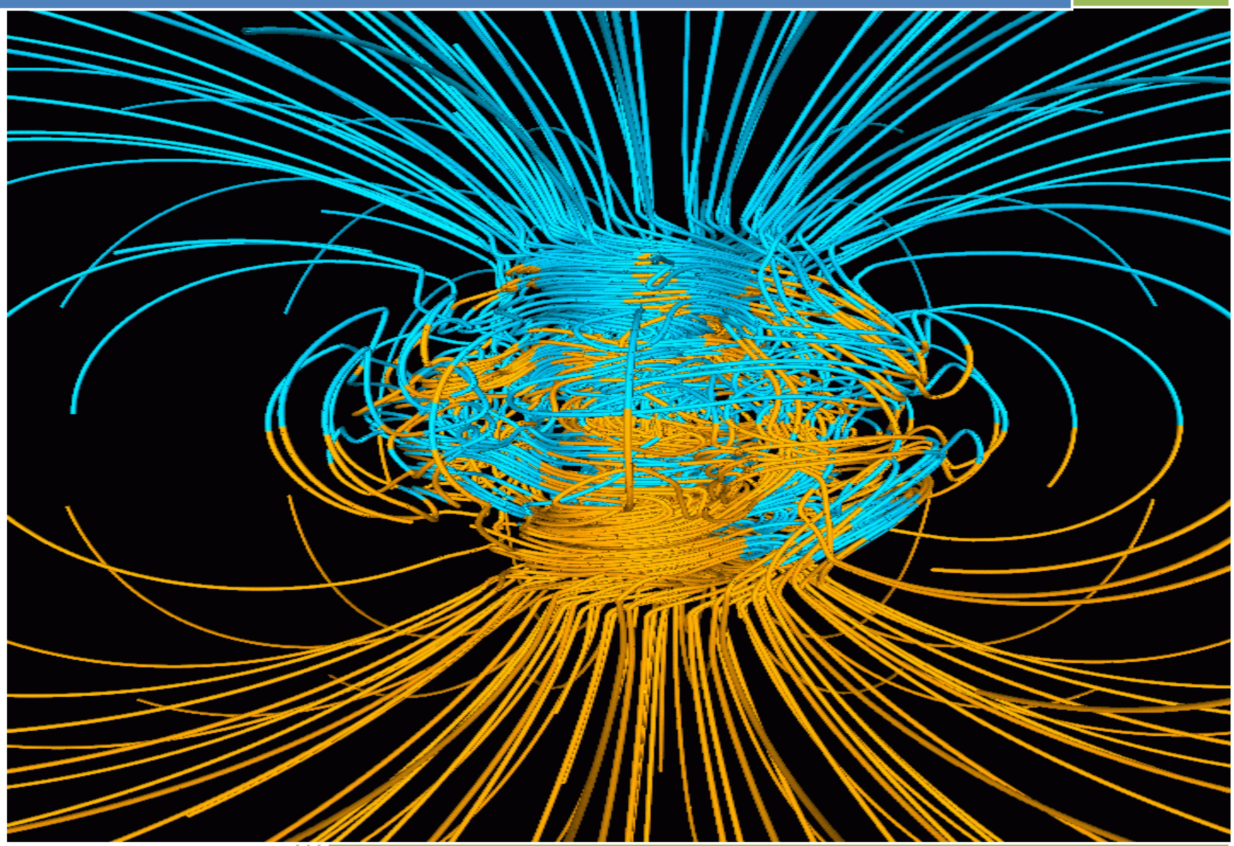
# باشگاه مهندسان سمنان

# جزوه الکترومغناطیس-دانشگاه سمنان



استاد مربوطه: دکتر رضایی

تهیه و تنظیم: ایمان شریعت پناهی

اسکن جزوه: محمدرضا خالصی

فصل اول: آنالیز برداری

Subject:
Year. Month. Date. ( )

الکترومغناطیس استاد: آقای رضایی

"مبانی الکتریکی و مغناطیسی ساکن"

* منابع: 1) کتاب چنگ، ترجمه: دکتر جبه‌دار 2) رضایی 3) هیت 4) تستهای ارشد

* سرفصل ها:

فصل ① ریاضیات

فصل ② آنالیز برداری - جبر برداری - دستگاه‌های مختصات - اپراتور ∇ (گرادیان، کرل و ...)

فصل ③ میدان‌های الکتریکی ساکن (F - E - V - W , ...)

فصل ④ مسائل " " " (اصل تصویر - مسائل مرزی و ...)

میانترم

فصل ⑤ هادی ها

پایانترم

فصل ⑥ میدان‌های مغناطیسی ساکن

حل تمرین

40 درصد پایانترم

40 درصد میانترم

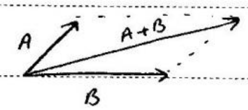
20 درصد کلاسی (حل تمرین و ...)

Subject :

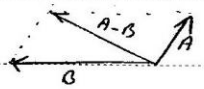
Year . Month . Date . ( )

"آنالیز برداری"

* جمع برداری :




$\vec{A}+\vec{B}$




$A-B = A+(-B)$

* ضرب عددی (اسکالر) : یا داخلی

* $\vec{A}\cdot\vec{B} = |A||B|\cos\alpha$     $\alpha$ : زاویه بین $\vec{B}, \vec{A}$

* $\vec{A}\cdot\vec{A} = A^2$

* $\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$     * $\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\vec{C}$

* ضرب خارجی :

* $\vec{A}\times\vec{B} = |A||B|\sin\alpha$

* $\vec{A}\times\vec{B} = -\vec{B}\times\vec{A}$

* $\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\times\vec{B} + \vec{A}\times\vec{C}$

* مثال) برای سه بردار $A$ ، $B$ ، $C$ مطلوب است : $a_A$ - $|A-B|$ - $A\cdot B$ - $\theta_{AB}$ - مولفه $A$ در جهت $C$ - $A\times C$ - $A\cdot(B\times C)$

$$\begin{cases} A = a_x + 2a_y - 3a_z \\ B = -4a_y + a_z \\ C = 5a_x - 2a_z \end{cases}$$

$a_x = \hat{i}$   $a_y = \hat{j}$   $a_z = \hat{k}$

$$A\times B = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$A\cdot(B\times C) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

قوانین الکترومغناطیس نسبت به دستگاه‌های مختصات تغییر نمی‌کند ولی حل مسائل عملی لازم می‌دارد به روابط استخراج از این قوانین در دستگاه مختصات مناسب هندسه‌ی مسائل داده شده بیان شوند.

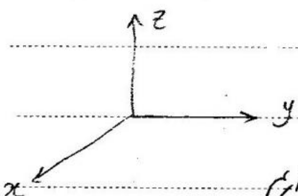
دستگاه‌های مختصات سه ۱) کارتزین ۲) استوانه‌ای ۳) کروی

$x \leftarrow u_1 =$ ثابت

$y \leftarrow u_2 =$ ثابت

$z \leftarrow u_3 =$ ثابت

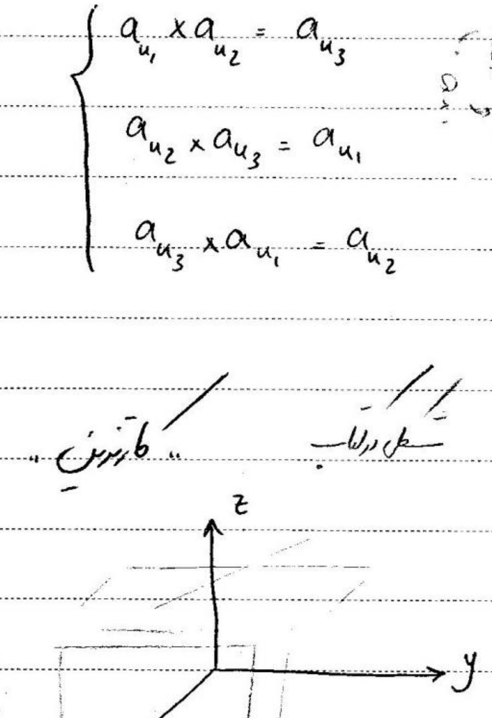
موقعیت نقطه‌ی منبع در فضای سه بعدی تقاطع سه سطح متعامد است. مشخص می‌شود سه خانواده‌ی سطح با تعریف شود. اگر این سه سطح دو به دو بر هم عمود باشند، یک دستگاه مختصات متعامد داریم.



یک دستگاه مختصات سه بردار واحد به جهت مختصاتی $a_{u_1}$ ، $a_{u_2}$ ، $a_{u_3}$ داریم که آنها را بردارهای پایه می‌نامیم و این سه بردار، راستگرد هستند.

$$\begin{cases} a_{u_1} \times a_{u_2} = a_{u_3} \\ a_{u_2} \times a_{u_3} = a_{u_1} \\ a_{u_3} \times a_{u_1} = a_{u_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{A} = A_{u_1}\hat{a}_{u_1} + A_{u_2}\hat{a}_{u_2} + A_{u_3}\hat{a}_{u_3} \\ A = |A| = \sqrt{A_{u_1}^2 + A_{u_2}^2 + A_{u_3}^2} \end{cases}$$

«کارتزین» «شکل در کتاب» «دستگاه استوانه‌ای»




$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad r \geq 0$

$\varphi = \tan^{-1} \frac{y}{x} \qquad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$

$z = z \qquad -\infty \leq z \leq +\infty$

شکل در کتاب

ص ۳۱ , ۳۶ , ۴۱

Subject:

Year. Month. Date. ( )

* دستگاه مختصات کروی و تلاقی سه صفحه متعامد در رابطه :  شکل در کتاب

۱) یک سطح کروی به مرکز مبداء مختصات و شعاع r  $R=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ; $R \geq 0$

2) " " مخروطی به رأس مبداء مختصات و نیم زاویه θ و محوری منطبق بر محور z  $\theta = \text{Arc}\cos \frac{z}{r}$  $0 \leq \theta \leq \pi$

3) یک نیم صفحه که یال آن محور z بوده و با صفحه y=0 زاویه φ بسازد.  $\varphi = \text{Arc}\tan \frac{y}{x}$

$0 \leq \varphi \leq 2\pi$

" کارتزین "

$$dl = a_x dx + a_y dy + a_z dz$$

(سطح)

$$\begin{cases} ds_x = dy \cdot dz \\ ds_y = dx \cdot dz \\ ds_z = dx \cdot dy \end{cases}$$

(حجم) $dv = dx \cdot dy \cdot dz$

" استوانه‌ای "

$$dl = a_r dr + r a_\varphi d\varphi + a_z dz$$

$$\begin{cases} ds_r = r d\varphi \cdot dz \\ ds_\varphi = dr \cdot dz \\ ds_z = r d\varphi \cdot dr \end{cases}$$

ژاکوبین

$dv = r dr d\varphi dz$

" کروی "

$$dl = a_R dR + R a_\theta d\theta + R \sin\theta \, d\varphi \cdot a_\varphi$$

$$dv = R^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$$

$$\begin{cases} ds_R = R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \\ ds_\theta = R \sin\theta \, dR \, d\varphi \\ ds_\varphi = R \, dR \, d\theta \end{cases}$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )



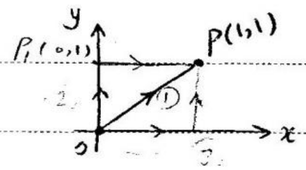
" اپراتورها "

$\nabla$

* انتگرال شامل بردارها :

$$\int \vec{F}\, dv \Rightarrow \int F_x a_x dx + \int F_y a_y dy + \int F_z a_z dz$$

* مثال) $\int_0^P r^2 dr$




دارم : $\int_C \underbrace{v\, d\ell}_{\text{المان طول}} = \int v(x,y,z)\left[a_x dx + a_y dy + a_z dz\right]$ مسیر ①

مسیر ② : $= a_r \int_0^P r^2 dr \Longrightarrow a_r \int_0^{\sqrt{2}} r^2 dr = \dots = \frac{2}{3} a_x + \frac{2}{3} a_y = \hat{a}_y \int_0^{P_1} y^2 dy + a_x \int_{P_1}^{P} (1+x^2)\, dx$

$\sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$$= \frac{4}{3} a_x + \frac{1}{3} a_y$$

مسیر ③ : . . . . . . $= \frac{1}{3} a_x + \frac{4}{3} a_y$

$\nabla$

* از یک اسکالر گرادیان عملگر به یک بردار میدان تبدیل می‌شود.

* مشتق‌های میدان‌های اسکالر و برداری :

میدان تابعی است ریاضی یا بیانگر تغییرات کمیت فیزیکی در ناحیه‌ای از فضا که برحسب اسکالر یا برداری بودن کمیت ، میدان نیز اسکالر یا برداری خواهد بود.

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad f(x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y, z) - f(x,y,z)}{\Delta x} \qquad f(x,y,z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y, \Delta z) - f(x,y,z)}{\Delta y} \qquad df = \left(\frac{\partial f}{\partial x} a_x + \frac{\partial f}{\partial y} a_y + \frac{\partial f}{\partial z} a_z\right) \cdot (a_x dx + a_y dy + a_z dz)$$

$\nabla$

$dl$

PAPCO $\frac{\partial f}{\partial z} =$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

* گرادیان تابع اسکالر:

$$df = \nabla f \cdot dl = |\nabla f||dl|\cos\alpha$$

گرادیان تابع اسکالر برداری است به اندازه آن حداکثر مشتق جهتی است و جهت آن در امتدادی است که مشتق جهتی max است. به عبارتی گرادیان حداکثر مشتق جهتی است. جهت گرادیان عمود بر سطح هم تراز است زیرا در این راستا تغییرات تابع اسکالر V حداکثر تغییرات را دارد.

اپراتور del در مختصات کارتزین $\Rightarrow \nabla = a_x \frac{\partial}{\partial x} + a_y \frac{\partial}{\partial y} + a_z \frac{\partial}{\partial z}$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} a_x + \frac{\partial V}{\partial y} a_y + \frac{\partial V}{\partial z} a_z$$

$$\nabla = a_{u_1} \frac{\partial}{h_1 \partial u_1} + a_{u_2} \frac{\partial}{h_2 \partial u_2} + a_{u_3} \frac{\partial}{h_3 \partial u_3}$$

| | کارتزین | استوانه | کروی |
|---|---|---|---|
| $h_1$ | 1 | 1 | 1 |
| $h_2$ | 1 | r | R |
| $h_3$ | 1 | 1 | $R\sin\theta$ |

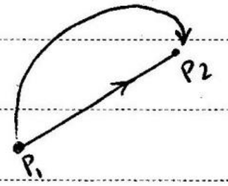
Sph (کروی)

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial R} a_R + \frac{1}{R}\frac{\partial V}{\partial \theta} a_\theta + \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi} a_\varphi$$

* نکته:

اگر بردار $\vec{A} = \nabla V$ ، $V = V(x,y,z)$ آنگاه

$$\int_{P_1}^{P_2} \vec{A} \cdot \vec{dl}$$ : مستقل از مسیر



انتگرال گرادیان تابع اسکالر V حول هر مسیر بسته‌ای همواره صفر است.

$$\Rightarrow \int_{P_1}^{P_1} \vec{A}\, \vec{dl} = 0$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

* عکس قضیه 8 اگر $\oint_c \vec{A}\, d\vec{l}$ به مسیر C بستگی نداشته باشد و فقط به نقطه ابتدایی و انتهایی بستگی داشته باشد آنگاه تابع اسکالری مانند V وجود دارد بطوریکه: $\vec{A} = \nabla V$

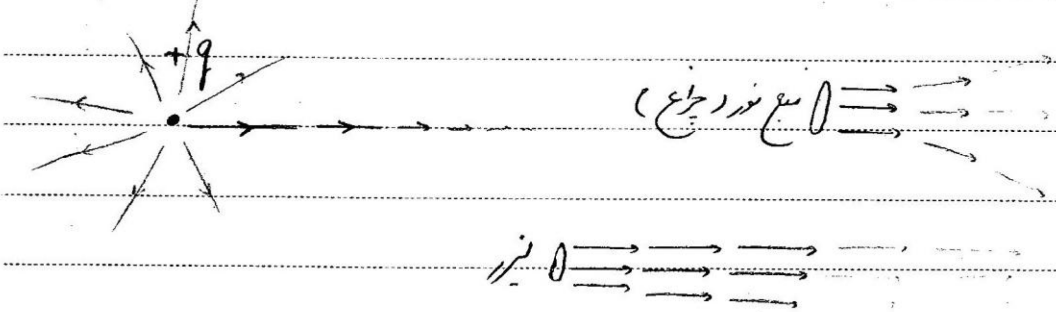
میدانهایی که انتگرال $\oint_c \vec{A}\, d\vec{l} = 0$ باشد «میدان پایستار» یا conservative می‌باشند

دسته دیگری از میدانها مانند میدان مغناطیسی که دارای انتگرال غیرصفر حول یک مسیر بسته هستند «غیرپایستار» می‌باشند. مقدار انتگرال یک میدان برداری غیرپایستار را حول یک مسیر بسته «سیرکولاسیون» میدان تعریف می‌کنند.

* مشخصات فضایی میدان برداری 8 ← 1) دیورژانس 2) کرل

برای سهولت تغییرات یک میدان برداری را می‌توان به‌صورت رسمی با خطوط میدان یا خطوط شار نمایش داد. خطوط میدان منحنی‌هایی هستند که در هر نقطه بر بردار میدان مماس بوده و تراکم یا پراکندگی آنها در هر ناحیه از فضا بستگی به بزرگی یا کوچکی (شدت و ضعف میدان) در آن ناحیه دارد.

روش رسم

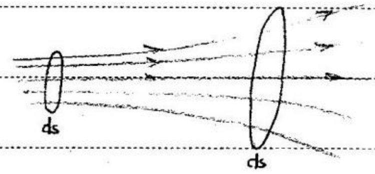


Subject:

Year. Month. Date. ( )



« دیورژانس »




حال عنصر حجم $\Delta V$ که به سطح بسته $\Delta S$ محدود است را در نظر می‌گیریم

شار خالص که از این سطح بسته $\Delta S$ خارج می‌شود برابر است با $\Longleftarrow$ $\boxed{d\varphi = \vec{A}\,\vec{ds}}$ شار بردار $\vec{A}$ به ازای المان سطح $ds$ محاسبه می‌شود

در حجم با یک سطح بسته تا وقتی شار اضافی در ورودی وجود خواهد داشت که این حجم دارای یک « چاه » باشد

$$\boxed{\text{شار خالص خروجی} = \oint_{\Delta S} \vec{A}\cdot\vec{ds}}$$

* تعریف دیورژانس:

حد نسبت شار خارج شده از سطح بسته $S$ به المان حجم $\Delta V$ وقتی که $\Delta V$ به سمت صفر میل کند.

تعریف دیورژانس $\vec{A}$ :

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{A} = \nabla\cdot\vec{A} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint_S \vec{A}\cdot ds}{\Delta V}}$$ (اسکالر)

« نکته »

$$\nabla\cdot\vec{A} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(h_2h_3A_1\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(h_1h_3A_2\right) + \frac{\partial}{\partial u_3}\left(h_1h_2A_3\right)\right]$$

$$\nabla\cdot\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \Longleftarrow \text{دکارتی}$$

کروی $\Rightarrow$

$$\nabla\cdot h = \frac{1}{R^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\sin\theta\, A_R\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(R\sin\theta A_\theta\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(R\, A_\varphi\right)\right]$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

# قضیه دیورژانس:

تبدیل انتگرال سه گانه به دوگانه (حجم به سطح)

انتگرال حجمی دیورژانس یک میدان برداری با شار کل خروجی بردار سطح در بر گیرنده حجم برابر است:

$$\iiint_V \nabla \cdot \vec{A}\, dv = \oiint_S \vec{A} \cdot d\vec{s}$$

به عبارتی تبدیل انتگرال حجمی دیورژانس یک بردار به انتگرال سطحی بسته یک بردار است.

* به عبارتی دیورژانس هر بردار، برابر است با مجموع تغییرات مؤلفه‌های آن بردار در جهتهای مربوطه.

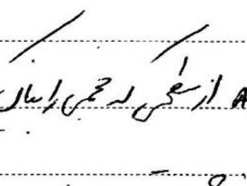
## کرل

شار خالص خروجی بردار A از سطحی که حجمی را بیان کرده باشد بیانگر وجود یک منبع است. این منبع ممکن است منبع جریان باشد که دیورژانس A سنجشی از شدت منبع جریان است.

* کرل یک میدان برداری:

منبع دیگری از منبع، منبع گردابی است که باعث گردش یک میدان برداری به دور آن می‌شود. گردش یک میدان برداری به دور یک مسیر بسته به عنوان انتگرال خطی بردار روی آن مسیر تعریف می‌شود

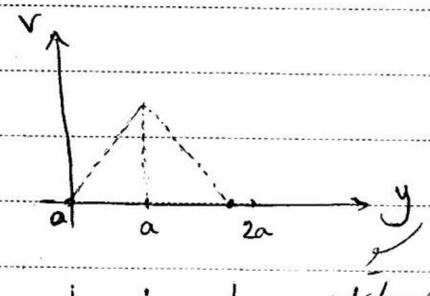
$$\text{گردش A به دور مسیر C} = \oint_C A \cdot dl$$



Subject:
Year. Month. Date. ( )

$\Delta S$ به طوری قرار گرفته است که انتگرال $\oint_C A\,dl$ حداکثر مقدار ممکن را دارا باشد. بردار واحد $a_n$ را عمود بر سطح $\Delta S$ طوری در نظر می‌گیریم که در جهت پیشروی پیچ راستگردی باشد که در جهت انتخاب شده روی $\Delta C$ بچرخد.

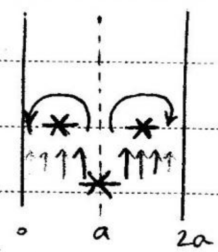
مثال : $V_x$ = ثابت




فرض می‌کنیم مثل یک جریان باشد عمود بر رو به رو باشد

سرعت max را در نقطه a خواهیم داشت.

* سرعت در نقطه a بیشتر است پس اگر توربینی در سمت راست مسیر قرار دهیم ساعتگرد و در سمت چپ مسیر، پادساعتگرد و اگر در مرکز قرار دهیم به خاطر صفر بودن برآیند حرکت نخواهد کرد.




**کرل میدان برداری A :**

برداری است که اندازه آن برابر با ماکزیمم گردش بردار بر واحد سطح است وقتی که سطح به سمت صفر میل می‌کند و راستای آن راستایی است که $\oint_C A\,dl$ مقدار حداکثر را می‌دهد.

$$\boxed{\operatorname{curl} \vec{A} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint_C A\cdot dl}{\Delta S}\cdot \hat{a}_n}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\begin{vmatrix} h_1 a_{u_1} & h_2 a_{u_2} & h_3 a_{u_3} \\ \partial/\partial u_1 & \partial/\partial u_2 & \partial/\partial u_3 \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow$ (

Subject:
Year. Month. Date. ( )

* قضیه استوکس:

انتگرال سطحی کرل یک میدان برداری روی یک سطح باز برابر انتگرال خطی بسته ی بردار روی مسیری است که سطح را دربرمی‌گیرد. به عبارتی قضیه استوکس تبدیل انتگرال سطحی کرل یک بردار به انتگرال خطی آن بردار است.

$$\iint_S (\nabla \times A)\cdot ds = \oint_C A\cdot dl$$

خلاصه

$$\begin{cases} \nabla \; \text{اسکالر} \xrightarrow{\text{گرادیان}} \text{بردار} \\ \nabla\cdot \; \text{بردار} \xrightarrow{\text{دیورژانس}} \text{اسکالر} \\ \nabla\times \; \text{بردار} \xrightarrow{\text{کرل}} \text{بردار} \end{cases}$$

* لاپلاسین:
$\left\{\begin{array}{l}\text{اسکالر}\\ \text{برداری}\end{array}\right.$

لاپلاسین تابع اسکالر: $\nabla^2 f = \nabla\cdot(\nabla f) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

لاپلاسین تابع برداری: $\nabla^2 \vec{A} = \nabla(\nabla\cdot\vec{A}) - \nabla\times\nabla\times\vec{A} = (\nabla^2 A_x)\hat{a}_x + (\nabla^2 A_y)\hat{a}_y + (\nabla^2 A_z)\hat{a}_z$

* اتحادهای صفر:

① $\nabla\times\nabla V = 0$ ← کرل گرادیان تابع اسکالر صفر است

② $\nabla\cdot\nabla\times\vec{A} = 0$ ← دیورژانس کرل تابع برداری صفر است

$$\begin{cases} \nabla\times\vec{E} = 0 \longrightarrow E = -\nabla V \\ \nabla\cdot J = 0 \longrightarrow J = \nabla\times H \end{cases}$$

← $\vec{E}$، گرادیان تابع اسکالر است

← $J$، کرل تابع برداری $H$ است

Subject:
Year. Month. Date. ( )

میدان برداری $\vec{A}$
- سلونوئیدی $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$
- غیرچرخشی $\nabla\times A=0$

منبع
- جریانی (flow) → $E$ میدان الکتریکی
- گردابی (vortex) → $H$ میدان مغناطیسی

«قضیه هلمولتز»

اگر دیورژانس و کرل یک بردار در کلیه نقاط فضا معلوم باشد آن میدان را می‌توان بطور کامل معین کرد

«فصل 3» «میدانهای الکتریکی ساکن»

$\frac{\partial}{\partial t}=0$ → ساکن یعنی مستقل از زمان

- (گسسته) بارهای نقطه‌ای
- (پیوسته) سطح بار، حجم بار

→ هدف: محاسبه $E$ (میدان الکتریکی)

روش ها
- قانون کولن (مستقیم)
- قانون گاوس (مستقیم)
- پتانسیل الکتریکی (غیرمستقیم)

در این درس ابتدا میدانهای الکتریکی و مغناطیسی ساکن (مستقل از زمان) بررسی شده و پس از آن بستر تکمیلی این نظریه معادلات ماکسول تهیه می‌شود و سپس میدانهای الکترومغناطیسی مطالعه می‌شود.

Subject :

Year . Month . Date . ( )

میدان الکتریکی ناشی از بارهای ساکن یعنی از توزیع‌های نقطه‌ای، خطی، سطحی و حجمی به چندین روش محاسبه می‌شود.

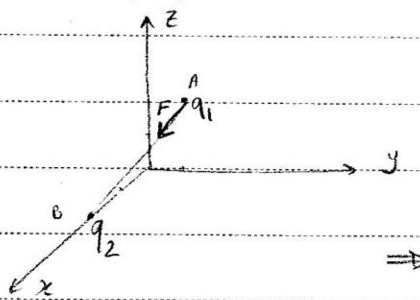
* قانون کولن:

$$\boxed{F_{12} = a_{R_{12}}\, k \frac{q_1 q_2}{r^2}} \quad , \quad k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad , \quad \epsilon_0 = 8{,}85\times10^{-12}\ (F/m)$$

$$\Rightarrow k = 9\times10^{9}$$

$F_{12} = -F_{21}$ در حالت جهت عکس هم

* مثال) بار $q_1$ در نقطه‌ی $(0,1,2)$ و بار $q_2$ در نقطه $(2,0,0)$ قرار دارد. نیرویی که از طرف $q_2$ بر $q_1$ وارد می‌شود را بدست آورید ($q_2 = -30^{\mu c}$, $q_1 = 20^{\mu c}$)




$$a_{R_{12}} = \frac{r_{12}}{|r_{12}|} = \frac{2i - j - 2k}{3}$$

$$\Rightarrow F_{12} = \frac{(20\times10^{-6})(30\times10^{-6})}{4\pi \times \underbrace{\frac{10^{-9}}{36\pi}}_{\epsilon_0} \cdot 3^2} \cdot \left(\frac{2a_x - a_y - 2a_z}{3}\right)$$

$$\Longrightarrow 4a_x - 2a_y - 4a_z$$

تمرین 1) بار $q_1 = 3\times10^{-4}c$ در نقطه $(1,2,3)$ قرار گرفته و $q_2 = -10^{-4}c$ در نقطه $(2,0,5)$. نیرویی که $q_2 - q_1$ وارد می‌کند را محاسبه کنید.

تمرین 2) چهار بار هر کدام $20\mu c$ روی محورهای $x$ و $y$ در نقاط $\pm4$ متر قرار گرفته است. بار $100^{\mu c}$ در نقطه‌ی $(0,0,3)$ قرار دارد. نیروی وارد بر این بار را محاسبه کنید.